

INTRODUCTION À LA THÉORIE QUALITATIVE DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

NOTES DE COURS AVEC SUPPORT MAPLE



FILIÈRE SCIENCES MATHÉMATIQUES ET APPLICATIONS – SEMESTRE 6
ANNÉE UNIVERSITAIRE
2018 – 2019

F. ZINOUN

LabMIA
Recherche et Enseignement

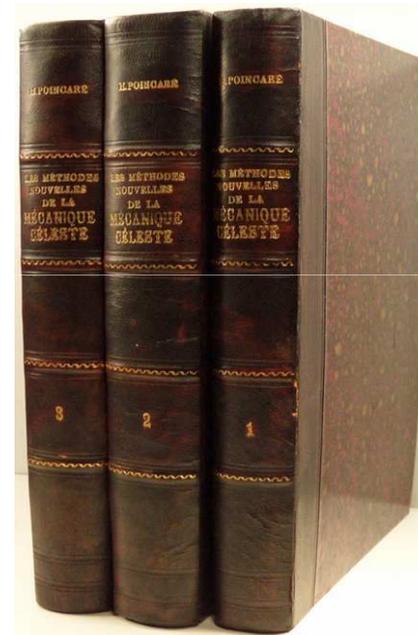
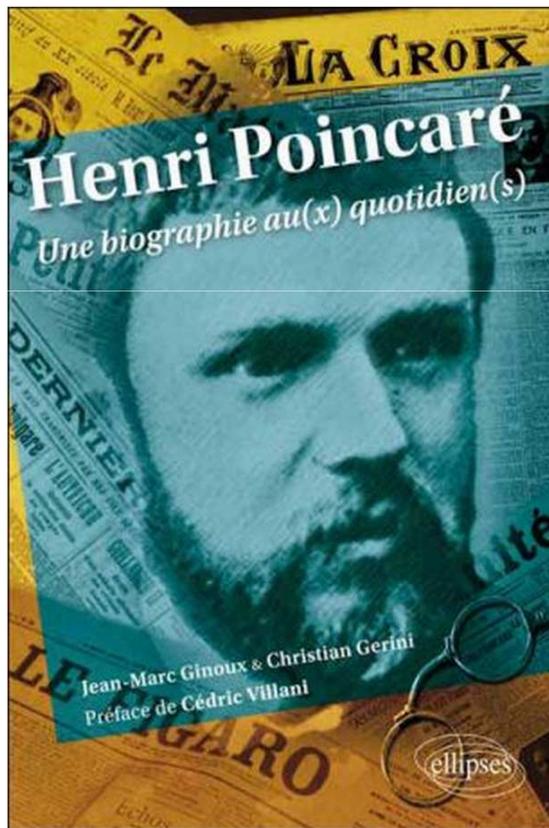
Département de Mathématiques
Faculté des Sciences de Rabat



Ce support recouvre les notions de base de la théorie qualitative des équations différentielles, depuis le théorème fondamental d'existence et d'unicité jusqu'à la notion d'attracteur étrange, en passant par la classification topologique des points d'équilibre dans le plan, la notion de stabilité au sens de Lyapounov, le théorème d'équivalence locale de Hartman-Grobman, le théorème de Poincaré-Bendixson ainsi que la notion de bifurcation. Destinées aux étudiants en dernier semestre de la filière Sciences Mathématiques et Applications, il s'agit de notes de cours qui, d'une part, ne peuvent se substituer à un suivi régulier des séances de cours et des travaux dirigés en présentiel, et d'autre part, ne peuvent prétendre jouer le rôle d'un manuel. Elles tiennent lieu cependant de cours de base pour introduire aux Méthodes Avancées en Théorie Qualitative des Équations Différentielles, cours dispensé par l'auteur au sein du parcours Ingénierie Mathématique et Modélisation du master Mathématiques et Applications (FSR 2015-2019). C'est aussi un prérequis indispensable pour introduire à la Cryptographie à Base de Chaos, autre cours dispensé par l'auteur au sein du master Codes, Cryptographie et Sécurité de l'Information (FSR 2008-2018). Pour alléger le texte, les démonstrations des grands théorèmes ont été omises; des esquisses de preuves font cependant l'objet de discussions en classe alors que, à titre facultatif, une version intégrale est toujours mise à la disposition de l'étudiant. On notera enfin, et ce n'est nullement un luxe, faute de travaux pratiques, que le texte est ponctué de sessions Maple traitant en interactif les différentes notions abordées.

Traité fondateur

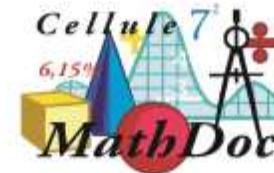
3



H. Poincaré : *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, Paris, Gauthier-Villars, 1892-93-99.

Quelques œuvres de Poincaré téléchargeables sur le web

4



*Article numérisé dans le cadre du programme
Gallica de la Bibliothèque nationale de France
<http://gallica.bnf.fr/>*

*et catalogué par la Cellule MathDoc
dans le cadre du pôle associé BnF/CMD
<http://portail.mathdoc.fr/GALLICA/>*

Thèse inaugurale (1879)

5

N° D'ORDRE
432.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES,

PAR M. POINCARÉ,

Ingénieur des Mines.

1^{re} THÈSE. — SUR LES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DÉFINIES PAR LES ÉQUATIONS
AUX DIFFÉRENCES PARTIELLES.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues, le

1879, devant la Commission
d'Examen.

MM. BOUQUET, *Président.*

OSSIAN BONNET, } *Examinateurs.*
DARBOUX, }

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,

SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER,

Quai des Augustins, 55.

1879

Série d'articles (1881- 1885)

6

H. POINCARÉ

Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (I)

Journal de mathématiques pures et appliquées 3^e série, tome 7 (1881), p. 375-422.

[<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1881_3_7_A20_0>](http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1881_3_7_A20_0)

H. POINCARÉ

Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle (II)

Journal de mathématiques pures et appliquées 3^e série, tome 8 (1882), p. 251-296.

[<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1882_3_8_A10_0>](http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1882_3_8_A10_0)

H. POINCARÉ

Sur les courbes définies par les équations différentielles (III)

Journal de mathématiques pures et appliquées 4^e série, tome 1 (1885), p. 167-244.

[<http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1885_4_1_A6_0>](http://portail.mathdoc.fr/JMPA/afficher_notice.php?id=JMPA_1885_4_1_A6_0)

“Trilogie” sur la mécanique céleste (1892- 1899)

7

LES MÉTHODES NOUVELLES

DE LA

MÉCANIQUE CÉLESTE

PAR

H. POINCARÉ,

MEMBRE DE L'INSTITUT,
PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES.

TOME I.

Solutions périodiques. — Non-existence des intégrales uniformes.
Solutions asymptotiques.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
OU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1892

(Tous droits réservés.)

L'algébrique vs le numérique vs le qualitatif

- Il est généralement impossible d'intégrer explicitement des équations différentielles dans le sens où l'on veut exprimer les solutions sous forme de combinaisons en nombre fini de fonctions élémentaires ou de primitives de celles-ci. D'ailleurs, qu'est-ce qu'une fonction élémentaire ?

- Comme réponse à ce problème, on peut pratiquement toujours approcher numériquement une solution sur un intervalle physiquement raisonnable. Cependant, une méthode numérique - aussi puissante soit-elle - ne fournit qu'une solution particulière du problème, d'autant plus qu'un schéma numérique s'apprête mal à un jeu de paramètres, ce qui le rend parfois inutile lorsqu'il est question de toute une famille de solutions et de leur comportement.

- Revenant au premier point, est-il vraiment nécessaire d'avoir sous forme explicite toutes les solutions ? Ne serait-ce pas trop compliqué pour être utile ? Le tableau de variations d'une fonction numérique de la variable réelle, ou du moins une partie de celui-ci, ou encore juste la mise en évidence d'une limite, d'une asymptote, etc. n'est-il pas parfois assez suffisant comme information sur la fonction ? C'est l'idée même de Poincaré, lui qui voulait "juste" savoir si le système solaire est stable, délaissant ainsi l'idée d'une intégration explicite, idée d'ailleurs illusoire pour un système de seulement trois corps célestes ...

Notion de système dynamique

9

Tout système (physique, biologique, économique, etc.) qui évolue au cours du temps (de manière discrète ou continue) est dit *dynamique*.

Cette définition, certes non mathématique, n'est que provisoire; plus de rigueur sera en fait perçue à mesure que le cours avance ...

Systemes d'equations differentielles ordinaires

10

Une attention particuliere sera pratee aux systemes dynamiques continus, modelises par un systeme d'*equations differentielles ordinaires* du 1^{er} ordre, de la forme

$$\dot{x} = f(x) \quad , \quad x \in U \quad (1)$$

U etant un ouvert de \mathbb{R}^n .

Vocabulaire

Concrètement, le système s'écrit

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \dots \dots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

où, pour fixer la terminologie,

- $t \in I \subset \mathbb{R}$, est la *variable indépendante*, faisant référence au temps. Elle n'apparaît pas explicitement dans (1) pour ne se limiter qu'aux systèmes dits *autonomes*.
- $x = (x_1, \dots, x_n)$ est le vecteur des *variables dépendantes* x_i , $1 \leq i \leq n$, $x(t)$ représentant l'*état* du système à l'instant t . \mathbb{R}^n (ou plus précisément U) est alors l'*espace d'états* (ou *des phases*) du système dynamique.
- $f = (f_1, \dots, f_n)$ est le *champ de vecteurs* associé au système dynamique (1), supposé dorénavant de classe C^1 et dépendant éventuellement d'un certain nombre de paramètres. En réalité, c'est un f_ε .

Remarque

12

Un système non autonome peut toujours se ramener à un système autonome, et ce en augmentant la dimension de l'espace des phases. En fait, le système

$$\dot{x} = f(t, x)$$

se réécrit

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ \dot{t} = 1 \end{cases}$$

ou encore

$$\dot{y} = g(y)$$

avec $y = (x, t)$ et $g(y) = (f(t, x), 1)$.

Cette remarque banale permet de se restreindre au cas autonome, sans perte de la généralité. Cela ne signifie pas pour autant que les systèmes non autonomes ne puissent avoir des spécificités que ne possèdent pas les systèmes autonomes (voir par exemple la session Maple sur les solutions périodiques ...)

Courbes intégrales et portrait de phase

Une *solution* du système dynamique (1) (ou *courbe intégrale* du champ de vecteurs f) est une application différentiable x d'un intervalle ouvert I de la droite du temps dans U , telle que $x(t)$ vérifie l'équation (1) pour tout $t \in I$.

On dit qu'une solution x satisfait la *donnée de Cauchy* $(t_0, x_0) \in I \times U$ si $x(t_0) = x_0$. Sous certaines hypothèses de régularité du champ f (voir théorème ci-après), la *solution maximale* (qui ne peut être prolongée, dans un sens à préciser en travaux dirigés) satisfaisant une donnée de Cauchy (t_0, x_0) est unique. Son image est l'*orbite* ou *trajectoire* passant par le point x_0 à l'instant t_0 , le *portrait de phase* étant la figure formée par l'ensemble des orbites (bien qu'en pratique, seules quelques trajectoires représentatives sont considérées. Voir session Maple illustrant les portraits de phase de quelques modèles pédagogiques tels Lotka-Volterra en dynamique de populations, van der Pol en théorie des circuits ou encore Lorenz en météorologie ...)

Théorème fondamental d'existence et d'unicité

14

Si f est de classe C^1 sur un ouvert U de \mathbb{R}^n contenant x_0 , alors il existe $\alpha > 0$ tel que le problème à condition initiale

$$(1') \quad \begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

admet une solution unique sur l'intervalle $] - \alpha, \alpha[$.

Sur le théorème ...

Le théorème fondamental d'existence et d'unicité, sous des formes plus ou moins élaborées, a une longue histoire, depuis une première version démontrée par Cauchy (se basant sur des travaux d'Euler), en passant par Lipschitz, jusqu'aux travaux de Picard, Painlevé, Poincaré et Lindelöf. Le théorème se démontre souvent actuellement à l'aide d'une technique appelée *itération de Picard*. Cette technique d'approximation, qui fera l'objet de quelques exemples d'application en travaux dirigés, est la même qui est utilisée pour montrer aussi bien le théorème de Hartman-Grobman (voir plus loin) que la régularité des solutions par rapport aux conditions initiales et aux paramètres.

Une démonstration complète du théorème fondamental d'existence et d'unicité sera mise à la disposition de l'étudiant. On comprendra dès lors que la condition " f est C^1 " peut être allégée et remplacée par une condition de lipschitzité locale sur f , un théorème de Peano garantissant même l'existence d'une solution locale sous la seule hypothèse de continuité de f .

Déterminisme

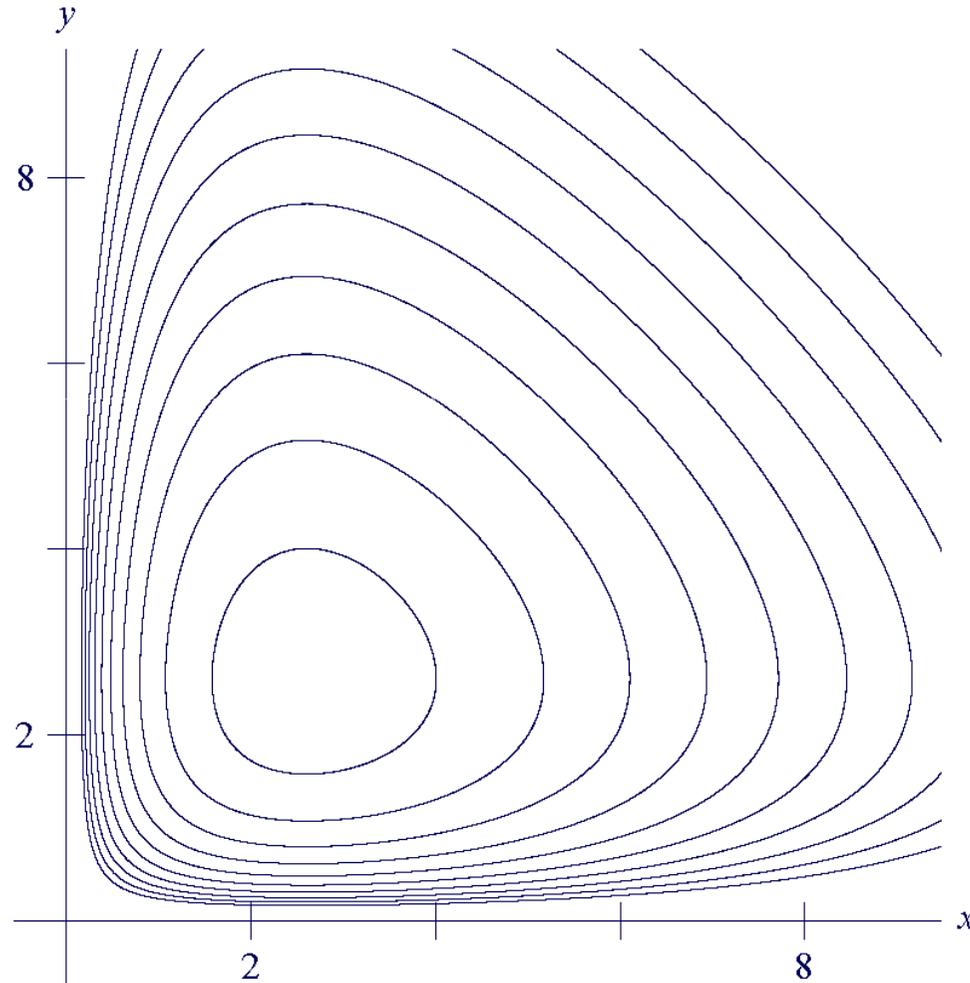
16

Les orbites associées au système (1) forment une partition de l'espace des phases. Chaque orbite non réduite à un point est une courbe lisse (sans point double ni point de rebroussement).

On comprend, dès lors, qu'un système dynamique *classique* du type (1) évolue de manière *déterministe*, une forme de *fatalisme* indiquant que "l'histoire et l'avenir" du système sont déterminés de manière *unique* à partir de son état présent.

Exemple

17

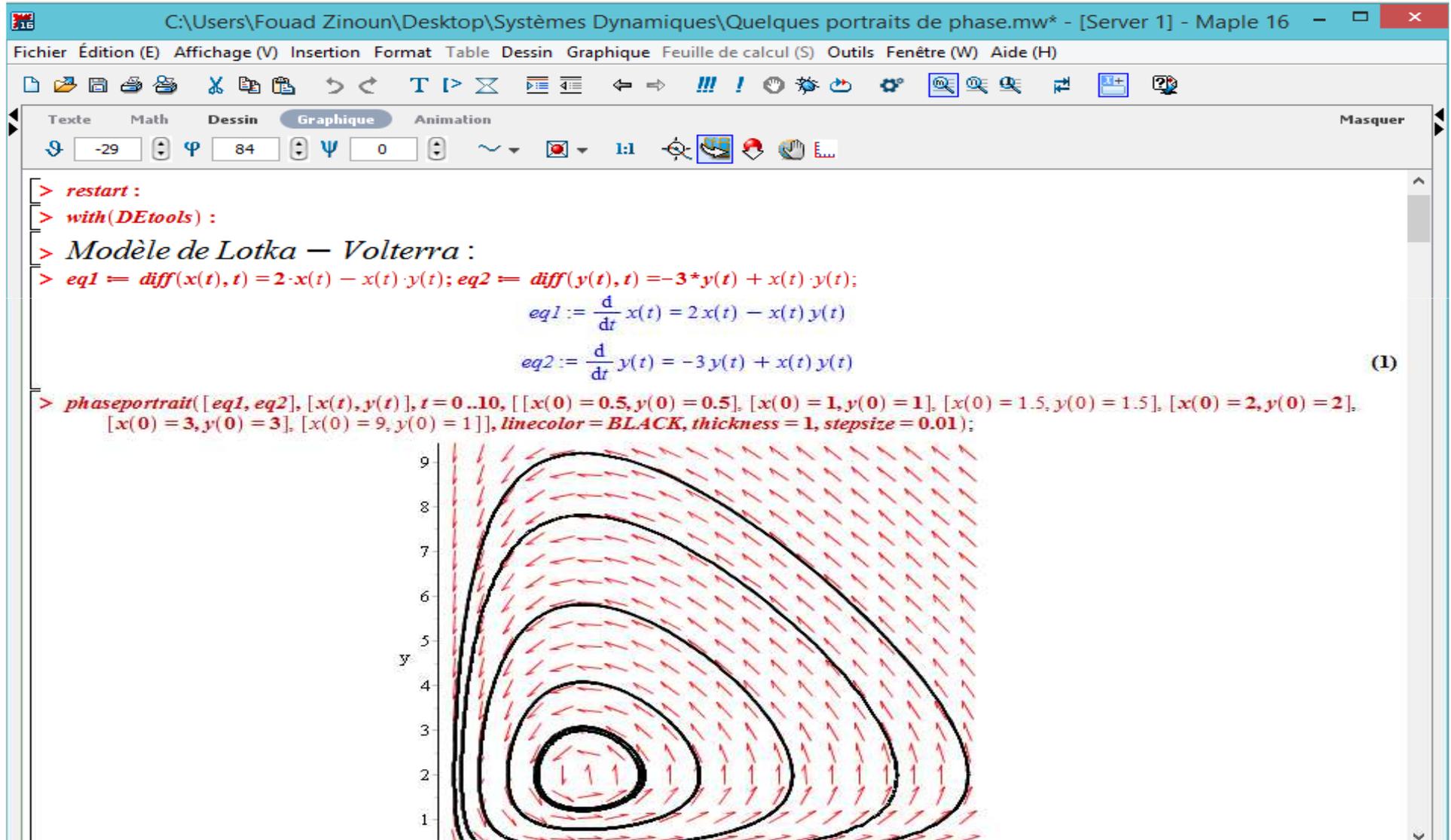


Les orbites du modèle prédateur-proie de Lotka-Volterra forment une partition de \mathbb{R}_+^2

Image Wikipédia

Quelques simulations Maple de portraits de phase ou de solutions particulières de modèles non linéaires : Lotka Volterra, van der Pol, Lorenz, Hénon-Heiles.
Le package “DEtools” et les commandes “phaseportrait”, “dfieldplot”, “DEplot3d” :

18





Texte Math Dessin **Graphique** Animation Masquer

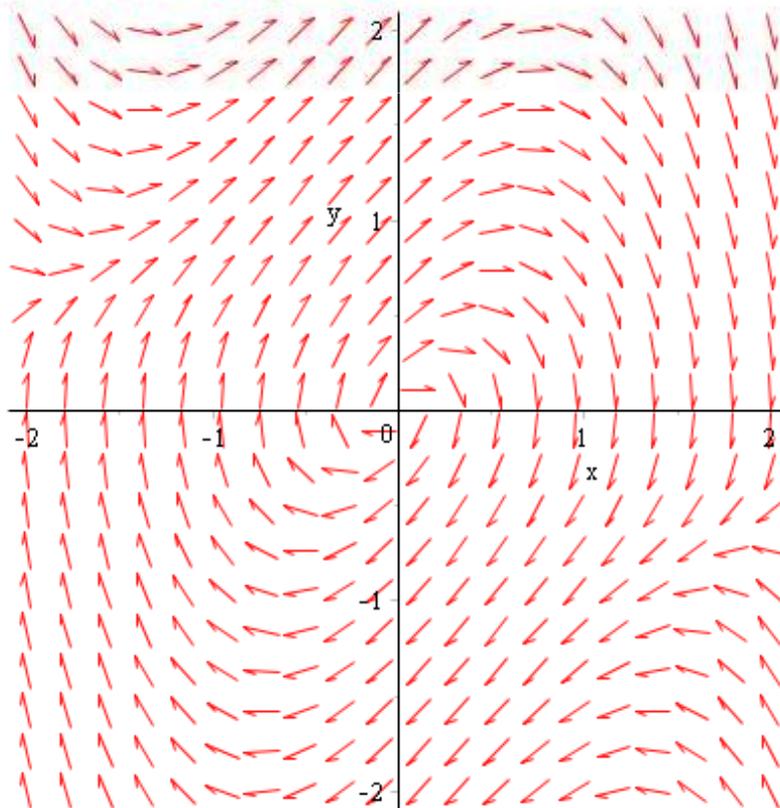
-29 ψ 84 ψ 0 1:1

Circuit de van der Pol

```
> sys := {diff(x(t), t) = y(t), diff(y(t), t) = -x(t) + mu*(1 - x(t)^2)*y(t)};
```

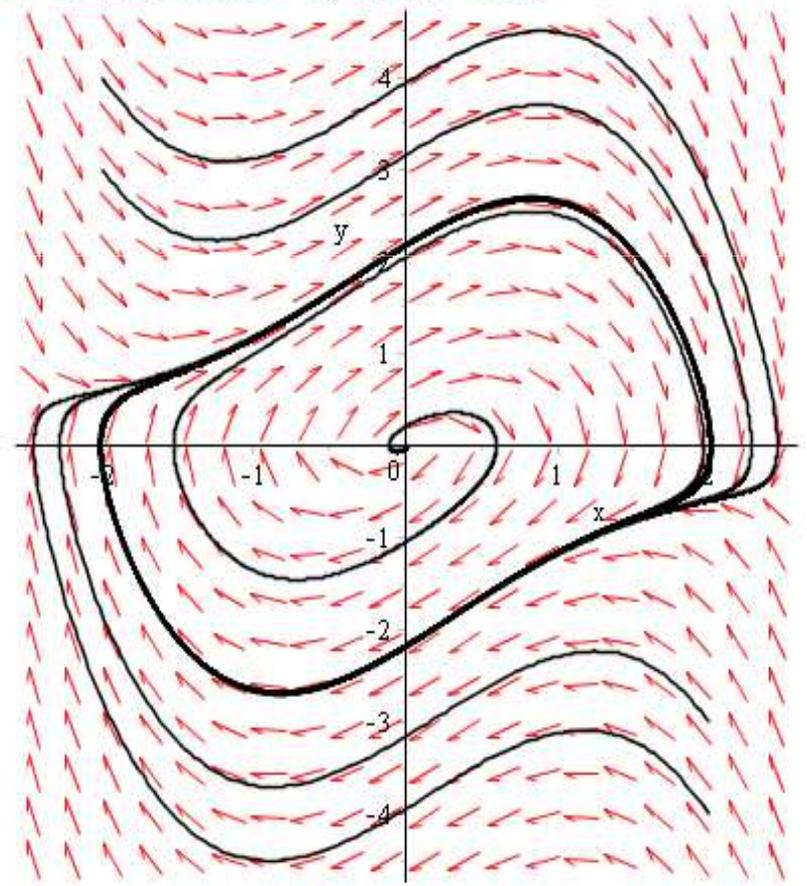
$$\text{sys} := \left\{ \frac{d}{dt} x(t) = y(t), \frac{d}{dt} y(t) = -x(t) + \mu (1 - x(t)^2) y(t) \right\} \quad (2)$$

```
> mu := 1 : dfieldplot(sys, [x(t), y(t)], t = 0..40, x = -2..2, y = -2..2);
```





```
> phaseportrait(sys, [x(t), y(t)], t = 0..30, [[x(0) = 0.01, y(0) = 0.01], [x(0) = -2, y(0) = 3], [x(0) = -2, y(0) = 4], [x(0) = 2, y(0) = -4], [x(0) = 2, y(0) = -3]], linecolor = BLACK, thickness = 1, stepsize = 0.01);
```



C:\Users\Fouad Zinoun\Desktop\Systèmes Dynamiques\Quelques portraits de phase.mw* - [Server 1] - Maple 16

Fichier Édition (E) Affichage (V) Insertion Format Table Dessin Graphique Feuille de calcul (S) Outils Fenêtre (W) Aide (H)

Texte **Math** Dessin Graphique Animation Masquer

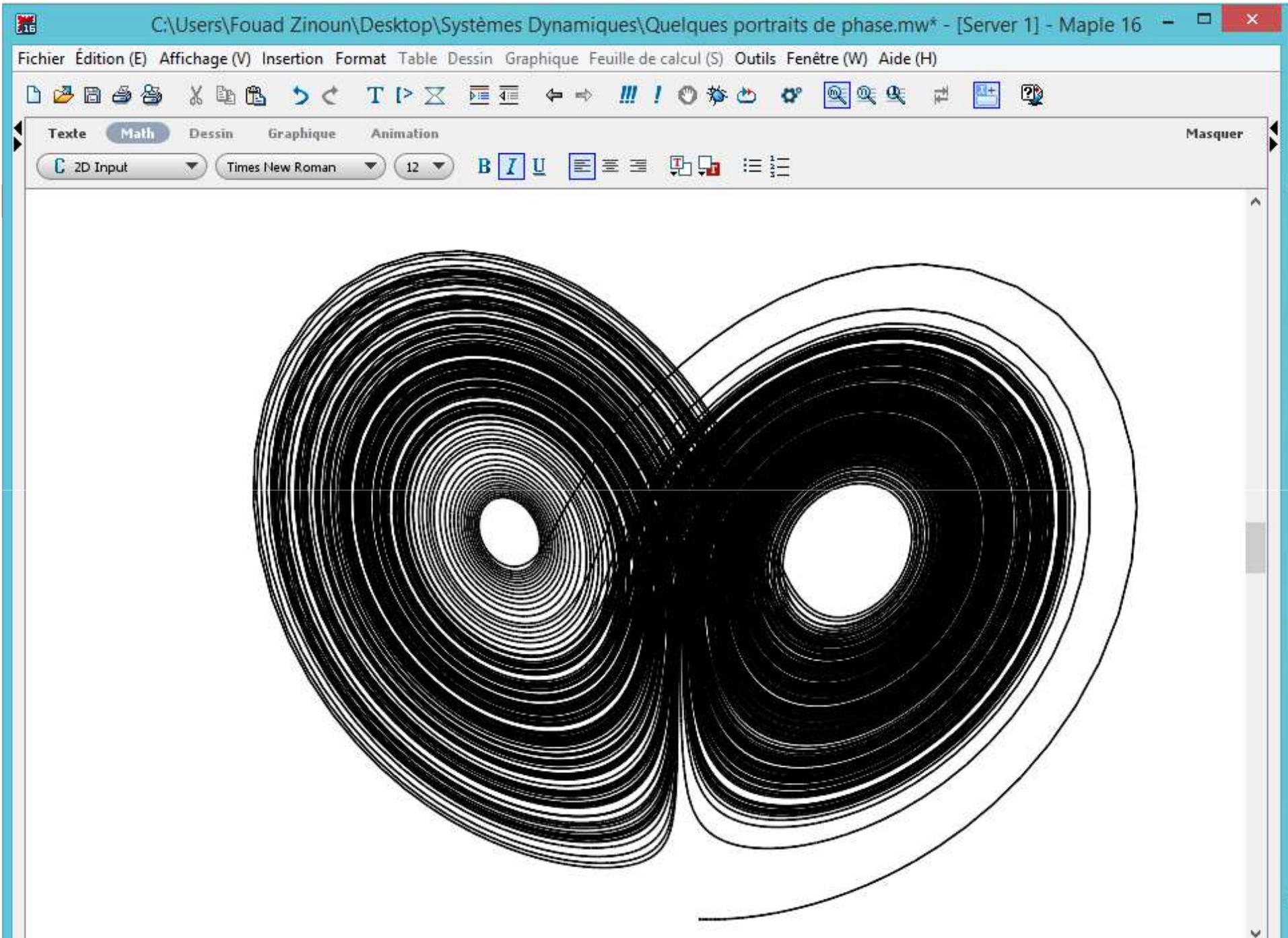
2D Input Times New Roman 12 B I U

Modèle météorologique d'Edward Lorenz

```

> restart :
> with(DEtools) :
> a := 10 : b := 8/3 : r := 28 : sys := {diff(x(t), t) = a*(y(t) - x(t)), diff(y(t), t) = r*x(t) - y(t) - x(t)*z(t), diff(z(t), t) = -b*z(t) + x(t)*y(t)};
      sys := {  $\frac{d}{dt} x(t) = 10 y(t) - 10 x(t), \frac{d}{dt} y(t) = 28 x(t) - y(t) - x(t) z(t), \frac{d}{dt} z(t) = -\frac{8}{3} z(t) + x(t) y(t)$  } (5)
> DEplot3d(sys, [x(t), y(t), z(t)], t = 0 .. 300, [[x(0) = 1, y(0) = 1, z(0) = 1]], linecolor = BLACK, thickness = 1, stepsize = 0.01);

```





Texte Math Dessin **Graphique** Animation

Masquer



Le système non intégrable de Hénon-Heiles:

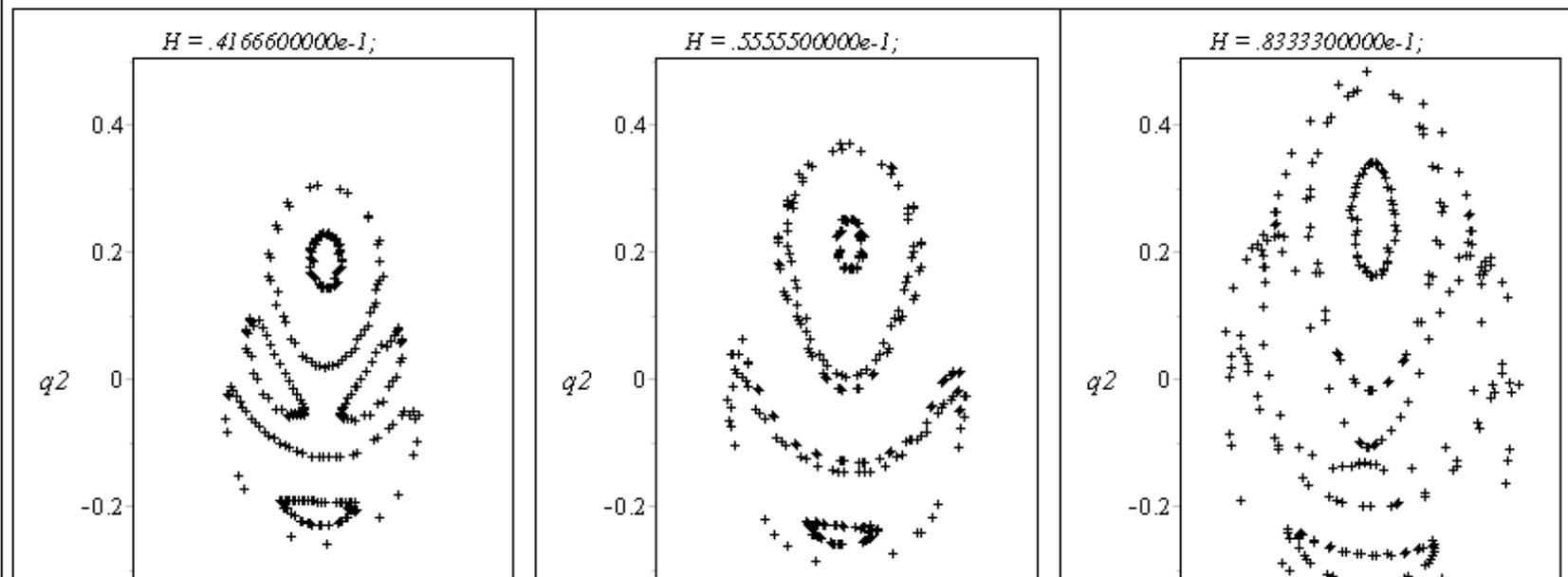
> $H = 1/2*(p1^2 + p2^2 + q1^2 + q2^2) + q1^2*q2 - q2^3/3;$

$$H := \frac{1}{2} p1^2 + \frac{1}{2} p2^2 + \frac{1}{2} q1^2 + \frac{1}{2} q2^2 + q1^2 q2 - \frac{1}{3} q2^3 \quad (6)$$

> hamilton_eqs(H);

$$\left[\frac{d}{dt} p1(t) = -q1(t) - 2 q1(t) q2(t), \frac{d}{dt} p2(t) = -q2(t) - q1(t)^2 + q2(t)^2, \frac{d}{dt} q1(t) = p1(t), \frac{d}{dt} q2(t) = p2(t) \right], [p1(t), p2(t), q1(t), q2(t)] \quad (7)$$

Les simulations suivantes sont tirées d'un helpfile Maple, les quadrants représentant les points d'impact de la solution dans le plan $(p2, q2)$ pour différents niveaux d'énergie :

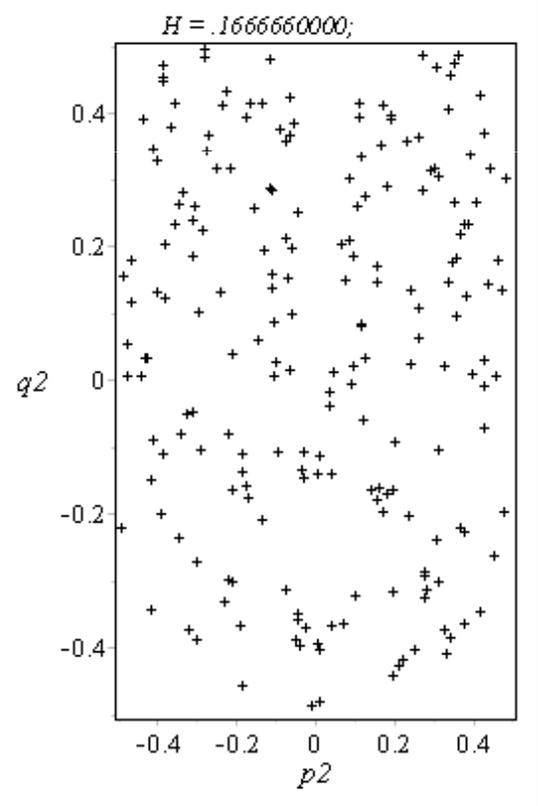
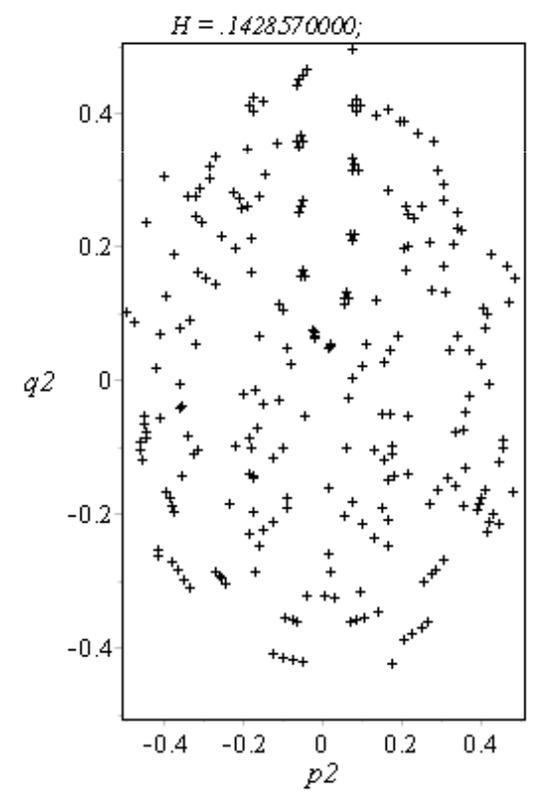
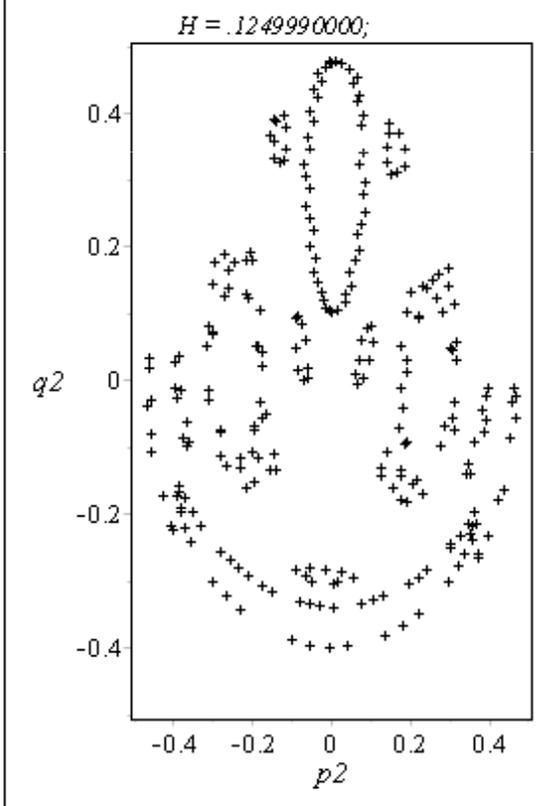
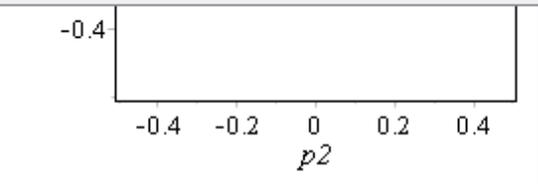
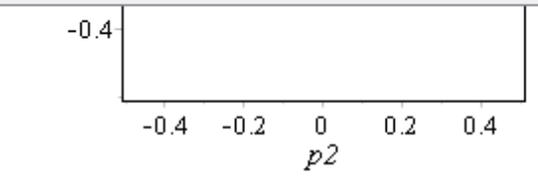
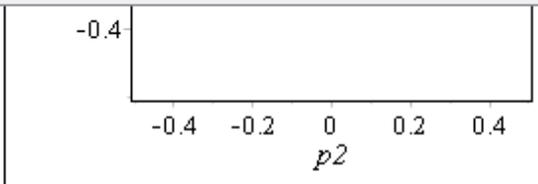




Texte Math Dessin Graphique Animation

Masquer

Maple Plot Times New Roman 12 B I U



Classification topologique

25

D'un point de vue topologique, une orbite peut être:

- Un *point d'équilibre* (ou *singulier* ou encore *stationnaire*), c.-à-d. image d'une solution vérifiant $x(t) = x_0$ pour tout t , ce qui correspond à

$$f(x_0) = 0$$

Si le système se trouve dans un tel état, c'est qu'il le sera toujours comme il l'a toujours été d'ailleurs.

- Une *trajectoire fermée* (ou *cycle*), donc image d'une *solution maximale périodique* puisque le système est autonome. Elle est dans ce cas homéomorphe à un cercle.
- Une *trajectoire non compacte*, image d'une solution maximale injective (ce qui n'implique pas que l'orbite soit homéomorphe à la droite réelle!)

Le point d'équilibre

26

Rappelons que x_0 est un point d'équilibre du système (1) si

$$f(x_0) = 0$$

C'est un point qui ne peut donc être atteint en un temps fini, d'après le théorème fondamental partitionnant l'espace des phases.

Notion d'attraction pour un point d'équilibre

27

Un point d'équilibre x_0 est dit attractif (resp. répulsif) s'il attire (resp. repousse) - peu importe la façon - toute solution suffisamment voisine.

Mathématiquement, il existe un voisinage V de x_0 tel que

$$x(0) \in V \implies \lim_{\substack{t \rightarrow +\infty \\ (t \rightarrow -\infty)}} x(t) = x_0$$

Le bassin d'attraction d'un point d'équilibre x_0 est l'ensemble des conditions initiales à partir desquelles le système évolue inexorablement vers cet équilibre.

C'est donc la réunion de toutes les orbites qui "convergent" vers x_0 .

Mathématiquement, c'est le sous-ensemble $\mathcal{A}(x_0)$ de l'espace des phases tel que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0 \quad \text{dès que } x(0) \in \mathcal{A}(x_0)$$

Le bassin de répulsion $\mathcal{R}(x_0)$ se définit de la même manière en remplaçant $t \rightarrow +\infty$ par $t \rightarrow -\infty$

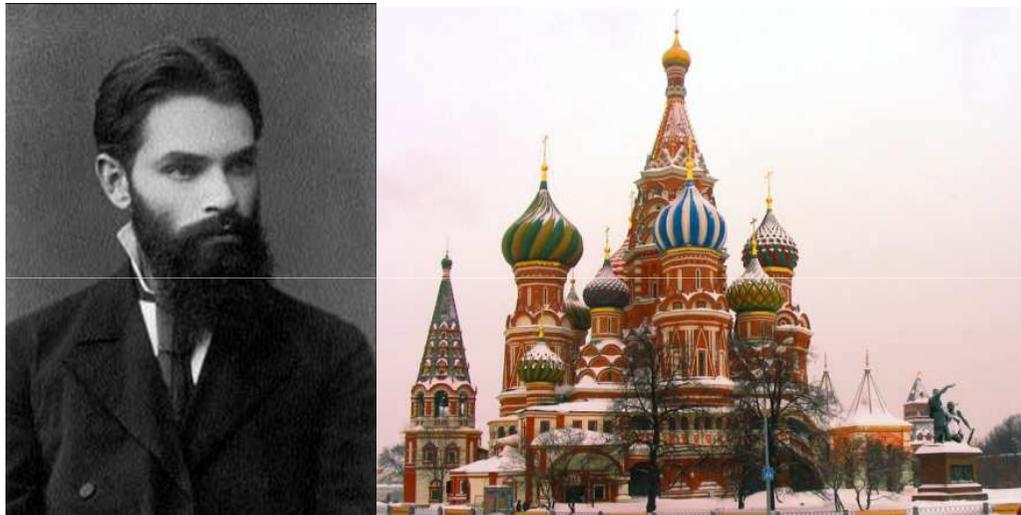
“ Réversibilité ”

28

Dorénavant, nous n'allons garder que la propriété d'attraction puisque l'on peut toujours considérer le champ de vecteurs inverse en cas de répulsion.

Théorie de la stabilité du mouvement

29



Alexandre Lyapounov (1857-1918)

Université d'État de Saint-Petersbourg
Académie des sciences de Russie

Image Wikipédia

Notion de stabilité de points d'équilibre

30

Le point x_0 est stable (au sens de Lyapounov) si toute solution naissant en son voisinage lui reste suffisamment voisine.

Mathématiquement, $\forall V$ voisinage de x_0 , $\exists U$ sous-voisinage de x_0 tq

$$x(0) \in U \implies x(t) \in V \quad \forall t \geq 0$$

Un point d'équilibre qui n'est pas stable est dit instable.

Stabilité et attraction

31

Un point d'équilibre peut être attractif sans pour autant être stable !

(voir simulation MAPLE ci-après)

C:\Users\Fouad Zinoun\Desktop\Systèmes Dynamiques\Quelques portraits de phase.mw* - [Server 1] - Maple 16

Fichier Édition (E) Affichage (V) Insertion Format Table Dessin Graphique Feuille de calcul (S) Outils Fenêtre (W) Aide (H)

Texte Math Dessin Graphique Animation Masquer

C Text Times New Roman 18 B I U

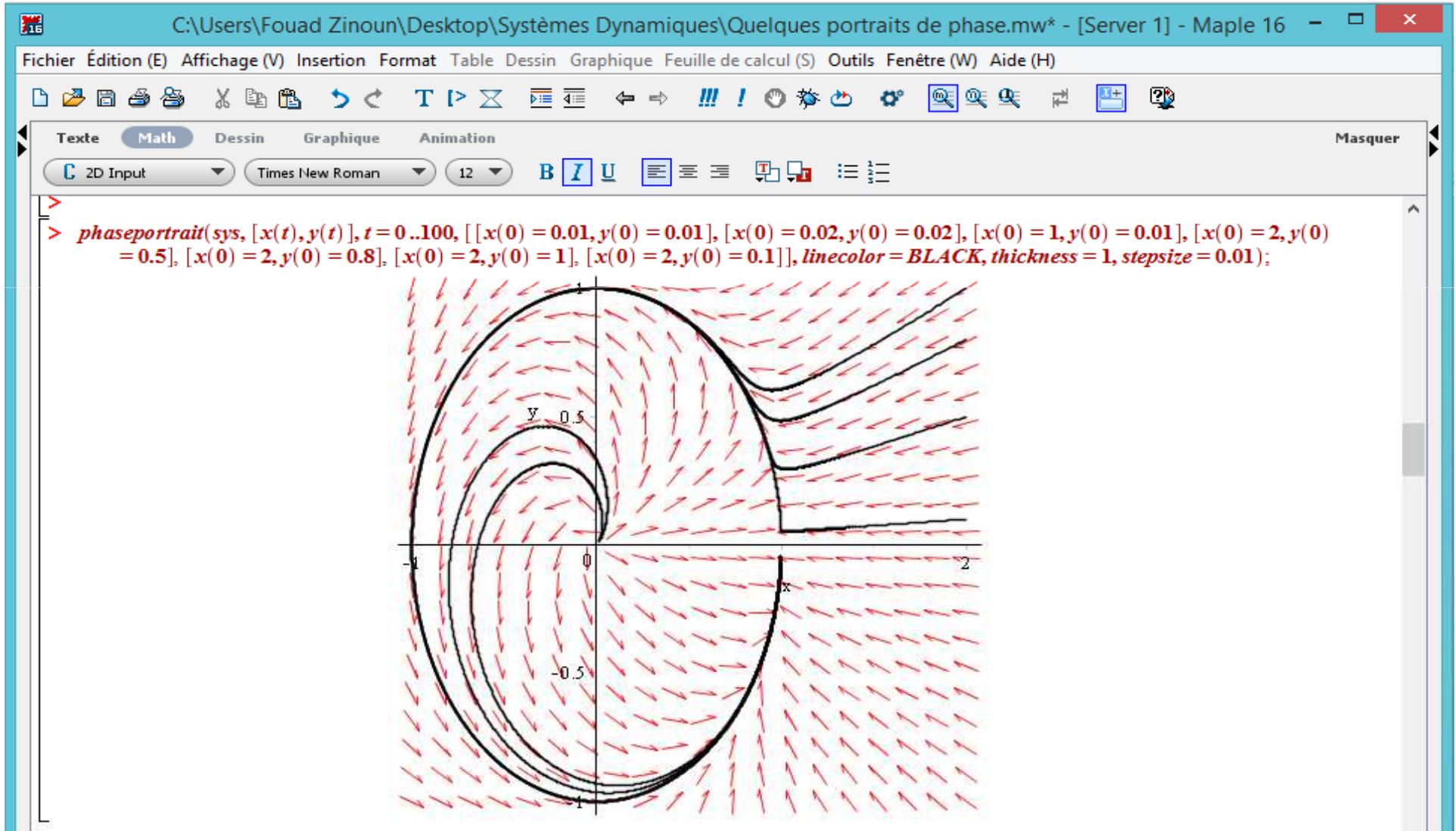
Un exemple de point d'équilibre attractif mais instable :

> sys := {diff(r(t), t) = r(t) · (1 - r(t)), diff(theta(t), t) = (sin(θ(t)/2))²};

$$\text{sys} := \left\{ \frac{d}{dt} \theta(t) = \sin\left(\frac{1}{2} \theta(t)\right)^2, \frac{d}{dt} r(t) = r(t) (1 - r(t)) \right\} \quad (3)$$

> sys := {diff(x(t), t) = sqrt(x(t)² + y(t)²) · (1 - sqrt(x(t)² + y(t)²)) · cos(arctan(y(t), x(t))) - sqrt(x(t)² + y(t)²) · sin(arctan(y(t), x(t))), x(t)) · (sin(arctan(y(t), x(t))/2))², diff(y(t), t) = sqrt(x(t)² + y(t)²) · (1 - sqrt(x(t)² + y(t)²)) · sin(arctan(y(t), x(t))) + sqrt(x(t)² + y(t)²) · cos(arctan(y(t), x(t))) · (sin(arctan(y(t), x(t))/2))²};

$$\text{sys} := \left\{ \frac{d}{dt} y(t) = (1 - \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}) y(t) + x(t) \sin\left(\frac{1}{2} \arctan(y(t), x(t))\right)^2, \frac{d}{dt} x(t) = (1 - \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}) x(t) - y(t) \sin\left(\frac{1}{2} \arctan(y(t), x(t))\right)^2 \right\} \quad (4)$$



Stabilité asymptotique

34

Le point d'équilibre x_0 est dit asymptotiquement stable s'il est stable (au sens de Lyapounov) et en plus, U peut être choisi de telle manière à ce que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x_0 \quad \text{dès que } x(0) \in U$$

Remarquer alors que cette deuxième propriété n'est autre que celle de l'attraction:

Un point d'équilibre asymptotiquement stable n'est autre qu'un point attractif stable.

Stabilité exponentielle

35

x_0 est dit exponentiellement stable s'il en existe un voisinage U et une constante $\alpha > 0$ tels que pour tout $t > 0$

$$\|x(t) - x_0\| < \exp(-\alpha t) \quad \text{dès que } x(0) \in U$$

En d'autres termes, la stabilité exponentielle est une stabilité asymptotique avec attraction exponentielle.

Fonction de Lyapounov

36

Donné un point d'équilibre x_0 du système (1), s'il existe une fonction scalaire Γ , continue sur un voisinage U de x_0 et différentiable sur $U - \{x_0\}$, telle que

(a) $\Gamma(x_0) = 0$ et $\Gamma(x) > 0$ pour $x \neq x_0$ (Γ est définie positive sur U),

(b) $\dot{\Gamma}(x) := D\Gamma(x)(f(x)) \leq 0$ pour tout $x \in U - \{x_0\}$ ($\dot{\Gamma}$ est semi-définie négative, ou encore Γ est décroissante le long des solutions $x(t)$),

alors x_0 est stable. De plus, si

(c) $\dot{\Gamma} < 0$ sur $U - \{x_0\}$ ($\dot{\Gamma}$ est définie négative ou encore Γ est strictement décroissante le long des solutions $x(t)$),

alors x_0 est asymptotiquement stable. Enfin, si

(d) $\dot{\Gamma} > 0$ sur $U - \{x_0\}$ ($\dot{\Gamma}$ est définie positive ou encore Γ est strictement croissante le long des solutions $x(t)$),

alors x_0 est instable.

Une telle fonction est dite de Lyapounov dans le cas (a-b), de Lyapounov stricte dans les cas (a-c) et (a-d).

Procédé ad hoc

Le théorème donne une condition suffisante de stabilité mais ne permet pas de guider l'utilisateur dans le choix d'une fonction de Lyapounov.

Il ne permet pas non plus de conclure si on n'arrive pas à mettre en évidence une telle fonction.

Une fonction de Lyapounov candidate est donc une fonction définie positive dont on teste la décroissance autour du point d'équilibre, les formes quadratiques étant les plus souvent utilisées, notamment les fonctions définies positives qui sont des intégrales premières (c'est-à-dire constantes le long des solutions) du système idéalisé, comme par exemple l'énergie totale d'un système mécanique idéalement conservatif.

Quelques exemples d'application

38

Etudier la stabilité de l'origine du système tridimensionnel suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} &= 2y(z-1) \\ \dot{y} &= -x(z-1) \\ \dot{z} &= -z^3 \end{cases}$$

...

Même problème pour cet oscillateur avec fonction d'amortissement non-linéaire:

$$\ddot{x}(t) - \varepsilon x(t)^2 \dot{x}(t) + x(t) = 0$$

...

Même problème pour le système de van der Pol, avec inversion du champ de vecteurs:

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y \\ \dot{y} &= x - \mu(1 - x^2)y \end{cases}$$

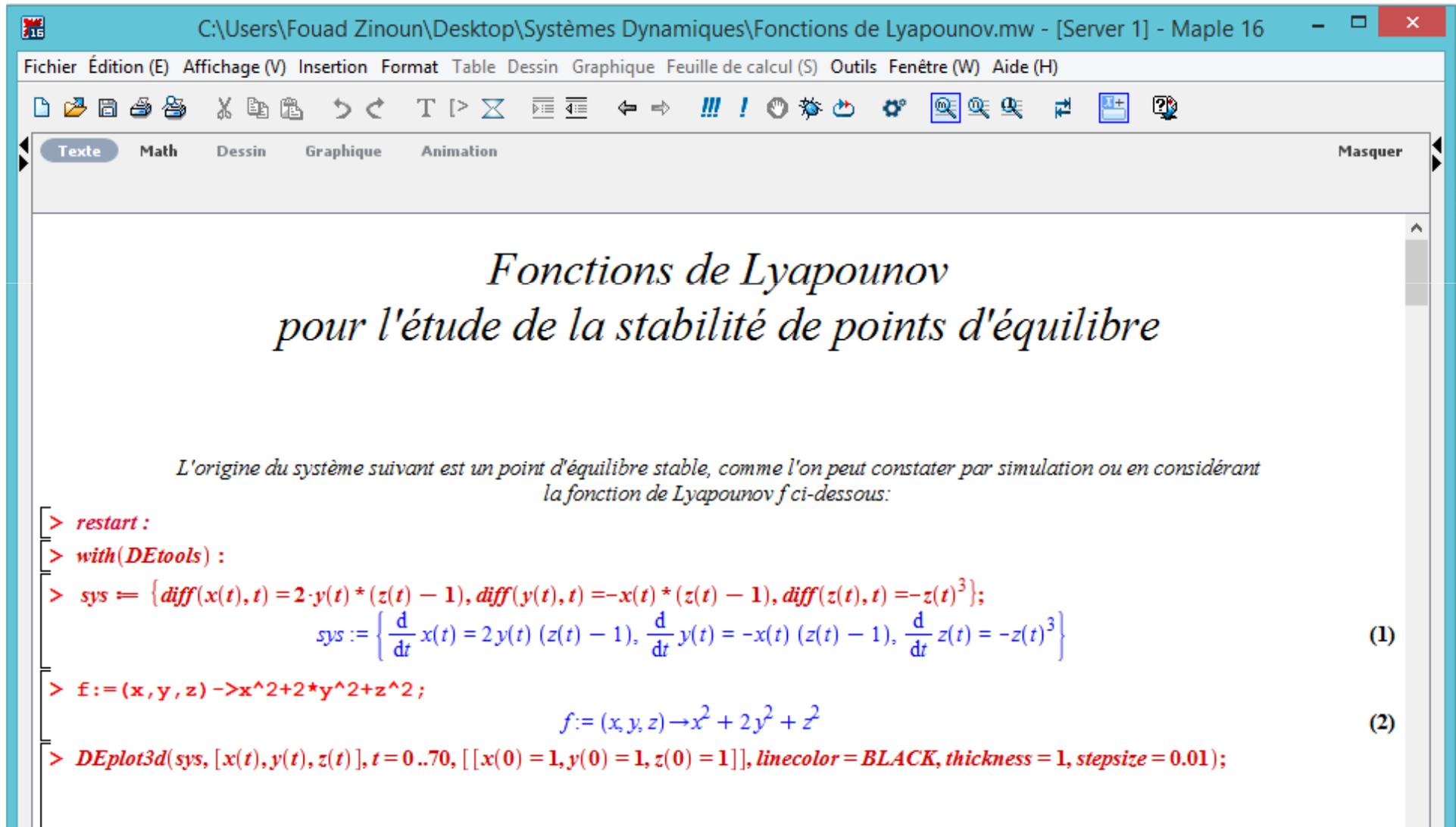
...

Même problème pour le modèle de Lotka-Volterra

$$\begin{cases} \dot{x} & = & ax - bxy \\ \dot{y} & = & -cy + dxy \end{cases}$$

Simulations Maple ..

42



C:\Users\Fouad Zinoun\Desktop\Systèmes Dynamiques\Fonctions de Lyapounov.mw - [Server 1] - Maple 16

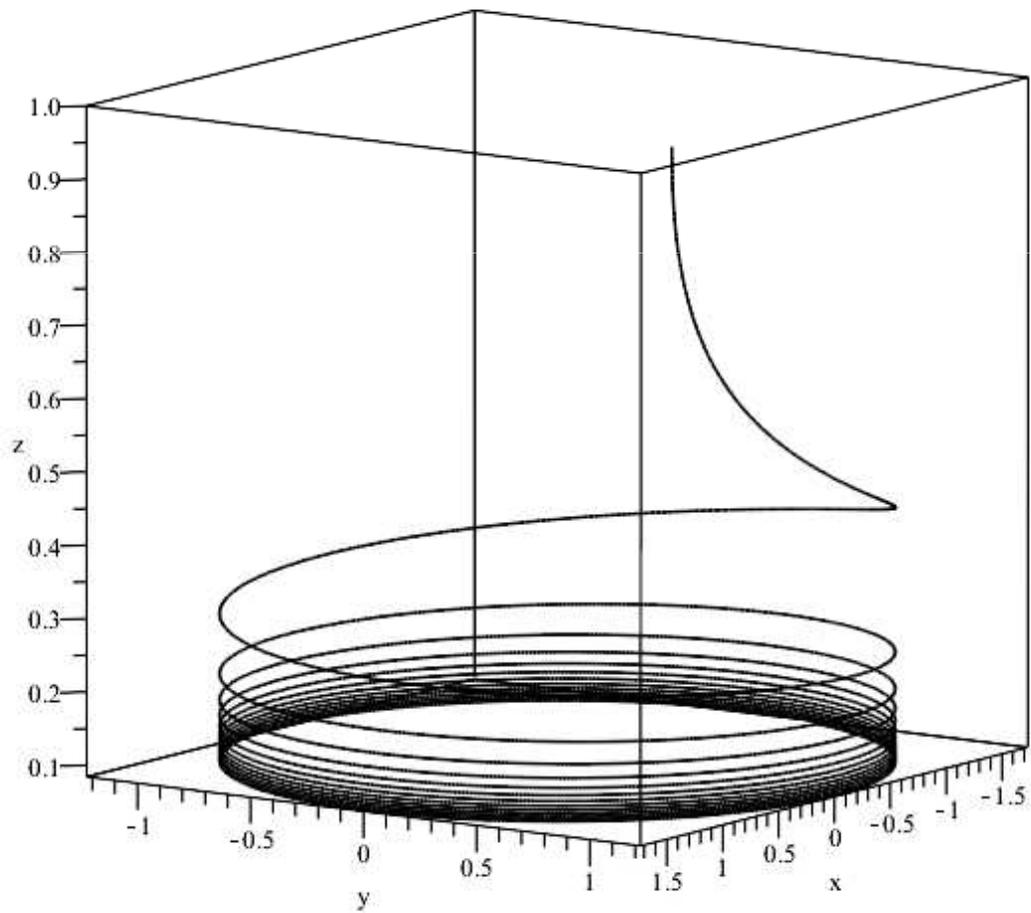
Fichier Édition (E) Affichage (V) Insertion Format Table Dessin Graphique Feuille de calcul (S) Outils Fenêtre (W) Aide (H)

Texte Math Dessin Graphique Animation Masquer

Fonctions de Lyapounov pour l'étude de la stabilité de points d'équilibre

L'origine du système suivant est un point d'équilibre stable, comme l'on peut constater par simulation ou en considérant la fonction de Lyapounov f ci-dessous:

```
> restart :  
> with(DEtools) :  
> sys := {diff(x(t), t) = 2*y(t)*(z(t) - 1), diff(y(t), t) = -x(t)*(z(t) - 1), diff(z(t), t) = -z(t)^3};  
           sys := {  $\frac{d}{dt} x(t) = 2y(t)(z(t) - 1), \frac{d}{dt} y(t) = -x(t)(z(t) - 1), \frac{d}{dt} z(t) = -z(t)^3$  } (1)  
> f := (x, y, z) -> x^2 + 2*y^2 + z^2;  
           f := (x, y, z) ->  $x^2 + 2y^2 + z^2$  (2)  
> DEplot3d(sys, [x(t), y(t), z(t)], t = 0..70, [[x(0) = 1, y(0) = 1, z(0) = 1]], linecolor = BLACK, thickness = 1, stepsize = 0.01);
```





Texte Math Dessin Graphique Animation

Masquer

Maple Plot

Times New Roman

12

B *I* U



Pour cet oscillateur avec amortissement, l'origine est stable pour $\epsilon = 0$, asymptotiquement stable si $\epsilon < 0$, instable sinon:

```
> with(DEtools):
```

```
> sys := {diff(x(t), t) = y(t), diff(y(t), t) = -x(t) + epsilon * x^2 * y};
```

$$\text{sys} := \left\{ \frac{d}{dt} x(t) = y(t), \frac{d}{dt} y(t) = -x(t) + \epsilon x^2 y \right\} \quad (3)$$

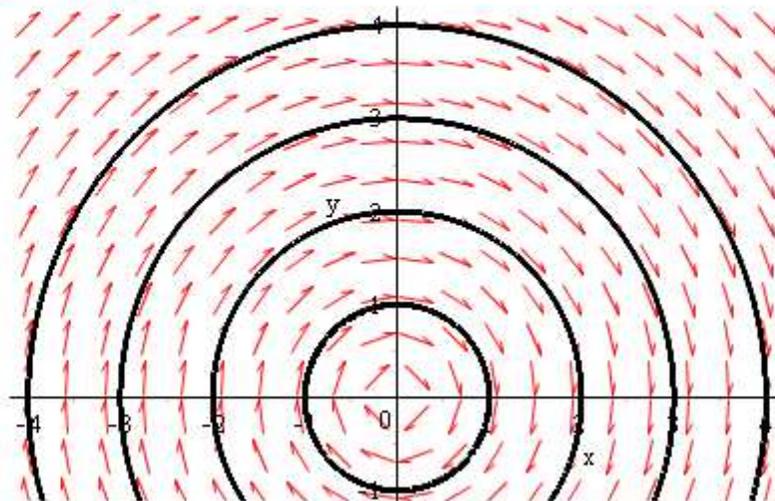
```
> f := (x, y) -> 1/2 * (x^2 + y^2);
```

$$f := (x, y) \rightarrow \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} y^2 \quad (4)$$

```
> epsilon := 0;
```

$$\epsilon := 0 \quad (5)$$

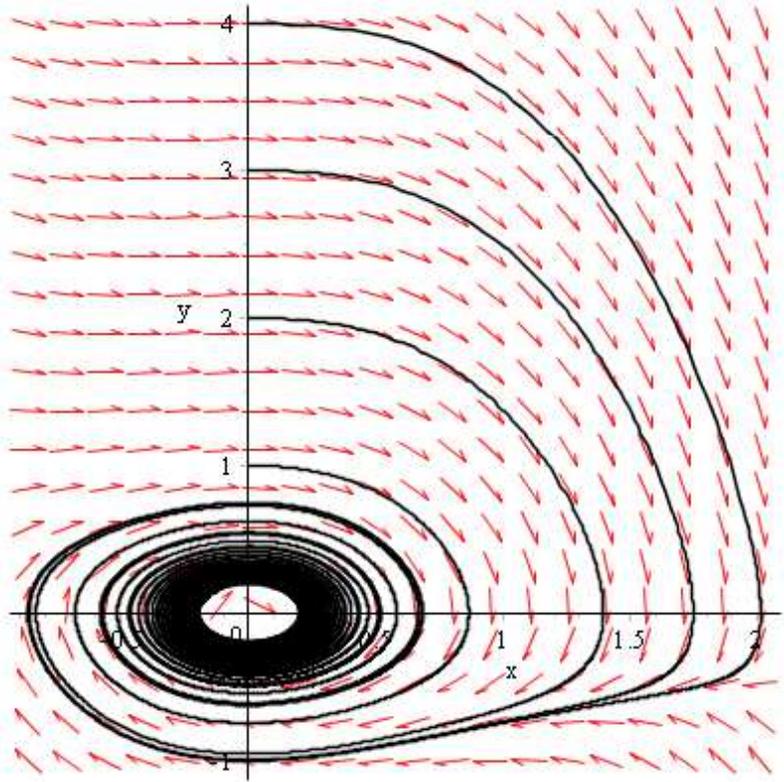
```
> phaseportrait(sys, [x(t), y(t)], t = 0..30, [[x(0) = 0, y(0) = 1], [x(0) = 0, y(0) = 2], [x(0) = 0, y(0) = 3], [x(0) = 0, y(0) = 4], linecolor = BLACK, thickness = 1, stepsize = 0.01);
```

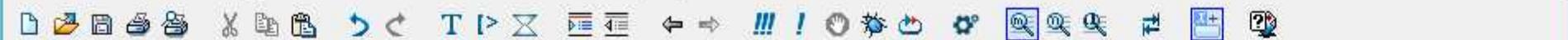




Texte **Math** Dessin Graphique Animation Masquer
2D Input Times New Roman 12 B I U

```
> epsilon:=-1;
                                     ε:=-1 (6)
> phaseportrait(sys, [x(t), y(t)], t = 0 .. 100, [[x(0) = 0, y(0) = 1], [x(0) = 0, y(0) = 2], [x(0) = 0, y(0) = 3], [x(0) = 0, y(0) = 4]], linecolor = BLACK, thickness = 1, stepsize = 0.1e-1)
;
```





Texte Math Dessin Graphique Animation Masquer

Text Times New Roman 12 B I U

En inversant le champ de vecteurs, on montre que l'origine en tant qu'équilibre de l'équation de van der Pol est instable, et ce en considérant la fonction de Lyapounov ci-dessous, dont la dérivée de Lie est strictement négative pour $|x| < 1$:

> sys := {diff(x(t),t)=-y(t), diff(y(t),t)=x(t)-mu*(1-x(t)^2)*y(t)};

$$\text{sys} := \left\{ \frac{d}{dt} y(t) = x(t) - \mu (1 - x(t)^2) y(t), \frac{d}{dt} x(t) = -y(t) \right\} \tag{8}$$

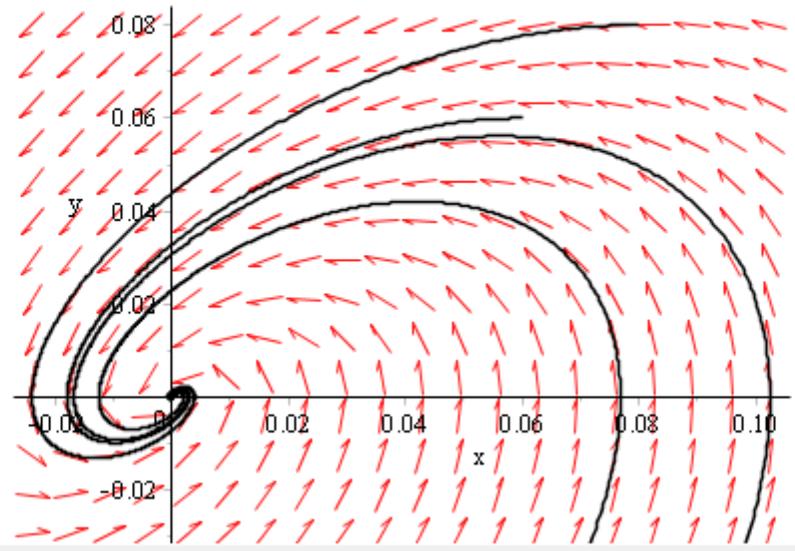
> f:=(x,y)->x^2+y^2;

$$f := (x, y) \rightarrow x^2 + y^2 \tag{9}$$

> mu := 1;

$$\mu := 1 \tag{10}$$

> phaseportrait(sys, [x(t), y(t)], t = 0 .. 30, [[x(0) = 0.08, y(0) = 0.08],[x(0) = 0.08, y(0) = -0.08],[x(0) = 0.06, y(0) = 0.06],[x(0) = 0.06, y(0) = -0.06]], linecolor = BLACK, thickness = 1, stepsize = 0.1e-1);



C:\Users\Fouad Zinoun\Desktop\Systèmes Dynamiques\Fonctions de Lyapounov.mw* - [Server 1] - Maple 16

Fichier Édition (E) Affichage (V) Insertion Format Table Dessin Graphique Feuille de calcul (S) Outils Fenêtre (W) Aide (H)

Texte Math Dessin Graphique Animation Masquer

C Text Times New Roman 16 B I U

*Pour le modèle de Lotka-Volterra, on peut vérifier que la dérivée de Lie de la fonction H ci-dessous s'annule le long de toute solution vérifiant $x(0) > 0$ et $y(0) > 0$.
Le point d'équilibre $(d/c, a/b)$ est alors stable:*

$$\begin{aligned} > \text{eq1} &:= \text{diff}(x(t), t) = x(t) \cdot (a - b \cdot y(t)); \text{eq2} := \text{diff}(y(t), t) = y(t) \cdot (-c + d \cdot x(t)); \\ & \text{eq1} := \frac{d}{dt} x(t) = x(t) (a - b y(t)) \\ & \text{eq2} := \frac{d}{dt} y(t) = y(t) (-c + d x(t)) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} > H := (x, y) \rightarrow c \cdot \ln(x) + a \cdot \ln(y) - d \cdot x - b \cdot y; \\ & H := (x, y) \rightarrow c \ln(x) + a \ln(y) - dx - by \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} > \text{diff}(H, x) \cdot x \cdot (a - b \cdot y) + \text{diff}(H, y) \cdot y \cdot (-c + d \cdot x); \\ & 0 \end{aligned} \quad (13)$$

Lorsque la question de stabilité se ramène à un problème d'optimisation ...

48

Champs de gradient

$$\dot{x} = -\text{grad } V(x)$$

Les points critiques (resp. les minima isolés) x_0 de la fonction V sont les points d'équilibre (resp. les points d'équilibre asymptotiquement stables) du système gradient,

$$\Gamma(x) = V(x) - V(x_0)$$

étant une fonction de Lyapounov stricte au voisinage de x_0 .

C:\Users\Fouad Zinoun\Desktop\Systèmes Dynamiques\Fonctions de Lyapounov.mw* - [Server 1] - Maple 16

Fichier Édition (E) Affichage (V) Insertion Format Table Dessin Graphique Feuille de calcul (S) Outils Fenêtre (W) Aide (H)

Texte **Math** Dessin Graphique Animation Masquer

2D Input Times New Roman 12 **B** *I* U        

Dans l'exemple du système gradient suivant, on voit clairement que les minima isolés du potentiel V correspondent aux points d'équilibre asymptotiquement stables du champ de vecteurs qui en dérive:

```

> V := (x,y) -> x^2 * (x-1)^2 + y^2;

```

$$V := (x, y) \rightarrow x^2 (x-1)^2 + y^2 \quad (15)$$

```

> with(VectorCalculus):
  f := (x,y) -> -Gradient(V(x,y), [x,y]);

```

$$f := (x, y) \rightarrow \text{VectorCalculus:-}\nabla\text{-(VectorCalculus:-Gradient(V(x,y), [x,y]))} \quad (16)$$

```

> f(x,y);

```

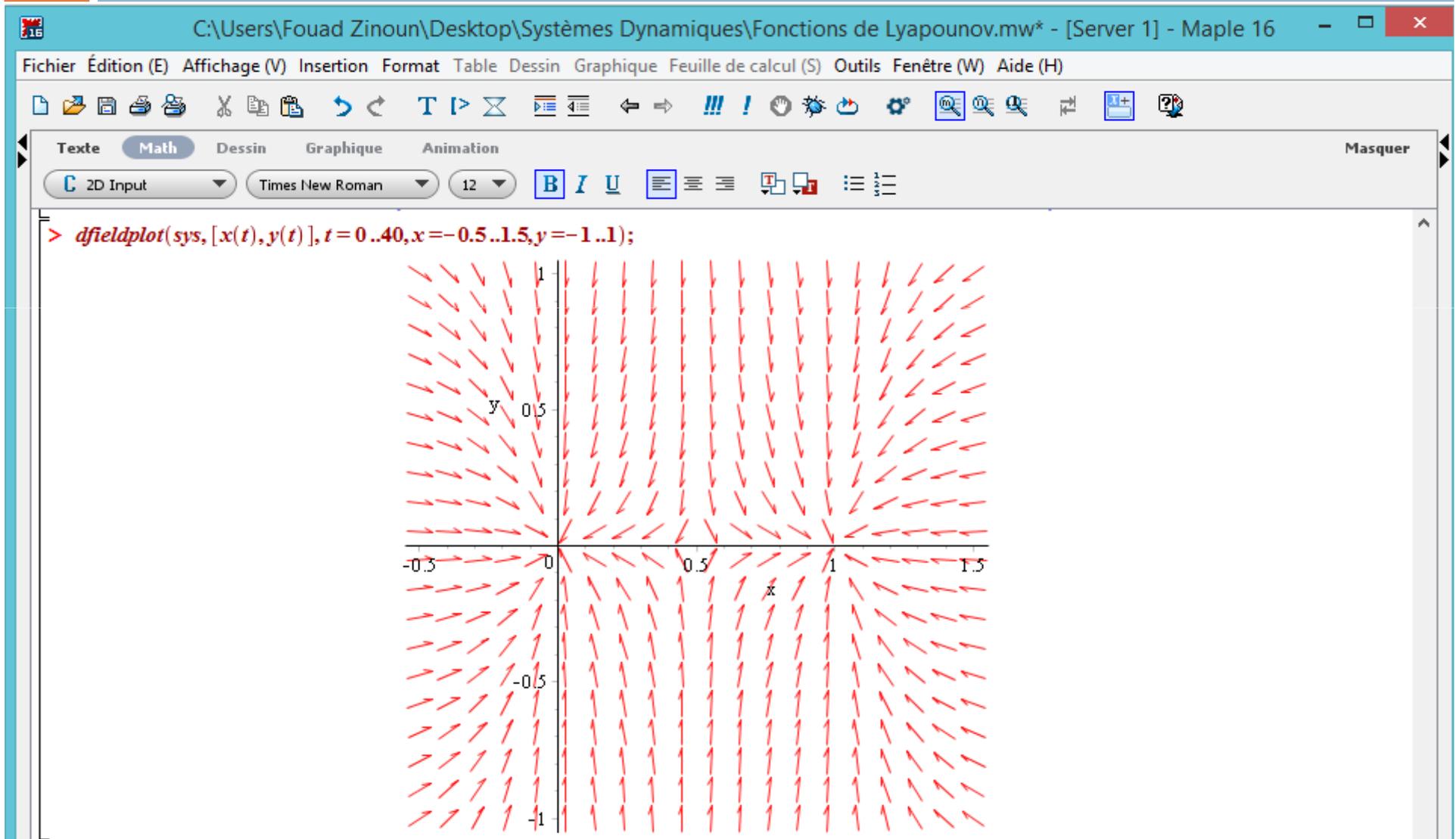
$$(-2x(x-1)^2 - 2x^2(x-1))\mathbf{e}_x - 2y\mathbf{e}_y \quad (17)$$

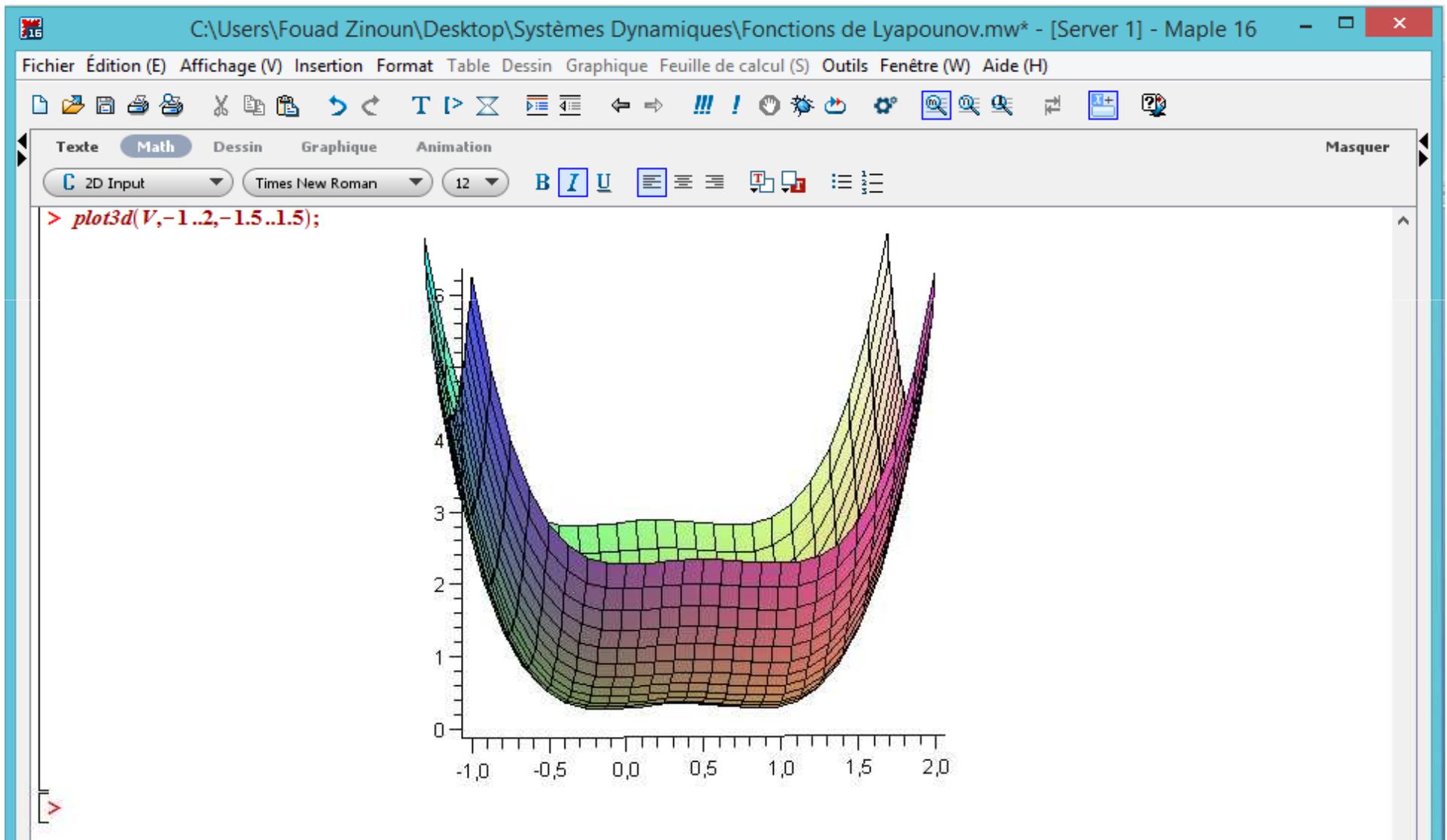
```

> sys := {diff(x(t), t) = -2x(t) * (x(t)-1)^2 - 2x(t)^2 * (x(t)-1), diff(y(t), t) = -2*y(t)};

```

$$\text{sys} := \left\{ \frac{d}{dt} y(t) = -2y(t), \frac{d}{dt} x(t) = -2x(t) (x(t) - 1)^2 - 2x(t)^2 (x(t) - 1) \right\} \quad (18)$$





Linéarisation

Matrice jacobienne

52

Comme approche préliminaire pour une étude qualitative au voisinage de positions d'équilibre x_0 , le système non linéaire (1) est approché par le système linéaire

$$\dot{x} = L(x - x_0)$$

où L est la matrice jacobienne de f au point x_0 , donnée par

$$L = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

négligeant ainsi les termes de degrés supérieurs dans le développement de f au $\mathcal{V}(x_0)$.

C'est la linéarisation.

Pour simplifier, on peut toujours ramener x_0 à l'origine via la translation

$$y := x - x_0$$

obtenant ainsi le système linéaire

$$\dot{y} = Ly \quad (2)$$

à étudier au voisinage de l'origine.

Remarquer que si L est non singulière, l'origine est le seul point d'équilibre du système (2).

Du système (2) vers le système (1)

54

Problèmes à résoudre:

- Trouver la solution générale de (2);
- Etudier la nature du point d'équilibre;
- A-t-on $(1) \underset{0}{\sim} (2)$?

Solution générale du système (2)

55

Le système linéaire

$$\dot{y} = Ly \quad (2)$$

où $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, a ses solutions maximales définies sur \mathbb{R} et la solution prenant la valeur $y_0 \in \mathbb{R}^n$ en $t = 0$ est donnée par

$$y(t) = e^{tL}y_0$$

e^{tL} étant la matrice obtenue de la série (normalement convergente)

$$e^{tL} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tL)^k}{k!}$$

Quelques propriétés de l'exponentielle

56

- $e^0 := I_n$ (par convention);
- $e^{(L+M)} = e^L \cdot e^M$ si $LM = ML$;
- e^L est toujours inversible avec $(e^L)^{-1} = e^{-L}$ et donc

$$\exp(M_n(\mathbb{K})) \subset \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \quad K = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C};$$

- $e^{L^t} = (e^L)^t$ et donc $\exp(S_n) \subset S_n$;
- $e^{P^{-1}LP} = P^{-1}e^L P$:

deux matrices semblables ont des exponentielles semblables;

- $\exp(\text{diag}(\lambda_i)_i) = \text{diag}(e^{\lambda_i})_i$;
- $\exists P_L \in \mathbb{K}[X]$ tq $e^L = P_L(L)$,
en particulier L et e^L commutent;
- $\text{Sp}(e^L) = \text{''exp}(\text{Sp}(L))\text{''}$;
- $\det(e^L) = e^{\text{tr}(L)}$;
- Si \mathcal{X}_L est scindé, alors
 L diagonalisable $\iff e^L$ diagonalisable;
- $e^L = I_n \iff L$ diagonalisable et $\text{Sp}(L) \subset 2i\pi\mathbb{Z}$;
- L'application $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{GL}_n(\mathbb{C})$ est surjective
non nécessairement injective;
- $\exp : \underset{\text{(nilpotentes)}}{\mathcal{M}_n(\mathbb{C})} \longrightarrow \underset{\text{(unipotentes)}}{\mathcal{GL}_n(\mathbb{C})}$ est un homéomorphisme avec

$$\exp^{-1}(L) := \log(L) = \sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} \frac{(L - I_n)^k}{k};$$

- $\exp(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = \{L^2, L \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})\}$.

Calcul de l'exponentielle d'une matrice

57

$$\begin{aligned} e^L &= e^{S+N} \text{ avec } S \text{ semisimple, } N \text{ nilpotente et } SN = NS, \\ &= e^S \underbrace{e^N}_{\text{somme finie}} \\ &= (P e^{\text{diag}(\lambda_i)_i} P^{-1}) e^N \\ &= (P \text{diag}(e^{\lambda_i})_i P^{-1}) e^N \end{aligned}$$

Problème sous-jacent: calcul explicite des valeurs propres.

Calcul de l'exponentielle d'une matrice sur Maple

58

Fichier Édition (E) Affichage (V) Historique Aide (H)

Rechercher pour: Sujet Texte

exp Rechercher

Ressources: Tout

Table des matières Résultats de la recherche

- parameter_classes (expected)
- maynotworkasexpected (expected)
- Finance,ExpectedShortfall (expectedshortfall)
- Finance,ExpectedValue (expectedvalue)
- Statistics,ExpectedValue (expectedvalue)
- parameter_modifiers (expects)
- StringTools,Explode (explode)
- Explore (explore)
- Statistics,ExponentialFit (exponentialfit)
- LinearAlgebra,MatrixExponential (exponentialmatrix)**
- Statistics,ExponentialSmoothing (exponentialsmoothing)
- Task,MatrixExponentiation (exponentiation)
- Task,SecondDerivativeTest (exponentiation)
- ExcelTools,Export (export)
- Logic,Export (export)
- MathML,ExportContent (export)
- worksheet,managing,OptionsDialogExport (export)
- GraphTheory,ImportGraph (exportgraph)
- ImportMatrix (exportmatrix)
- ImportVector (exportvector)
- worksheet,managing,OptionsDialogDisplay (exposeco)
- padic,functions (expp)
- worksheet,expressions,clickblemath (expression)
- worksheet,plotinterface,dragndrop (expression)
- worksheet,plotinterface,plotexp (expression,plotting)
- worksheet,expressions,activeinert (expressions)
- worksheet,expressions,copypaste (expressions)
- worksheet,expressions,cutpaste (expressions)
- worksheet,expressions,entering (expressions)
- worksheet,expressions,manipulation (expressions)
- worksheet,expressions,moveexpression (expressions)
- worksheet,expressions,manipulatecsm (expressions,n)
- OpenMaple Java Export (express)

Exemples

```
> with(LinearAlgebra) ;
```

```
> A := Matrix([[ -13, -10], [21, 16]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} -13 & -10 \\ 21 & 16 \end{bmatrix} \quad (1)$$

```
> MatrixExponential(A) ;
```

$$\begin{bmatrix} 15 e - 14 e^2 & -10 e^2 + 10 e \\ 21 e^2 - 21 e & -14 e + 15 e^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

```
> MatrixExponential(A, x) ;
```

$$\begin{bmatrix} 15 e^x - 14 e^{2x} & -10 e^{2x} + 10 e^x \\ 21 e^{2x} - 21 e^x & -14 e^x + 15 e^{2x} \end{bmatrix} \quad (3)$$

```
> MatrixExponential(A, -x) ;
```

$$\begin{bmatrix} 15 e^{-x} - 14 e^{-2x} & -10 e^{-2x} + 10 e^{-x} \\ 21 e^{-2x} - 21 e^{-x} & -14 e^{-x} + 15 e^{-2x} \end{bmatrix} \quad (4)$$

```
> A := Matrix([[ -3.0, -1.0], [2.0, 6.0]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} -3.0 & -1.0 \\ 2.0 & 6.0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

```
> MatrixExponential(A, readonly) ;
```

$$\begin{bmatrix} -8.50653632644480 & -37.5839622686157 \\ 75.1679245372313 & 329.749124091096 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Stabilité dans le cas linéaire

Rôle des valeurs propres

59

Considérons le système linéaire (2) où $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice non singulière.

a) Si $\operatorname{Re} \lambda < 0 \quad \forall \lambda \in \operatorname{Sp}(L)$, alors pour toute condition initiale $y(0) = y_0$,

$$\|y(t)\| \leq c \|y_0\| e^{-\mu t} \quad \text{pour des } c, \mu \geq 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = 0$$

b) Si $\operatorname{Re} \lambda \leq 0 \quad \forall \lambda \in \operatorname{Sp}(L)$, où les λ à partie réelle nulle sont distinctes, alors pour toute condition initiale $y(0) = y_0$, $y(t)$ est bornée pour $t \geq 0$.

Explicitement:

$$\|y(t)\| \leq c \|y_0\| \quad \text{pour un } c \geq 0$$

c) S'il existe une valeur propre λ tq $\operatorname{Re} \lambda > 0$, alors dans tout voisinage de l'origine, il existe des conditions initiales pour lesquelles les solutions vérifient

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|y(t)\| = +\infty$$

Dans le cas a), l'origine est exponentiellement stable; dans le cas b), il est stable au sens de Lyapounov et dans le cas c) instable.

Exercice

60

Etudier la stabilité de l'origine du système linéaire suivant,
 a étant un paramètre réel:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= y_1 - ay_2 \\ \dot{y}_2 &= 4y_1 - 3y_2 \end{cases}$$

Critères de stabilité

Polynômes de Hurwitz

61

Un polynôme à coefficients réels est dit de Hurwitz si toutes ces racines sont à partie réelle strictement négative. Le critère algébrique de Routh-Hurwitz permet alors de tester cette propriété pour un polynôme, et ce sans expliciter ses racines:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Une condition nécessaire est que tous les coefficients a_k soient non nuls et de même signe. Une condition nécessaire et suffisante est que tous les coefficients de la première colonne du tableau de Routh-Hurwitz (voir ci-après) soient non nuls et de même signe. Si tel n'est pas le cas, le nombre de changements de signe correspond au nombre de racines à partie réelle positive.

Critère analytique de Routh-Hurwitz

62

$$\begin{array}{cccccc}
 x^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & 0 \\
 x^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & 0 \\
 x^{n-2} & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & 0 \\
 x^{n-3} & y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & 0 \\
 x & \cdots & \cdots & 0 & & \\
 1 & \cdots & 0 & & &
 \end{array}$$

où l'on a

$$x_1 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, \quad x_2 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}, \quad x_3 = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-6} \\ a_{n-1} & a_{n-7} \end{vmatrix}, \quad \text{etc.}$$

$$y_1 = -\frac{1}{x_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix}, \quad y_2 = -\frac{1}{x_1} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ x_1 & x_3 \end{vmatrix}, \quad \text{etc.}$$

Exemple

63

Compte tenu du principe de calcul des coefficients basé sur les déterminants, chaque ligne se termine par un 0 qui se décale vers la gauche au fur et à mesure du remplissage du tableau.

Exemple:

$$P(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1$$

$$\begin{array}{ccccc} x^3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ x^2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ x & \frac{5}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Les racines de P sont alors à partie réelle < 0 .

Le package “DynamicSystems” et la commande “RouthTable”

64

Aide Maple 16 - [DynamicSystems,RouthTable]

Fichier Édition (E) Affichage (V) Historique Aide (H)

Rechercher pour: Sujet Texte
RouthTable Rechercher

Ressources: Tout

Table des matières
Résultats de la recherche
..... [?] DynamicSystems,RouthTable (

Examples

```
> with(DynamicSystems) :  
> p := (s^2 + 1)*(s^2 - 1)*(s + 2) :  
> RouthTable(p, s) ;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & s^3 \\ 2 & 0 & -2 & s^4 \\ 8 & 0 & 0 & [s^3] \\ 2 & -2 & 0 & s^2 \\ 8 & 0 & 0 & s \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

There is one sign change in the first column; therefore, there is one root in the open RHP. The $[s^3]$ indicates a degenerate polynomial. Consequently, there might be roots on the imaginary axis. Check the open LHP.

```
> RouthTable(p, s, left) ;
```

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & s^3 \\ -2 & 0 & 2 & s^4 \\ -8 & 0 & 0 & [s^3] \\ -2 & 2 & 0 & s^2 \\ -8 & 0 & 0 & s \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

There are two sign changes in the first column; therefore, there are two roots in the open LHP. Together with the previously determined one root in the RHP, this accounts for three roots of this polynomial of degree five, leaving two roots on the imaginary axis.

Critère graphique : Principe de l'argument (ou théorème de Cauchy)

65

Soient C un contour simple fermé parcouru dans le sens direct et f une fonction rationnelle de la variable complexe z , analytique sur le domaine fermé délimité par C , sauf éventuellement en un nombre fini de pôles à l'intérieur de C , la fonction f ne s'annulant pas sur C . Alors, la variation de l'argument de $f(z)$ est donnée par

$$\Delta \arg f(z) = (Z - P) 2\pi$$

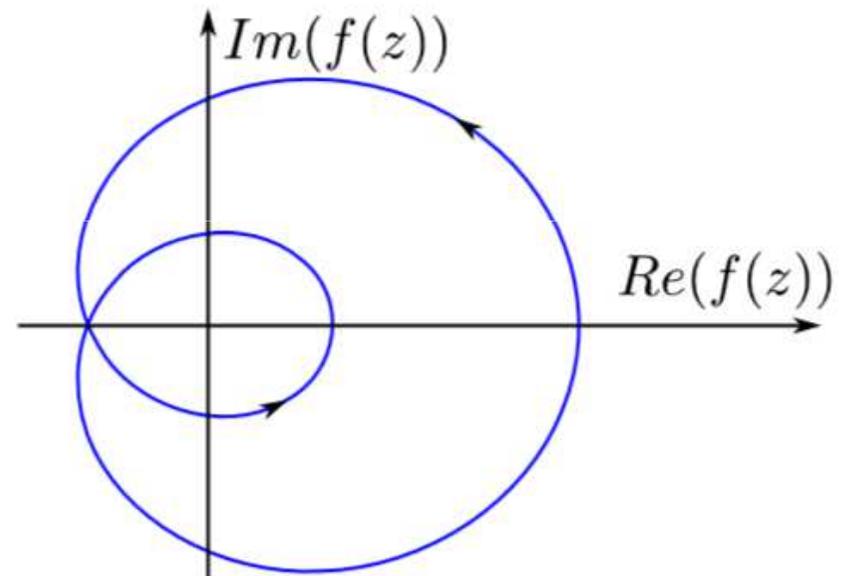
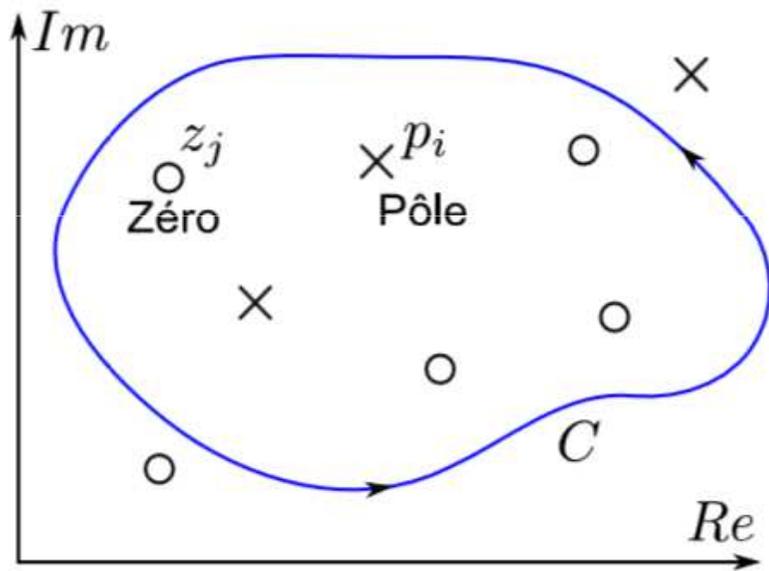
Z et P étant respectivement le nombre de zéros et celui de pôles de f à l'intérieur de C , en comptant leur multiplicité.

En d'autres termes, si l'on fait parcourir au point d'affixe z un contour fermé C dans le plan, le point d'affixe $f(z)$ décrit une courbe fermée qui tourne autour de (encercle) l'origine un nombre N de fois tel que

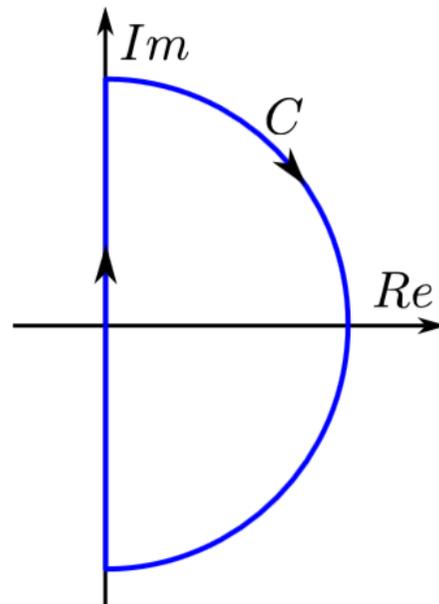
$$N = Z - P$$

La forme de la courbe image donne donc une indication graphique sur le nombre de zéros et de pôles de la fonction.

Illustration



Dans le cas hyperbolique, c.-à-d. lorsque $Sp(L) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ (voir plus loin), le *contour de Bromwich* couvrant le demi-plan réel positif (le demi-cercle étant de rayon infiniment grand) peut s'avérer intéressant lors de la recherche d'éventuelles valeurs propres "déstabilisantes": Si la courbe image par le polynôme caractéristique ne fait aucun tour autour de l'origine, celui-ci en tant que point d'équilibre est asymptotiquement stable, sinon il est instable.



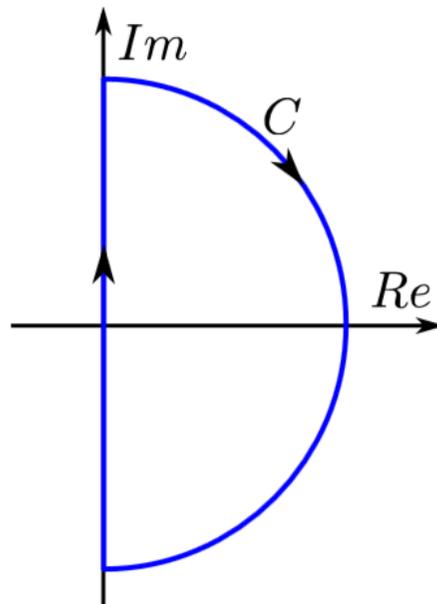
Comment pratiquement choisir le rayon du contour de Bromwich ?

68

Puisque $sp(L)$ est contenu largement dans le disque $D(O, \rho(L))$, $\rho(L)$ étant le rayon spectral de L dont l'une des caractéristiques est donnée par

$$\rho(L) = \inf_{\|\cdot\|} \|L\|$$

alors on peut choisir pour rayon toute expression de la forme $\|L\| + \varepsilon$, $\|\cdot\|$ étant une norme matricielle quelconque et $\varepsilon > 0$ garantissant l'inclusion stricte du spectre dans le disque.



Classification des points d'équilibre des systèmes linéaires dans le plan

69

Considérons le système

$$\dot{y} = Ly \quad (2)$$

obtenu après linéarisation (et “translation vers l’origine”) du système (1) au voisinage d’un point d’équilibre.

Remarquer qu’en principe, L peut être réduite à une forme (normale) de Jordan via un changement de coordonnées linéaire, éventuellement complexe. On suppose donc que c’est déjà fait:

$$L := J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

Nous avons vu que l'étude de la stabilité de l'origine du système (2) est entièrement déterminée par les (ou, plus précisément, le signe de la partie réelle des) valeurs propres de J , du moins dans le cas non dégénéré: $0 \notin Sp(J)$. Mieux, le critère de Routh-Hurwitz (ou celui de Cauchy) permet de décider de la question de stabilité sans même expliciter ces valeurs propres.

Objectif

71

Nous allons maintenant affiner davantage cette discussion, et ce en étudiant la nature même du point d'équilibre. En d'autres termes, nous allons essayer de classifier le comportement qualitatif des solutions en son voisinage, en se limitant au cas bidimensionnel dans un souci de simplification. Encore une fois, comme nous allons voir, cette classification est entièrement menée connaissant $Sp(J)$.

Rappelons que l'on est dans le cas bidimensionnel, non dégénéré.

J est alors inversible

(le système (2) admettant l'origine comme unique point d'équilibre)
de valeurs propres non nulles $\lambda_{1,2}$ racines du polynôme caractéristique

$$\lambda^2 - \text{Tr}(J) \lambda + \det(J) = 0$$

Classification

(Extrait de l'œuvre de Poincaré où il introduit au col, au nœud, au foyer et au centre)

73

Courbes définies par une équation différentielle 1.pdf - Adobe Reader

125%



Find

Systeme topographique. — Si l'on trace sur la sphère un système de cycles et de polycycles tel, que par chacun des points de la sphère passe un cycle ou un polycycle, et un seul, excepté en quelques points singuliers par lesquels ne passe aucun cycle, nous dirons que ce système de cycles est un *système topographique*, parce qu'il est analogue au système des courbes de niveau d'un terrain.

Les points doubles des polycycles sont alors analogues aux *cols* de ce terrain, les points singuliers par lesquels ne passe aucun cycle sont analogues aux *fonds* et aux *sommets* du terrain; de sorte que nous appellerons ces divers points : *cols*, *fonds* et *sommets* du système.

Par exemple, le système des courbes

$$f(x, y) = \text{const.},$$

où f est un polynôme entier en x et en y , si ces courbes ne coupent pas l'équateur, est un système topographique. Les cols sont les points où l'on a à la fois

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} = 0, \quad \left(\frac{d^2f}{dx dy} \right)^2 - \frac{d^2f}{dx^2} \frac{d^2f}{dy^2} > 0;$$

1^{er} cas : $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ avec $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ ($\Delta = \text{Tr}(J)^2 - 4 \det(J) > 0$ et $\det(J) > 0$)
 (Cas de deux valeurs propres réelles de même signe)

Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ alors $J = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ et l'on a comme solution générale du système (2)

$$\begin{cases} y_1(t) &= y_1(0) e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) &= y_2(0) e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

Par élimination de t , on obtient

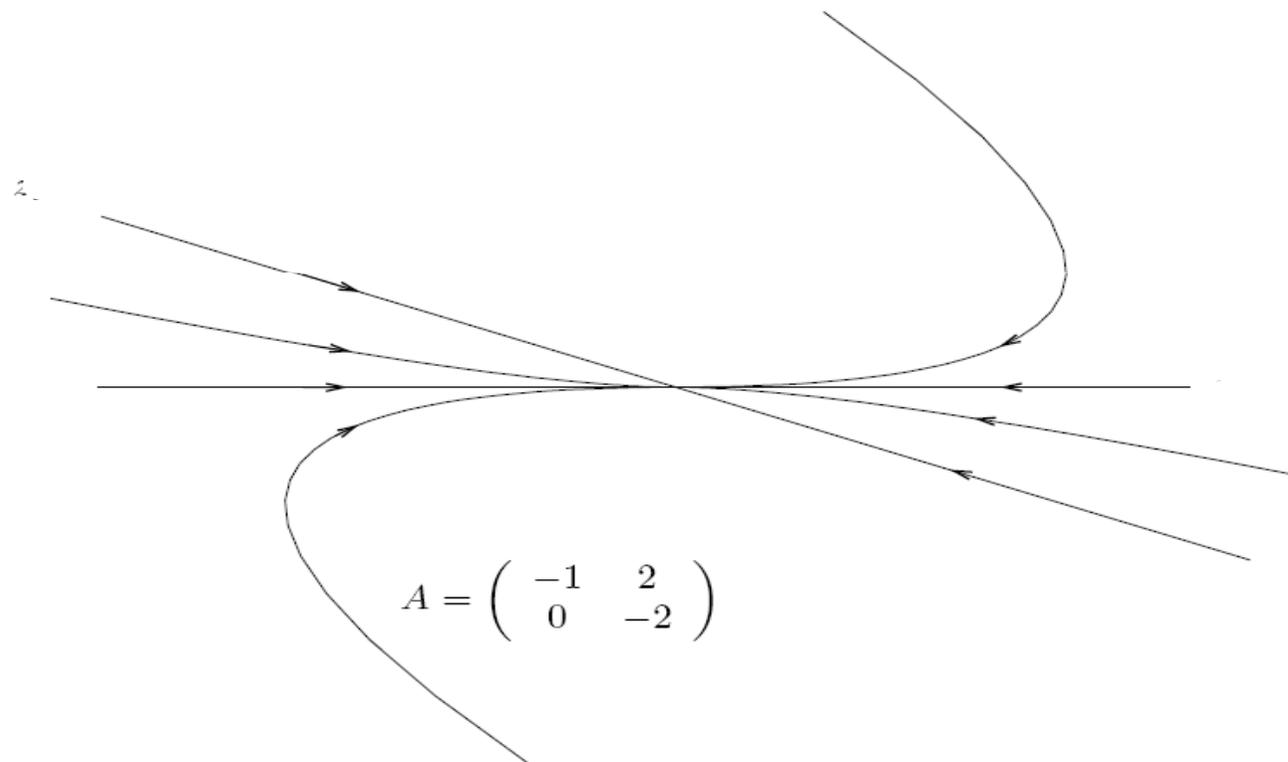
$$|y_1| = c |y_2|^{\lambda_1/\lambda_2}, \quad c \in \mathbb{R}$$

ce qui correspond à des paraboles dans le plan de phase .

L'origine dans ce cas est *un nœud*
 attractif, et donc exponentiellement stable (resp. répulsif, et donc instable)
 pour des valeurs propres négatives (resp. positives),
 les orbites tendant vers (resp. s'écartant de) l'origine (sans oscillation),
 ce qui correspond à un système dissipatif (resp. "expansif")
 à champ de vecteurs de divergence < 0 (resp. > 0).

Le nœud (illustration)

75



Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ($\Delta = 0$)
la solution générale est donnée par

$$\begin{cases} y_1(t) &= (y_1(0) + y_2(0)t) e^{\lambda t} \\ y_2(t) &= y_2(0) e^{\lambda t} \end{cases}$$

lorsque J n'est pas diagonale, et l'on a attraction ou répulsion selon que λ est négative ou positive. Il s'agit d'une *nœud impropre* (attractif ou répulsif).

Si $J = \text{diag}(\lambda)$,
la solution générale est donnée par

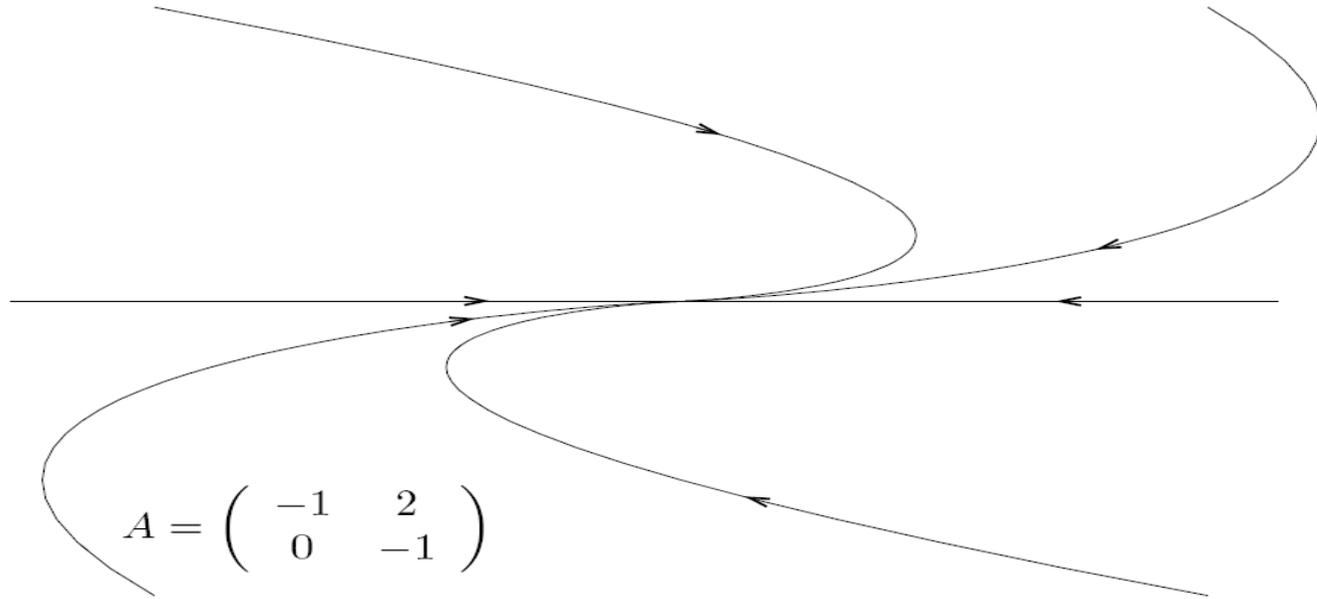
$$y(t) = y(0)e^{\lambda t}$$

les orbites dans le plan de phase. étant des demi-droites issues de / pointant vers l'origine, selon le signe de λ .

On est toujours dans le cas du nœud.

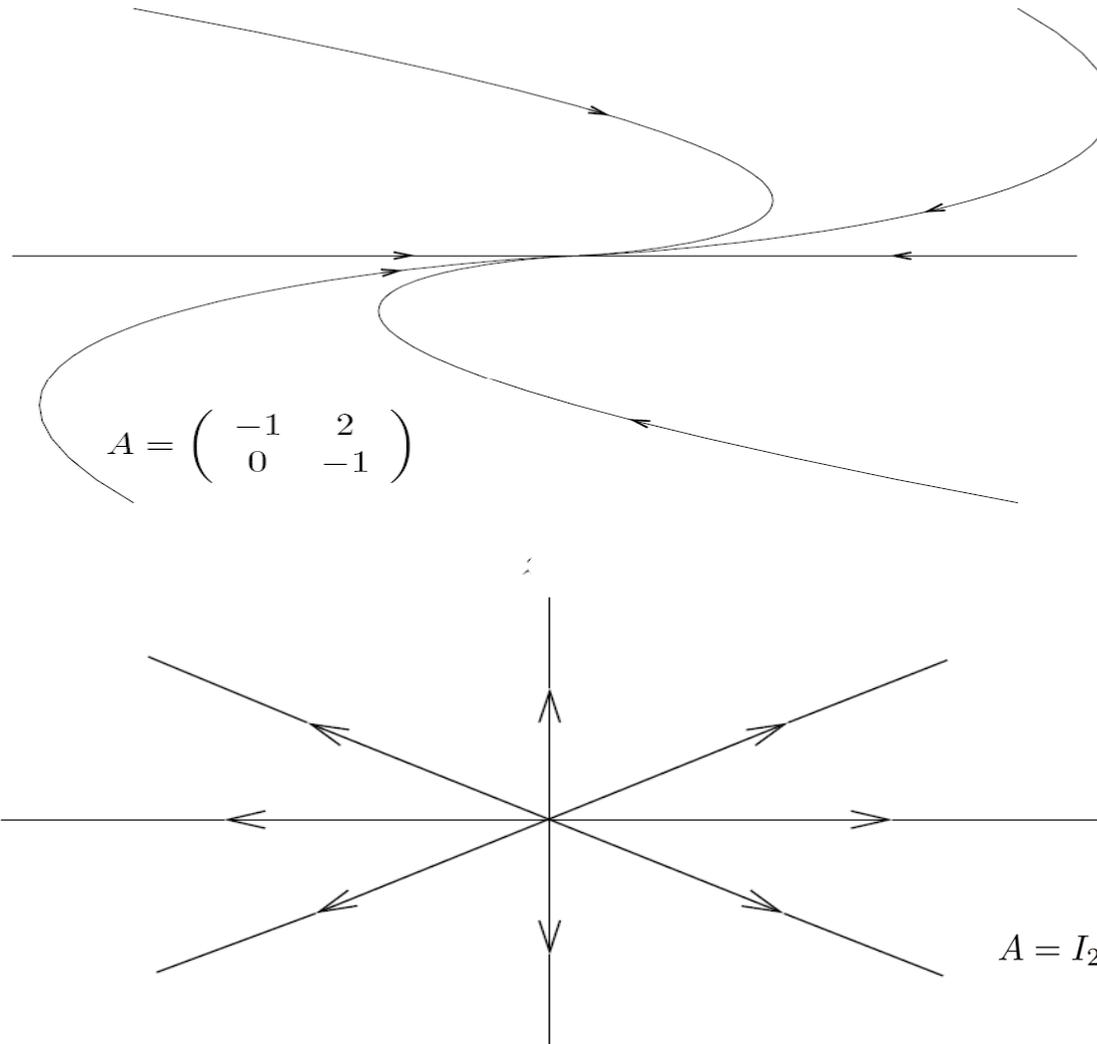
Nœud impropre (illustration)

77



Nœud impropre (illustration)

78



2^{ème} cas : $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$ avec $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ ($\Delta > 0$ et $\det(J) < 0$)
(Cas de deux valeurs propres réelles de signes contraires)

On a donc nécessairement $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et $J = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$.

La solution générale du système est donnée par

$$\begin{cases} y_1(t) &= y_1(0)e^{\lambda_1 t} \\ y_2(t) &= y_2(0)e^{\lambda_2 t} \end{cases}, \quad c_{1,2} \in \mathbb{R}$$

et les orbites associées sont définies dans le plan de phase) par

$$|y_1| = c |y_2|^{\lambda_1/\lambda_2}, \quad c \in \mathbb{R}$$

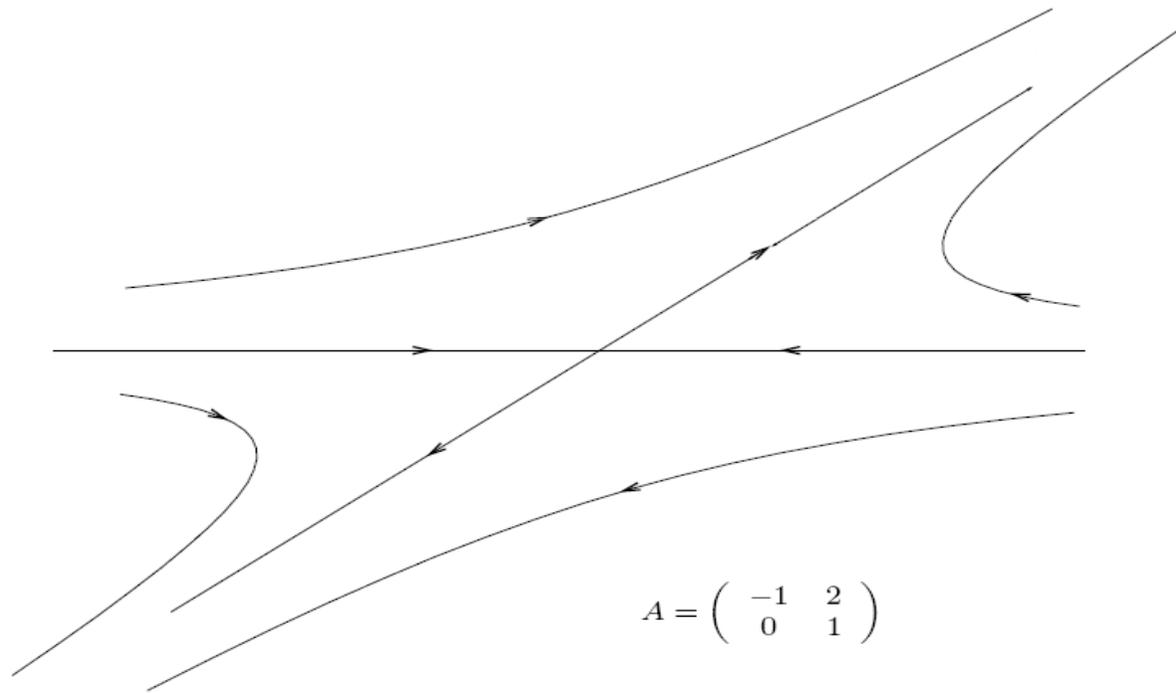
ce qui correspond à un comportement hyperbolique des solutions.

Les orbites semblent se rapprocher de l'équilibre mais
elles l'évitent et finalement s'en éloignent:

l'origine dans ce cas est *un col*.

Le col ou le point-selle (illustration)

80



Attention, un col n'est ni attractif ni répulsif.
Il est, certes, instable.

Les deux axes du repère correspondent à 5 solutions particulières:

2 solutions qui tendent vers $(0, 0)$ lorsque $t \rightarrow +\infty$
2 solutions qui tendent vers $(0, 0)$ lorsque $t \rightarrow -\infty$ } les séparatrices

et l'origine en tant que solution stationnaire.

Les 2 demi-axes $y_1 = 0$ (resp. $y_2 = 0$) correspondent aux variétés stables (resp. instables) du col.

Cas des valeurs propres complexes conjuguées

82

*3^{ème} cas : $\lambda_{1,2} = \mu \pm \omega i$ avec $\omega > 0$ ($i := \sqrt{-1}$), ($\Delta < 0$)
(Cas de deux valeurs propres complexes conjuguées)*

Dans une base appropriée, le système (2) s'écrit

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= \mu y_1 - \omega y_2 \\ \dot{y}_2 &= \omega y_1 + \mu y_2 \end{cases}$$

la solution générale étant donnée par

$$\begin{cases} y_1(t) &= (y_1(0) \cos \omega t - y_2(0) \sin \omega t) e^{\mu t} \\ y_2(t) &= (y_2(0) \cos \omega t + y_1(0) \sin \omega t) e^{\mu t} \end{cases}$$

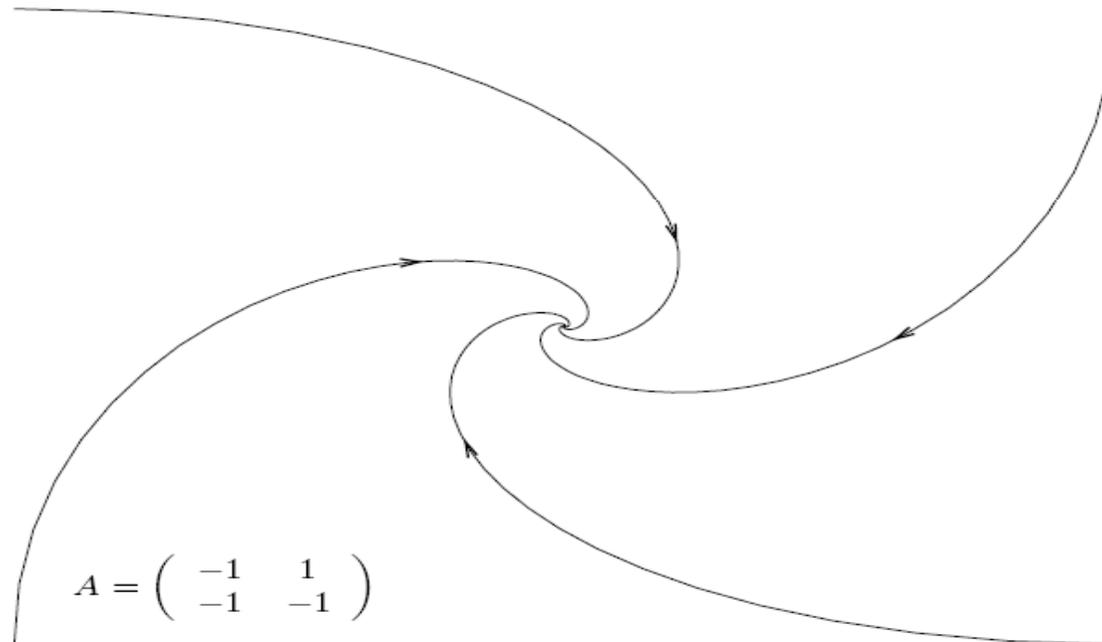
Lorsque $\mu = 0$, toutes les solutions sont périodiques de même période $2\pi/\omega$.
Les orbites dans le plan de phases sont des cercles autour de l'origine.
Celui-ci est donc stable, non attractif: c'est *un centre*.

Lorsque $\mu \neq 0$, les orbites forment des spirales
qui tendent vers (resp. s'écartant de) l'origine (avec oscillation),
selon que μ est négatif ou positif.

L'origine dans ce cas est *un foyer*,
exponentiellement stable pour $\mu < 0$, instable pour $\mu > 0$.

Le foyer (illustration)

84



Classification

Diagramme de bifurcation

85

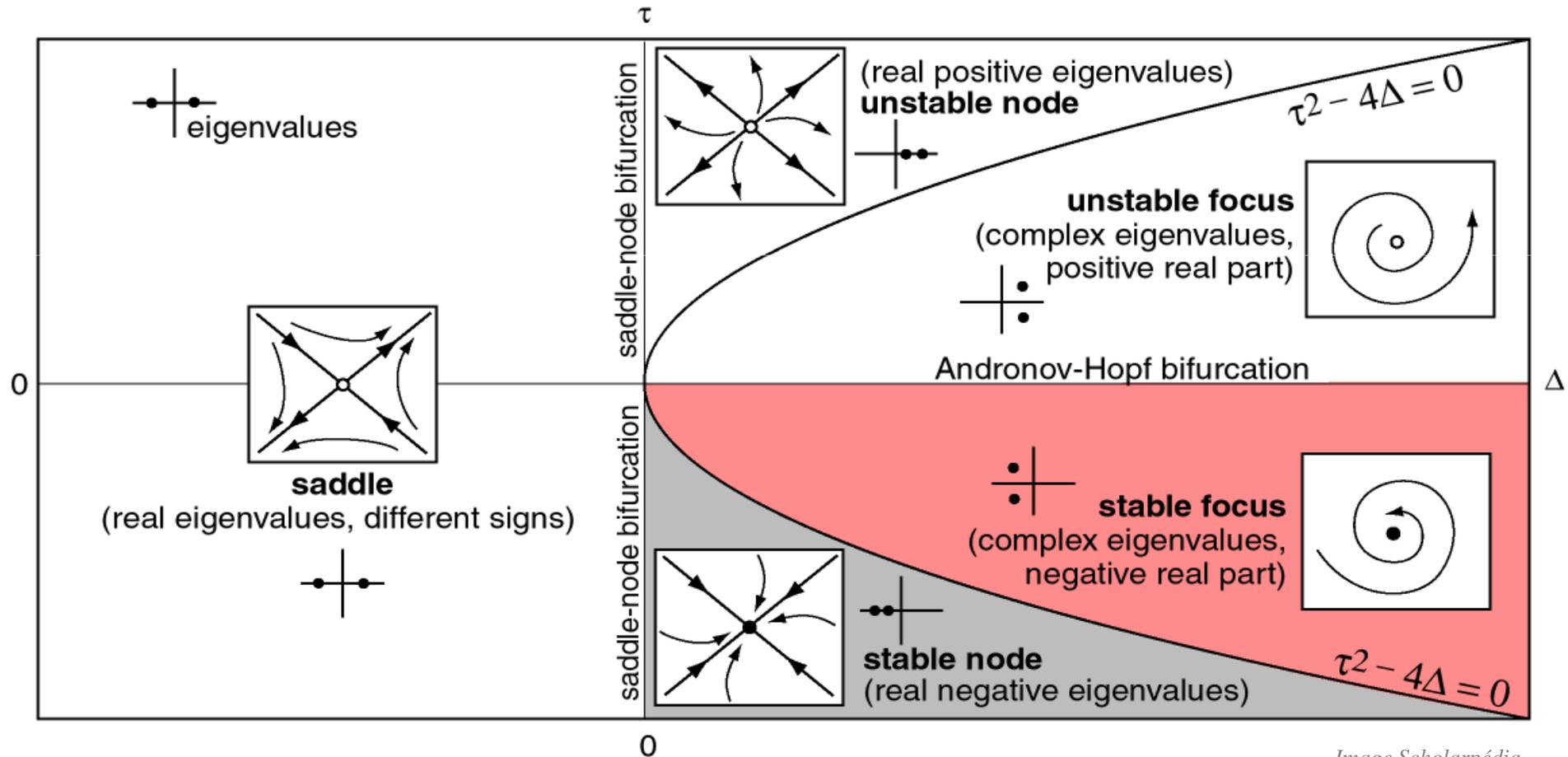


Image Scholarpédia

Quelques simulations Maple

86

C:\Users\Fouad Zinoun\Desktop\Systèmes Dynamiques\Classification 2D de points d'équilibre.mw - [Server 1] - Maple 16

Fichier Édition (E) Affichage (V) Insertion Format Table Dessin Graphique Feuille de calcul (S) Outils Fenêtre (W) Aide (H)

Texte **Math** Dessin Graphique Animation Masquer

2D Math Times New Roman 12 B I U

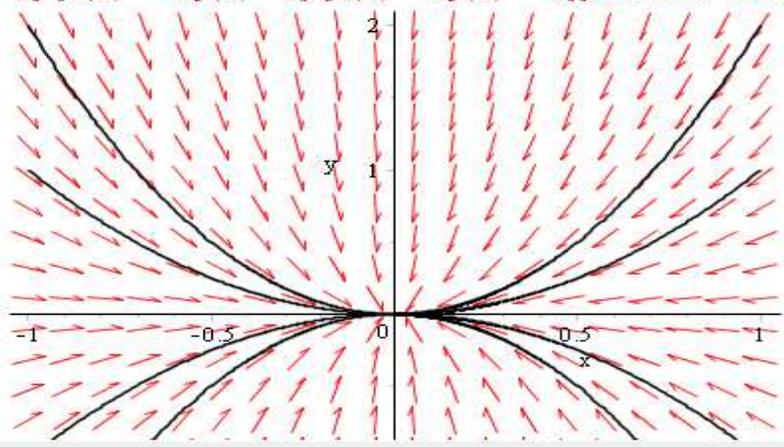
```
> restart :
> with(linalg) :
  A := array( [[ a, b ], [ c, d ] ] );
```

$$A := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (1)$$

```
> with(DEtools) :
> Le noeud :
> a := -1 : b := 0 : c := 0 : d := -2 : sys := { diff(x(t), t) = a*x(t) + b*y(t), diff(y(t), t) = c*x(t) + d*y(t) };
  sys := {  $\frac{d}{dt} y(t) = -2y(t), \frac{d}{dt} x(t) = -x(t) \}$ 
```

$$\left\{ \frac{d}{dt} y(t) = -2y(t), \frac{d}{dt} x(t) = -x(t) \right\} \quad (2)$$

```
> phaseportrait(sys, [x(t), y(t)], t = 0..10, [[x(0) = 1, y(0) = 1], [x(0) = 1, y(0) = 2], [x(0) = 1, y(0) = -2], [x(0) = -1, y(0) = 2], [x(0) = -1, y(0) = -2], [x(0) = -1, y(0) = -1], [x(0) = -1, y(0) = 1], [x(0) = 1, y(0) = -1]], linecolor = BLACK, thickness = 1, stepsize = 0.01);
```

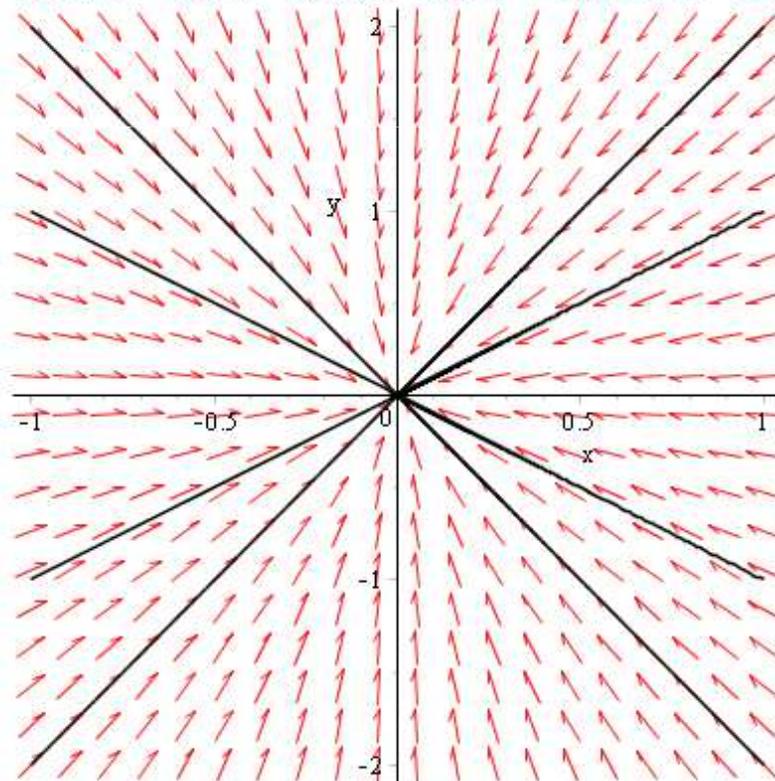




> $a = -1 : b = 0 : c = 0 : d = -1 : sys := \{diff(x(t), t) = a \cdot x(t) + b \cdot y(t), diff(y(t), t) = c \cdot x(t) + d \cdot y(t)\};$

$$sys := \left\{ \frac{d}{dt} x(t) = -x(t), \frac{d}{dt} y(t) = -y(t) \right\} \quad (4)$$

> $phaseportrait(sys, [x(t), y(t)], t = 0..10, [[x(0) = 1, y(0) = 1], [x(0) = 1, y(0) = 2], [x(0) = 1, y(0) = -2], [x(0) = -1, y(0) = 2], [x(0) = -1, y(0) = -2], [x(0) = -1, y(0) = -1], [x(0) = -1, y(0) = 1], [x(0) = 1, y(0) = -1]], linecolor = BLACK, thickness = 1, stepsize = 0.01);$



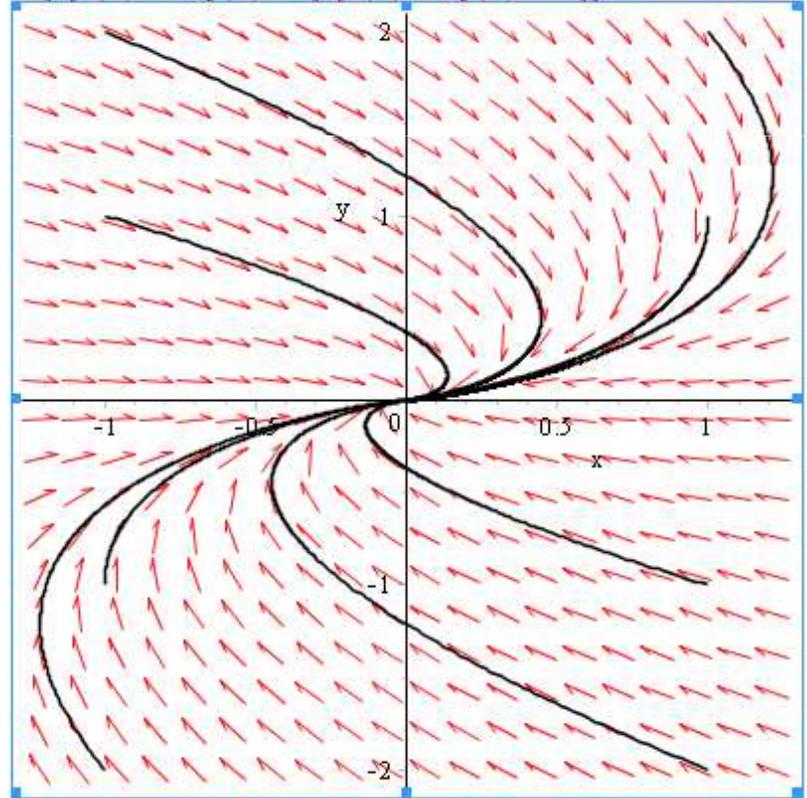


Masquer

```
> a := -1 : b := 1 : c := 0 : d := -1 : sys := {diff(x(t), t) = a*x(t) + b*y(t), diff(y(t), t) = c*x(t) + d*y(t)};
```

$$\text{sys} := \left\{ \frac{d}{dt} y(t) = -y(t), \frac{d}{dt} x(t) = -x(t) + y(t) \right\} \quad (5)$$

```
> phaseportrait(sys, [x(t), y(t)], t = 0..10, [[x(0) = 1, y(0) = 1], [x(0) = 1, y(0) = 2], [x(0) = 1, y(0) = -2], [x(0) = -1, y(0) = 2], [x(0) = -1, y(0) = -2], [x(0) = -1, y(0) = -1], [x(0) = -1, y(0) = 1], [x(0) = 1, y(0) = -1]], linecolor = BLACK, thickness = 1, stepsize = 0.01);
```





Texte **Math** Dessin Graphique Animation Masquer

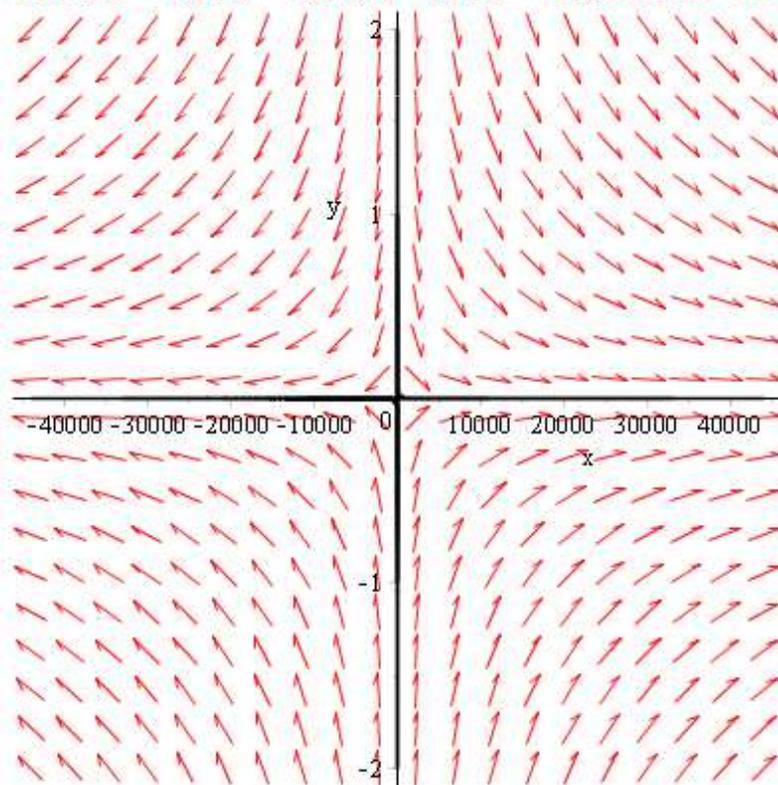
2D Input Times New Roman 12 **B** **I** **U** [List Icon] [List Icon] [List Icon] [List Icon] [List Icon] [List Icon]

Le col (ou point-selle):

```
> a := 1 : b := 1 : c := 0 : d := -1 : sys := {diff(x(t), t) = a*x(t) + b*y(t), diff(y(t), t) = c*x(t) + d*y(t)};
```

$$\text{sys} := \left\{ \frac{d}{dt} y(t) = -y(t), \frac{d}{dt} x(t) = x(t) + y(t) \right\} \quad (6)$$

```
> phaseportrait(sys, [x(t), y(t)], t = 0..10, [[x(0) = 1, y(0) = 1], [x(0) = 1, y(0) = 2], [x(0) = 1, y(0) = -2], [x(0) = -1, y(0) = 2], [x(0) = -1, y(0) = -2], [x(0) = -1, y(0) = -1], [x(0) = -1, y(0) = 1], [x(0) = 1, y(0) = -1]], linecolor = BLACK, thickness = 1, stepsize = 0.01);
```





Texte **Math** Dessin Graphique Animation

Masquer

2D Input Times New Roman 12 **B** **I** **U** [List icons]

> *Le foyer :*

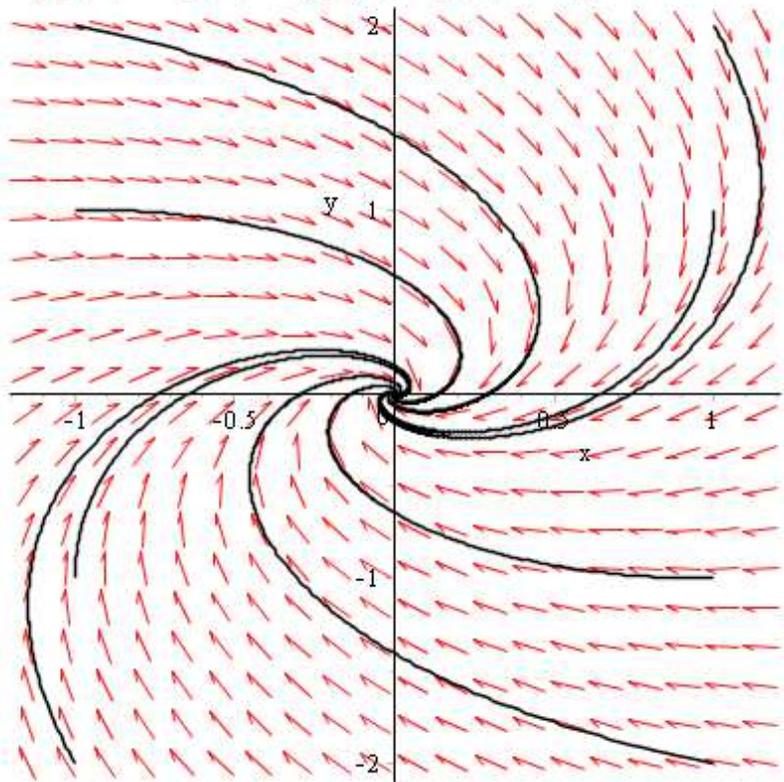
> $a = -1 : b = 1 : c = -1 : d = -1 : \text{sys} := \{ \text{diff}(x(t), t) = a \cdot x(t) + b \cdot y(t), \text{diff}(y(t), t) = c \cdot x(t) + d \cdot y(t) \}; \text{eigenvalues}(A);$

$$\text{sys} := \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= -x(t) + y(t), \\ \frac{d}{dt} y(t) &= -x(t) - y(t) \end{aligned} \right.$$

-1 + I -1 - I

(7)

> $\text{phaseportrait}(\text{sys}, [x(t), y(t)], t = 0..10, [[x(0) = 1, y(0) = 1], [x(0) = 1, y(0) = 2], [x(0) = 1, y(0) = -2], [x(0) = -1, y(0) = 2], [x(0) = -1, y(0) = -2], [x(0) = -1, y(0) = -1], [x(0) = -1, y(0) = 1], [x(0) = 1, y(0) = -1]]]; \text{linecolor} = \text{BLACK}, \text{thickness} = 1, \text{stepsize} = 0.01);$





Texte **Math** Dessin Graphique Animation

Masquer

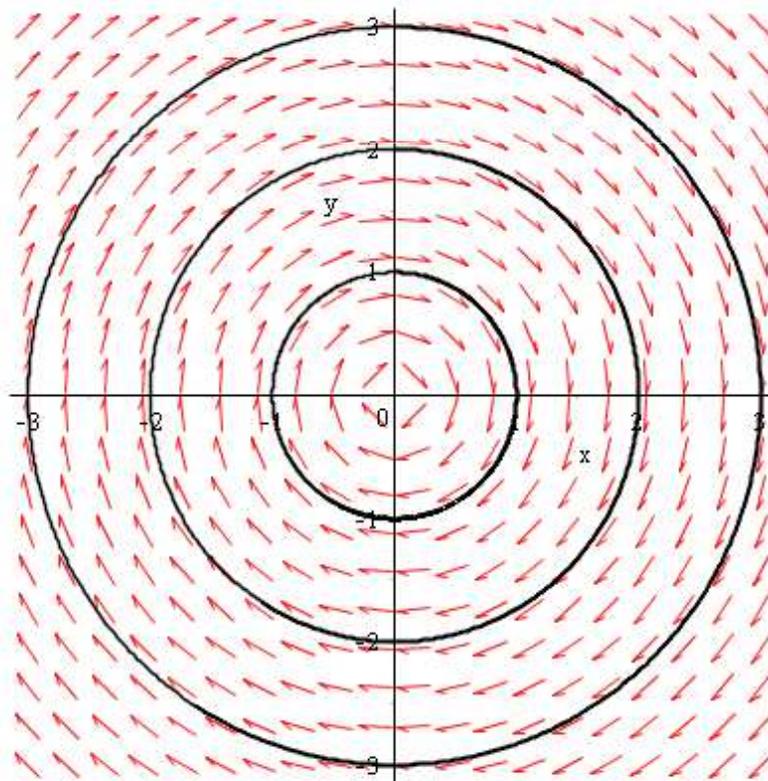
2D Input Times New Roman 12 **B** **I** **U** [List Icon] [List Icon] [List Icon] [List Icon] [List Icon]

Le centre:

$\> a := 0 : b := 1 : c := -1 : d := 0 : sys := \{diff(x(t), t) = a \cdot x(t) + b \cdot y(t), diff(y(t), t) = c \cdot x(t) + d \cdot y(t)\};$

$$sys := \left\{ \frac{d}{dt} y(t) = -x(t), \frac{d}{dt} x(t) = y(t) \right\} \quad (9)$$

$\> phaseportrait(sys, [x(t), y(t)], t = 0..10, [[x(0) = 0, y(0) = 1], [x(0) = 0, y(0) = 2], [x(0) = 0, y(0) = 3]], linecolor = BLACK, thickness = 1, stepsize = 0.01);$



...

Rappelons tout de même que l'objet de notre étude est le comportement qualitatif du système (1) au voisinage d'un point d'équilibre x_0 , et non celui du système linéarisé (2), celui-ci n'en étant en fait qu'une approximation qui reste encore à justifier.

Afin de définir rigoureusement la notion d'équivalence de champs de vecteurs, nous allons d'abord introduire une notion qu'on aurait en fait pu introduire dès le début de ce cours: c'est la notion de flot pour un système dynamique.

Flot d'un système dynamique

Considérons le système dynamique (1)

$$\dot{x} = f(x)$$

défini sur un ouvert Ω de \mathbb{R}^n , f étant un champ de vecteurs de classe C^1 .

En notant $t \mapsto \varphi(x, t)$ la solution maximale de (1) de condition initiale x ,
on a

$$\begin{cases} \varphi(x, 0) & = x \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(x, t) & = f(\varphi(x, t)) \end{cases}$$

Considérer alors le flot, c'est envisager d'un même coup d'œil toutes les solutions; en particulier, pour autant qu'elle soit définie pour un certain t , l'application (que l'on identifie parfois au flot)

$$\varphi_t : x \mapsto \varphi(x, t)$$

décrit la position au temps t des domaines de Ω entraînés par la dynamique du champ de vecteurs. Et l'on a, quand c'est bien défini,

$$\varphi(x, t + s) = \varphi(\varphi(x, t), s)$$

φ étant de classe C^1 .

Le champ de vecteurs f est dit complet si le flot est défini pour tout temps:

$$D_\varphi = \Omega \times \mathbb{R}$$

φ_t est alors un difféomorphisme de Ω

- bijectif car $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_{-t} \circ \varphi_t = Id_\Omega$;
 - différentiable comme l'est le flot;
- d'inverse différentiable car φ_{-t} est différentiable.

Comme exemple, un champ linéaire associé à $L \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}^n)$ est complet de flot

$$\varphi(x, t) = e^{tL}x \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } t \in \mathbb{R}.$$

Cependant, il est en général impossible d'exprimer le flot d'un système dynamique non linéaire à l'aide de fonctions qui permettraient d'en étudier le comportement asymptotique.

Deux systèmes dynamiques sont topologiquement conjugués si leurs portraits de phases respectifs sont homéomorphes. En d'autres termes, les solutions de l'un s'obtiennent à partir de celles de l'autre par l'action d'un homéomorphisme h .

Mathématiquement, cela veut dire que leurs flots respectifs sont liés par la relation:

$$h \circ \varphi_t = \psi_t \circ h$$

En ce sens, la conjugaison est une relation d'équivalence.

La propriété (faible) de la conjugaison topologique peut être étendue à celle (forte) de la conjugaison différentiable en considérant cette fois-ci l'action d'un difféomorphisme de classe C^p .

Par exemple, on montre que les portraits de phases correspondant à un foyer et un nœud sont homéomorphes, mais en général non difféomorphes.

Equivalence topologique locale des systèmes (1) et (2)

Il est clair que nous faisons allusion au problème de conjugaison (ou encore d'équivalence) topologique ou différentiable d'un système dynamique à son système linéarisé au voisinage d'un point d'équilibre.

Obstruction à l'équivalence topologique

97

L'existence de valeurs propres imaginaires pures du champ de vecteur linéarisé, au voisinage d'un point d'équilibre, peut être un obstacle à la conjugaison (juste topologique!), comme le montre l'exemple suivant

$$\begin{cases} \dot{x} &= -\omega y + \lambda x (x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= \omega x + \lambda y (x^2 + y^2) \end{cases}$$

dont le linéarisé au voisinage de l'origine admet celui-ci comme centre, en tant que point d'équilibre.

Essayer d'en faire une simulation Maple du portrait de phase pour différentes valeurs de λ .

En coordonnées polaires

$$x = r \cos \theta \quad , \quad y = r \sin \theta$$

le système en question s'écrit, pour $r \neq 0$,

$$\begin{cases} \dot{r} &= \lambda r^3 \\ \dot{\theta} &= \omega \end{cases}$$

Et en notant $x_0 = r_0 \cos \theta_0$, $y_0 = r_0 \sin \theta_0$ avec $r_0 > 0$, la donnée de Cauchy pour $t = 0$, nous avons $(r(t), \theta(t))$, et donc $(x(t), y(t))$, qui est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$ vérifiant $2\lambda r_0^2 t < 1$, et a pour expression

$$\begin{cases} r(t) &= \frac{r_0}{\sqrt{1 - 2\lambda r_0^2 t}} \\ \theta(t) &= \theta_0 + \omega t \end{cases}$$

Il est facile donc de voir que l'origine est

- un point d'équilibre asymptotiquement stable si $\lambda < 0$;
- un centre si $\lambda = 0$;
- un point d'équilibre répulsif (donc instable) si $\lambda > 0$.

...

Par suite, si $\lambda \neq 0$, le système à étudier n'est certainement pas localement topologiquement (et donc différentiablement) conjugué, au voisinage de l'origine, au système linéarisé.

En d'autres mots, la linéarisation dans ce cas est une approche qui peut induire en erreur!

Considérons le système (1)

$$\dot{x} = f(x)$$

Un point d'équilibre x_0 est dit hyperbolique si

$$Sp(Df(x_0)) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$$

En d'autres termes, la linéarisation autour d'un point d'équilibre hyperbolique n'admet que des valeurs propres à partie réelle non nulle.

Classification topologique de champs de vecteurs

Résultat fondamental (1959)

101

Théorème de Hartman-Grobman

Au voisinage d'un point d'équilibre hyperbolique, un système dynamique est topologiquement équivalent à son linéarisé.

Explicitement, au voisinage d'un tel point, les variétés stables (bassin d'attraction) et instables (bassin de répulsion) sont de même dimension que les variétés stables et instables du système linéarisé, et en plus, elles leur sont tangentes en ce point d'équilibre.

Remarque

102

Nous avons utilisé sans distinction le terme “équivalence topologique” et celui de “conjugaison topologique”. En réalité, il y a une différence subtile entre les deux :

Dans l'équivalence topologique, l'homéomorphisme h qui lie les trajectoires respectives des deux systèmes preserve leur orientation en fonction du temps.

La propriété de conjugaison topologique est un peu plus forte : l'homéomorphisme réalisant la conjugaison préserve non pas seulement l'orientation mais aussi la paramétrisation par rapport au temps.

Dans le théorème de Hartman-Grobman, il est question en fait de conjugaison topologique :

$$h \circ \varphi_t(x_0) = e^{tA} h(x_0)$$

où φ_t est le flot local du système $\dot{x} = f(x)$ au voisinage du point d'équilibre x_0 et $A := Df(x_0)$.

Conséquences du théorème de Hartman-Grobman

D'abord quelques définitions dans le plan

103

Revenons à notre système de départ

$$(1) \quad \dot{x} = f(x), \quad f \in C^1(U), \quad U \text{ ouvert de } \mathbb{R}^2,$$

et considérons son linéarisé au voisinage d'un point d'équilibre isolé x_0

$$(2) \quad \dot{y} = Ay$$

où $y := x - x_0$ et $A := Df(x_0)$.

On se place dans le cas hyperbolique :

$$Sp(A) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$$

qui inclut bien évidemment le cas non dégénéré :

$$0 \notin Sp(A)$$

On sait que dans ce cas, pour (2), x_0 peut être
soit un nœud (attractif ou répulsif), soit un foyer (attractif ou répulsif),
soit un point-selle (qui n'est, lui, ni attractif ni répulsif).

Pour le système planaire (1), nous dirons que x_0 est un point-selle topologique (resp. nœud, foyer) lorsque les trajectoires au voisinage de x_0 peuvent être vues comme une sorte de “déformation continue” de celles au voisinage d’un point-selle (resp. nœud, foyer) tel qu’il a été défini pour le système linéaire (2).

Concrètement, on a :

x_0 est un point-selle topologique pour (1) s'il existe deux trajectoires T_1 et T_2 qui approchent x_0 quand $t \rightarrow +\infty$ et deux trajectoires T_3 et T_4 qui approchent x_0 quand $t \rightarrow -\infty$ et s'il existe un voisinage V de x_0 tel que toutes les autres trajectoires qui commencent dans $V \setminus \{x_0\}$ quittent V quand $t \rightarrow \pm\infty$.

Comme dans le cas linéaire, les trajectoires $T_i, i = 1..4$, sont appelées séparatrices.

Au voisinage d'un point-selle (topologique), les séparatrices divisent le plan de phase en quatre *secteurs hyperboliques*.

x_0 est un foyer stable (resp. instable) pour (1) si, en coordonnées polaires (r, θ) avec x_0 origine du repère, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $0 < r_0 < \delta$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$,
 $r(t, r_0, \theta_0) \longrightarrow 0$ et $|\theta(t, r_0, \theta_0)| \longrightarrow \infty$ quand $t \rightarrow +\infty$ (resp. $t \rightarrow -\infty$).
Toute trajectoire satisfaisant $r(t) \longrightarrow 0$ et $|\theta(t)| \longrightarrow \infty$ quand $t \rightarrow \pm\infty$
spirale vers l'origine quand $t \rightarrow \pm\infty$.

x_0 est un nœud stable (resp. instable) pour (1) si, en coordonnées polaires (r, θ) avec x_0 origine du repère, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $0 < r_0 < \delta$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$, $r(t, r_0, \theta_0) \longrightarrow 0$ et la limite de $\theta(t, r_0, \theta_0)$ existe quand $t \rightarrow +\infty$ (resp. $t \rightarrow -\infty$). Cela veut dire que toute trajectoire commençant dans un rayon $0 < r_0 < \delta$ approche l'origine selon une tangente bien définie quand $t \rightarrow \pm\infty$.

x_0 est un nœud impropre (ou isotrope) pour (1) s'il est un nœud et que chaque droite passant par x_0 est tangente à une trajectoire de (1).

Quelques résultats

Puisque l'homéomorphisme réalisant

l'équivalence préserve l'orientation des trajectoires ...

108

x_0 est attractif (resp. repulsif) en tant qu'équilibre de (1) ssi
il est attractif (resp. repulsif) en tant qu'équilibre de (2).

En d'autres termes, la propriété d'attraction
(et donc celle de répulsion) est préservée par un homéomorphisme.

Et l'on a aussi ...

109

x_0 est asymptotiquement stable pour (1) ssi
il est asymptotiquement (et donc exponentiellement) stable pour (2).

Conséquence de la deuxième partie du théorème ...

110

x_0 est un point-selle (donc instable) de (2) ssi
il est un point-selle topologique de (1).

Exemple de point-selle topologique

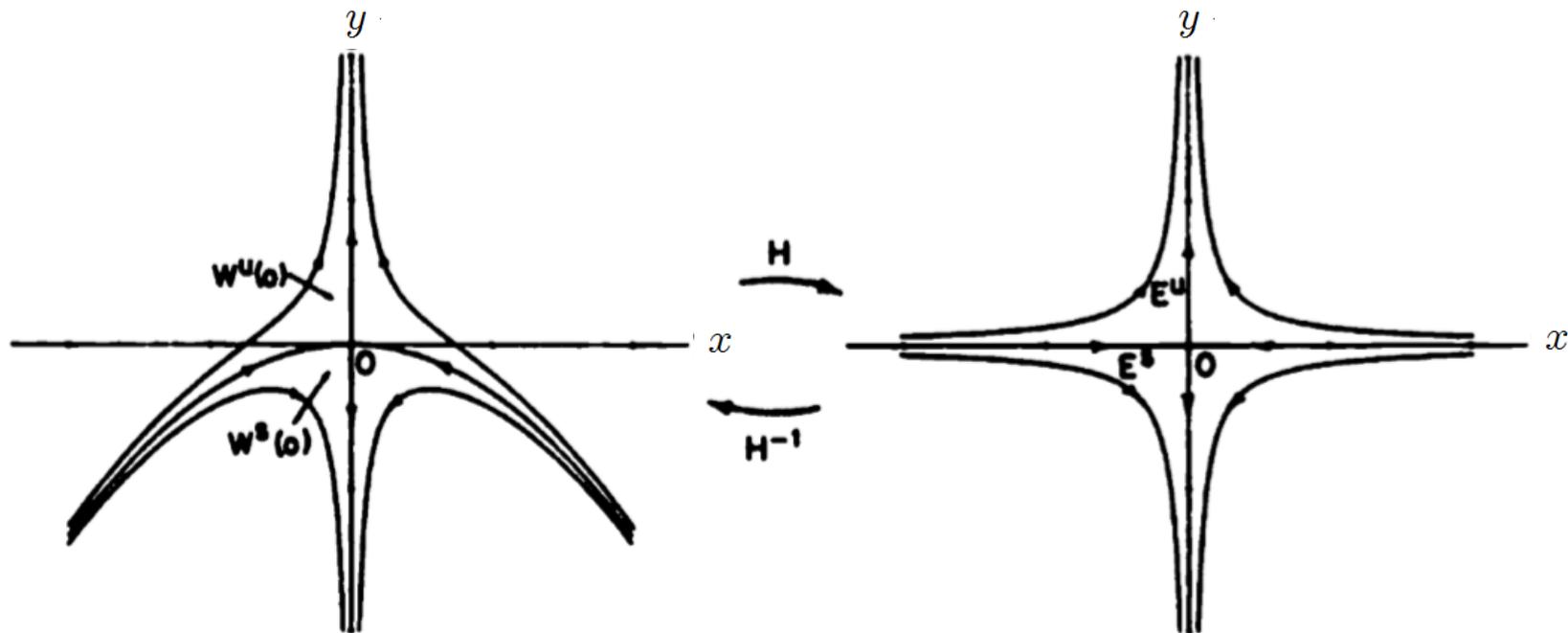
(Images L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer 2001)

111

Pour le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = y + x^2 \end{cases}$$

l'origine est un point-selle topologique par théorème de Hartman-Grobman, $W^s(0)$ et $W^u(0)$ (resp. $E^s(0)$ et $E^u(0)$) étant les variétés stables et instables du système non linéaire (resp. du linéarisé).



x_0 est un nœud (resp. un foyer) de (2)
ssi il est un nœud ou un foyer de (1).

En d'autres termes, un homéomorphisme
ne distingue pas un nœud d'un foyer.

Confusion nœud / foyer (Exemple)

113

Considérons le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{x} &= -x - \frac{y}{\ln \sqrt{x^2 + y^2}} \\ \dot{y} &= -y + \frac{x}{\ln \sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

pour $x^2 + y^2 \neq 0$ et $f(0, 0) = (0, 0)$.

Il est clair que l'origine est un nœud (impropre) attractif pour le linéarisé.
Voyons ce qu'il en est réellement pour le système initial :

En coordonnées polaires (r, θ) telles que

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad \theta = \arctg(y/x),$$

on a $r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}$ et $r^2\dot{\theta} = x\dot{y} - y\dot{x}$,

et le système s'écrit

$$\begin{cases} \dot{r} &= -r \\ \dot{\theta} &= \frac{1}{\ln r} \end{cases}$$

avec $\dot{r} = 0$ pour $r = 0$, de sorte que

$$r(t) = r_0 e^{-t} \quad \text{et} \quad \theta(t) = \theta_0 - \ln \left(1 - \frac{t}{\ln r_0} \right).$$

On a alors $r(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ et $|\theta(t)| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty$ pour $r_0 < 1$:
l'origine est réellement un foyer !

L'explication de ce phénomène est dans un théorème qui va suivre.

Si $f \in C^2(U)$, U ouvert de \mathbb{R}^n , et les valeurs propres de $A := Df(x_0)$ sont
tous
soit à partie réelle strictement positive
soit à partie réelle strictement négative,
c.-à-d.,

$$\left\{ \begin{array}{l} SpA \subset \mathbb{R}_+^* + i\mathbb{R} \quad (x_0 \text{ dans ce cas est appelé } source) \\ \text{ou bien} \\ SpA \subset \mathbb{R}_-^* + i\mathbb{R} \quad (x_0 \text{ dans ce cas est appelé } puits) \end{array} \right.$$

alors les systèmes (1) et (2) sont *difféomorphes* au voisinage de x_0 .
En d'autres termes, l'équivalence dans le théorème de Hartman-Grobman
est réalisée par le biais d'un difféomorphisme, c.-à-d. une transformation
qui, comme son inverse, est continument différentiable.

Comme un difféomorphisme distingue entre un nœud et un foyer,
et sous les conditions du théorème de Hartman, on a

x_0 est un nœud (resp. un foyer) attractif / répulsif de (2)
ssi

x_0 est un nœud (resp. un foyer) attractif / répulsif de (1).

On montre, pourtant, que même si l'on a seulement f de classe C^1 , on a x_0 foyer (attractif / répulsif) de (2) $\implies x_0$ foyer (attractif / répulsif) de (1).

Voir E.A. Coddington and N. Levinson,
Theory of Ordinary Differential Equations,
McGraw Hill, New York, 1955.

Cas non hyperbolique (mais non dégénéré)

117

Considérons notre système

$$(1) \quad \dot{x} = f(x), \quad f \in C^1(U), \quad U \text{ ouvert de } \mathbb{R}^2,$$

et son linéarisé au voisinage d'un point d'équilibre isolé x_0

$$(2) \quad \dot{y} = Ay$$

où $y := x - x_0$ et $A := Df(x_0)$.

On se place dans le cas où

$$Sp(A) \cap i\mathbb{R} \neq \emptyset \quad \text{et} \quad A \text{ non singulière} \quad (0 \notin Sp(A)).$$

x_0 est alors un centre pour (2).

Qu'en est-il de x_0 en tant qu'équilibre du système (1) ?

Rappelons que le théorème de Hartman-Grobman ainsi que celui de Hartman ne sont pas applicables.

On montre qu'une perturbation de classe C^1 d'un centre donne lieu soit à un centre, à un foyer ou à *un centre-foyer*.
Ce sont les seules possibilités.

x_0 est un centre pour (1) s'il est localement entouré d'une famille de trajectoires fermées.

x_0 est un centre-foyer pour (1) s'il est localement entouré d'une famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de trajectoires fermées isolées (appelées *cycles limites*, voir support 5) qui s'accroissent à l'infini en ce point $(T_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x_0)$, T_n et T_{n+1} étant reliées par des courbes qui spiralent vers l'une ou l'autre trajectoire quand $t \rightarrow \pm\infty$.
Cette situation est impossible dans le cas linéaire !

Nous avons déjà donné plus haut un exemple où la perturbation d'un centre donne lieu à un foyer, stable ou instable.

L'exemple suivant montre comment une telle perturbation pourrait donner lieu à un centre-foyer :

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + x\sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \dot{y} &= x + y\sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

pour $x^2 + y^2 \neq 0$ et $f(0,0) = (0,0)$,
l'origine étant un centre pour le linéarisé.

...

En coordonnées polaires, le système s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{r} &= r^2 \sin \frac{1}{r} \\ \dot{\theta} &= 1 \end{cases}$$

avec $\dot{r} = 0$ pour $r = 0$ ou $r = \frac{1}{n\pi}$, $n \in \mathbb{N}^*$, de sorte que chacun des cercles $r = \frac{1}{n\pi}$ est une trajectoire du système dont le rayon tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

De plus, pour $n\pi < \frac{1}{r} < (n+1)\pi$, on a

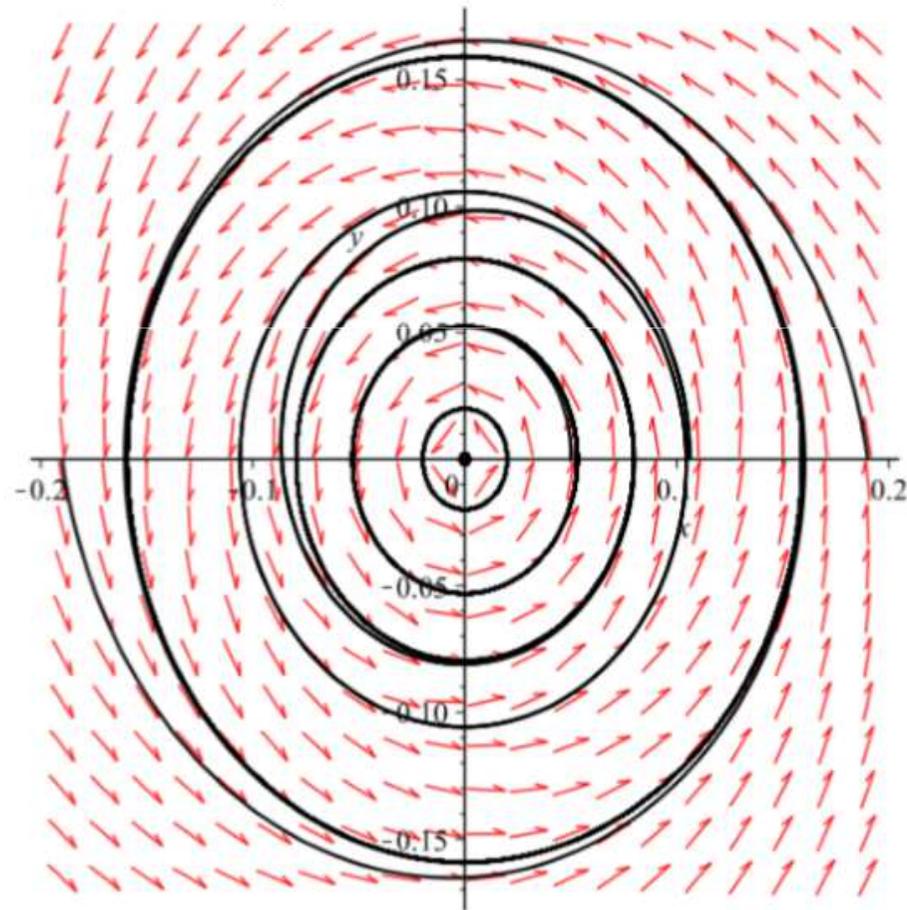
$$\begin{cases} \dot{r} < 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ \dot{r} > 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$$

c.-à-d. que les trajectoires entre deux cercles successifs spiralent en s'approchant ou en s'éloignant de l'un de ces cercles.

Il s'agit donc d'un centre-foyer.

Simulation Maple du portrait de phase

121



Infinité de cycles limites (circulaires) s'accumulant autour de l'origine

Exclusion du centre-foyer (Théorème de Dulac)

122

Lorsque le champ f est analytique sur U , en particulier polynomial, le cas du centre-foyer ne peut avoir lieu.

Ceci est une conséquence d'un théorème de Dulac (1923) sur la finitude du nombre de cycles limites pour champs analytiques dans le plan, une question intimement liée au 16^{ème} problème de Hilbert sur le nombre de cycles limites dans le plan et leur disposition relative pour champs polynomiaux (voir support 5 pour plus de détails).

Question fondamentale : Préservation du centre

Dans ses *Mémoires sur les courbes définies par une équation différentielle* (1881-1885), Poincaré consacre tout le chapitre XI à ce qu'il appelle *Théorie des centres*. Partant d'un système planaire polynomial, et considérant une fonction qui ressemble curieusement à une fonction de Lyapounov (en fait, il s'agit d'une *intégrale première*, une quantité qui reste constante le long d'une trajectoire), il aboutit en une vingtaine de pages à une condition nécessaire et suffisante pour qu'un point d'équilibre soit un centre, et s'exprime ainsi pour conclure :

“En résumé, pour que l'origine soit un centre, c'est-à-dire pour que la trajectoire du point mobile soit stable, il faut et il suffit que toutes les quantités que nous avons appelées C_0 soient nulles à la fois. Toutefois, il sera souvent difficile de reconnaître si ces conditions, en nombre infini, sont remplies à la fois. Il y a donc intérêt à signaler des cas où l'on est certain d'avance que tous les C_0 sont nuls. Je ne signalerai que le plus simple d'entre eux.”

Chercher les symétries du système

Poincaré donne ensuite une condition suffisante pour que le point d'équilibre soit un centre. En langage dynamique, on peut l'exprimer ainsi :

Considérons le système différentiel planaire

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} = p(x, y) \\ \dot{y} = q(x, y) \end{cases}$$

où $f := (p, q) \in C^1(U)$, U un ouvert de \mathbb{R}^2 ,
et son linéarisé au voisinage d'un point singulier $(x_0, y_0) \in U$:

$$(2) \quad \dot{z} = Az$$

où $A := Df(x_0, y_0)$, $z := (x, y) - (x_0, y_0)$.

On suppose que le système (1) est *symétrique*
par rapport l'axe des x ,

(i.e. invariant sous l'action de la transformation $(t, y) \longrightarrow (-t, -y)$)
ou

par rapport à l'axe des y

(i.e. invariant sous l'action de la transformation $(t, x) \longrightarrow (-t, -x)$).

Alors,

si (x_0, y_0) est un centre pour (2), il est aussi un centre pour (1).

Exemple

125

Il est aisé de vérifier que le système

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - y^3 \\ \dot{y} = x + x^3 \end{cases}$$

est symétrique par rapport à l'axe des x
(et aussi par rapport à l'axe des y).

Donc, si l'origine est un centre pour le linéarisé,
il l'est aussi pour le système non linéaire.

Que faire en absence de symétries ?

126

Pour distinguer un centre d'un foyer dans le cas analytique, et en absence de symétries, nous n'avons pas d'autres choix, avec les outils dont nous disposons pour le moment, à part passer en coordonnées polaires ou chercher une fonction de Lyapounov.

L'exemple suivant est un excellent cas de figure où la méthode de Lyapounov permet de conclure.

Considérons dans le quadrant positif du plan le système

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases}$$

où $a, b, c, d > 0$.

Il est aisé de vérifier que l'on a deux points d'équilibre :

$$(0, 0) \text{ et } (x^*, y^*) := (c/d, a/b).$$

L'étude qualitative au voisinage de l'origine est simple :
par linéarisation et théorème de Hartman-Grobman,
l'origine est un point-selle topologique pour le système (1),
bien que le champ ne soit défini que pour $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$.

La matrice jacobienne au voisinage de (x^*, y^*) est donnée par

$$Df(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

de sorte que (x^*, y^*) est un centre pour le linéarisé.

Qu'en est-il de la nature de (x^*, y^*) en tant qu'équilibre du système (1)?

- La difficulté de la question réside dans le fait que :
- Le théorème de Hartman-Grobman n'est pas applicable;
 - Pas de symétrie, ni par rapport à x , ni par rapport à y .

Par contre, puisque le champ est polynomial,
 (x^*, y^*) ne peut pas être un centre-foyer,
donc soit un centre, soit un foyer.

Comment trancher ?

Considérons la fonction $V \in C^1(\mathbb{R}_+^{*2})$ définie par

$$V(x, y) = H(x, y) - H(x^*, y^*)$$

$$\text{où } H(x, y) = dx + by - c \ln x - a \ln y.$$

On a

a) $V(x^*, y^*) = 0$ et $V(x, y) > 0$ au voisinage de (x^*, y^*) .
En fait, (x^*, y^*) est un minimum local de H puisque l'on a :

- (x^*, y^*) est un point critique de H :
- $$\frac{\partial H}{\partial x}(x^*, y^*) = -c/x^* + d = 0 = \frac{\partial H}{\partial y}(x^*, y^*)$$
- H est de classe C^2 au voisinage de (x^*, y^*)
et l'on a la matrice hessienne de H en (x^*, y^*)

$$D^2H_{(x^*, y^*)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)} = \begin{pmatrix} \frac{c}{x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{a}{y^2} \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)} = \begin{pmatrix} \frac{d^2}{c} & 0 \\ 0 & \frac{b^2}{a} \end{pmatrix}$$

dont les valeurs propres sont > 0 .

...

b) La dérivée de V le long des trajectoires est donnée par

$$\begin{aligned}\dot{V}(x, y) &= \dot{H}(x, y) = (-c/x + d)\dot{x} - (a/y - b)\dot{y} \\ &= x(d - c/x)(a - by) - y(a/y - b)(dx - c) = 0\end{aligned}$$

pour tout (x, y) au voisinage de (x^*, y^*) ,
de sorte que V , qui est constante le long des trajectoires,
soit une fonction de Lyapounov pour le système (1)
au voisinage de l'équilibre non nul.

Nous déduisons que (x^*, y^*) est un centre pour
le modèle de Lotka-Volterra.

Récapitulons ..

En résumé, deux difficultés principales ont été abordées :

- Dans le cas hyperbolique :

Le cas du nœud, dont la perturbation peut donner lieu à un nœud ou à un foyer. Le théorème de Hartman donne une condition suffisante pour conclure.

- Dans le cas non hyperbolique (mais non dégénéré) :

C'est le cas du centre, dont la perturbation peut donner lieu à un centre, à un foyer ou à un centre-foyer. Ce dernier cas ne peut pas avoir lieu si le champ de vecteurs est analytique au voisinage du point d'équilibre sous étude. Dans certains cas très particuliers (présence de symétries), on montre que le centre est maintenu. Sinon, dans le cas général, il faudrait trouver une fonction de Lyapounov pour décider si le point d'équilibre est un centre ou un foyer.

Enfin, une petite précision :

Quand on demande d'*étudier la nature* d'un point d'équilibre, cela revient à chercher si celui-ci est un point-selle (topologique), un nœud, un foyer, un centre ou un centre-foyer.

Quand on demande d'*étudier la stabilité* d'un point d'équilibre, cela revient à chercher si celui-ci est stable (au sens de Lyapounov), instable ou asymptotiquement (voir exponentiellement) stable, sans nécessairement préciser sa nature.

Cas dégénéré

C'est le cas d'un point d'équilibre x_0 pour lequel la matrice jacobienne $Df(x_0)$ est singulière. Un tel point est souvent désigné par un point singulier *multiple* puisqu'il est montré qu'il peut se scinder en des points hyperboliques par une perturbation adéquate du système $\dot{x} = f(x)$. Dans son premier *Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle*, Poincaré qualifie ces points de *points singuliers de seconde espèce* et s'exprime ainsi à leur propos :

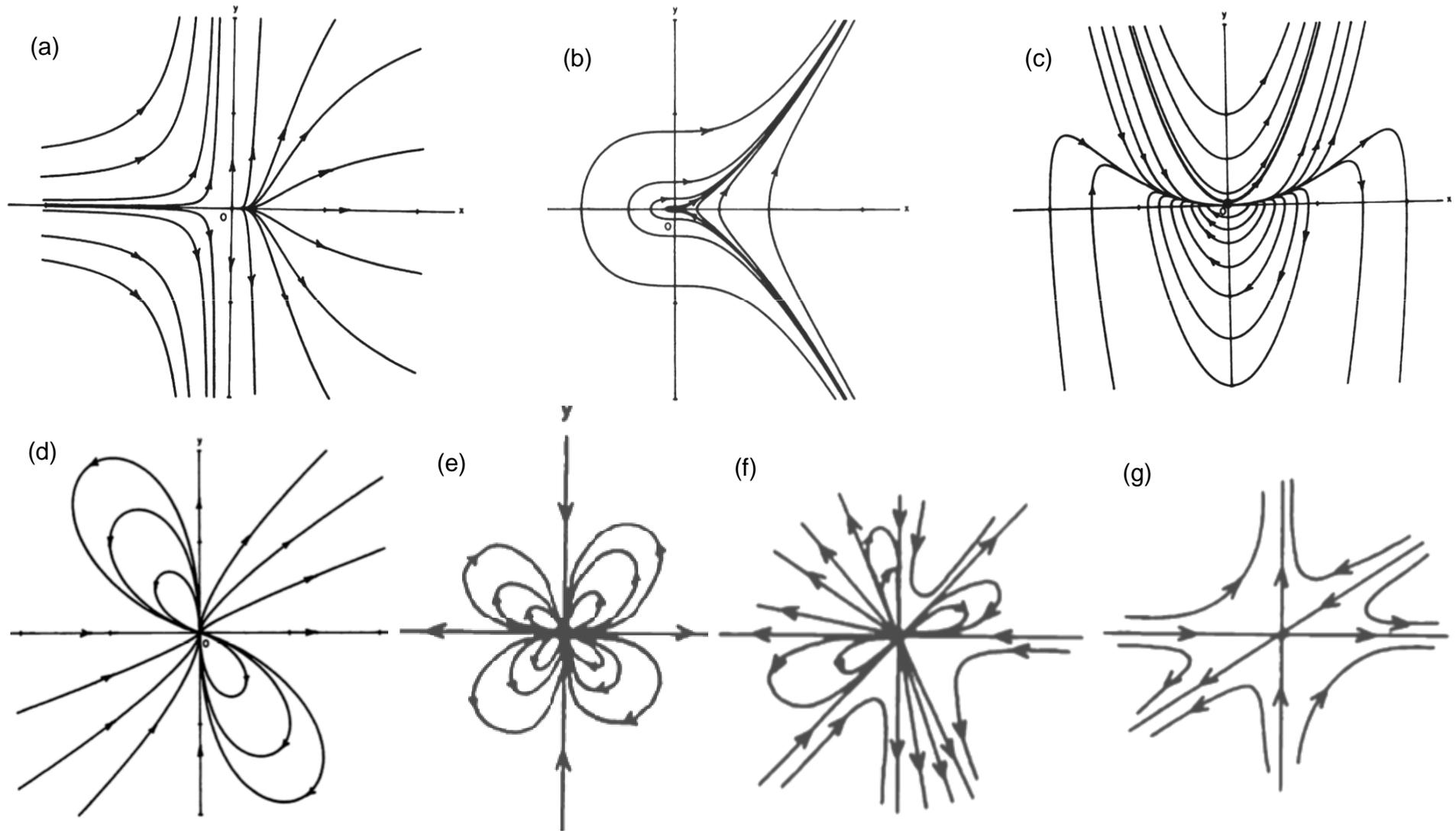
“Il est évident, d'après ce qui précède, qu'ils pourront toujours être considérés comme la limite d'un système de plusieurs points singuliers de première espèce [cols, nœuds, foyers, centres] confondus ensemble. Les particularités que peuvent présenter de pareils points sont trop nombreuses et trop diverses pour que nous les étudions en détail.”

Nous nous contentons donc de donner quelques exemples illustratifs de tels points :

Quelques portraits de phase dans le cas dégénéré

(Images L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Springer 2001)

134



Hyperbolicité et robustesse

On montre finalement que les points d'équilibre hyperboliques sont robustes dans le sens où une petite perturbation de l'ordre de ε , c.-à-d.,

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, \varepsilon)$$

ne va pas changer qualitativement le portrait de phases, mais juste déplacer l'équilibre d'une petite quantité proportionnelle à ε .

D'où la notion de *stabilité structurelle* de systèmes dynamiques.

Par contre, les points d'équilibre non hyperboliques ne sont pas robustes:

une petite perturbation peut résulter en une *bifurcation* locale (perte de stabilité, disparition, apparition d'autres points d'équilibre, etc.)

La notion de bifurcation sera traitée de manière détaillée prochainement.

Méthodes avancées en théorie qualitative des équations différentielles

A un niveau avancé (master, doctorat), des outils beaucoup plus puissants sont proposés aux candidats pour une analyse plus approfondie de modèles scientifiques non linéaires. De telles méthodes font appel, entre autres, à la théorie des *formes normales* et celle de *la variété centre*, aussi bien pour systèmes d'équations différentielles ordinaires que pour *systemes à retard*. Les *symétries de Lie*, par exemple, sont fort présents dans cette étude, et ce pour une réduction optimale du système au voisinage de positions d'équilibres. Côté calcul scientifique, les simulations se font essentiellement sur le *Poincaré code*, un package Maple développé au sein du LabMIA et dont une première version est déposée chez Elsevier. D'autres versions plus sophistiquées sont actuellement en cours de développement ..

Solutions périodiques

137

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (1)$$

Une solution non constante $x(t)$ est dite périodique s'il existe un $T > 0$ tel que

$$x(t + T) = x(t) \quad \text{pour tout } t,$$

la période d'une telle solution étant le plus petit T vérifiant la relation de périodicité ci-dessus.

$x([0, T])$ est l'orbite périodique (ou cycle) associée à la solution périodique.

Trajectoires fermées

138

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (1)$$

Une solution périodique du système autonome (1) correspond à une trajectoire fermée dans l'espace des phases \mathbb{R}^n et réciproquement.

Cas non autonome

139

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) , \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (1)'$$

Les trajectoires fermées exhibées par un système non autonome dans son espace des phases ne correspondent pas nécessairement à des solutions périodiques!

(Voir session Maple pour un exemple.)



Texte **Math** Dessin Graphique Animation Masquer

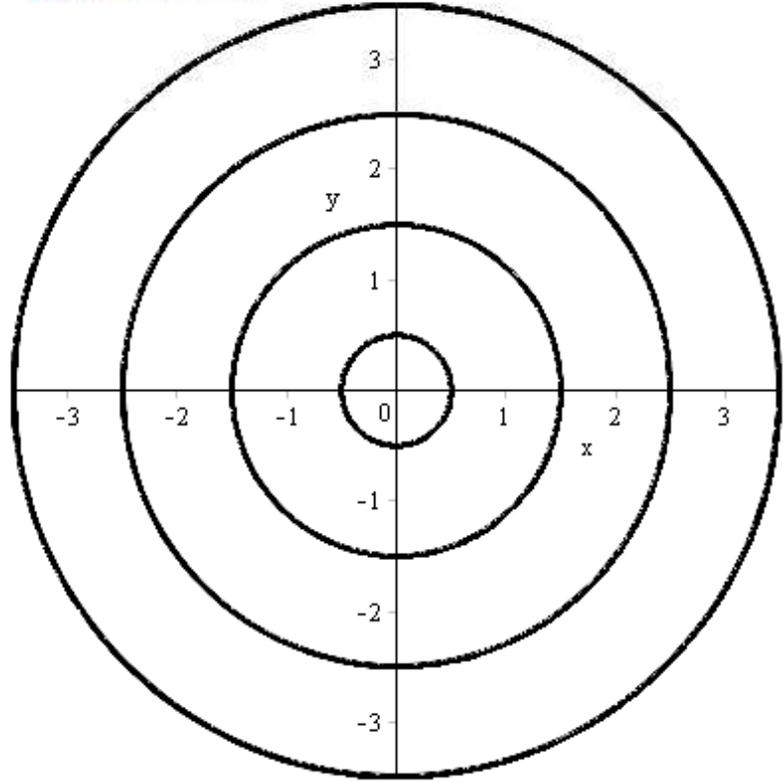
2D Input Times New Roman 12 **B** *I* U [List Icon] [List Icon] [List Icon] [List Icon] [List Icon]

> *Solutions périodiques et trajectoires fermées d'un système non autonome :*

> *sys := {diff(x(t), t) = 2*t*y(t), diff(y(t), t) = -2*t*x(t)};*

$$sys := \left\{ \frac{d}{dt} x(t) = 2ty(t), \frac{d}{dt} y(t) = -2tx(t) \right\} \quad (2)$$

> *phaseportrait(sys, [x(t), y(t)], t = 0..10, [[x(0) = 0.5, y(0) = 0], [x(0) = 1.5, y(0) = 0], [x(0) = 2.5, y(0) = 0], [x(0) = 3.5, y(0) = 0]],
linecolor = BLACK, thickness = 1, stepsize = 0.01);*





Text Times New Roman 12 B I U

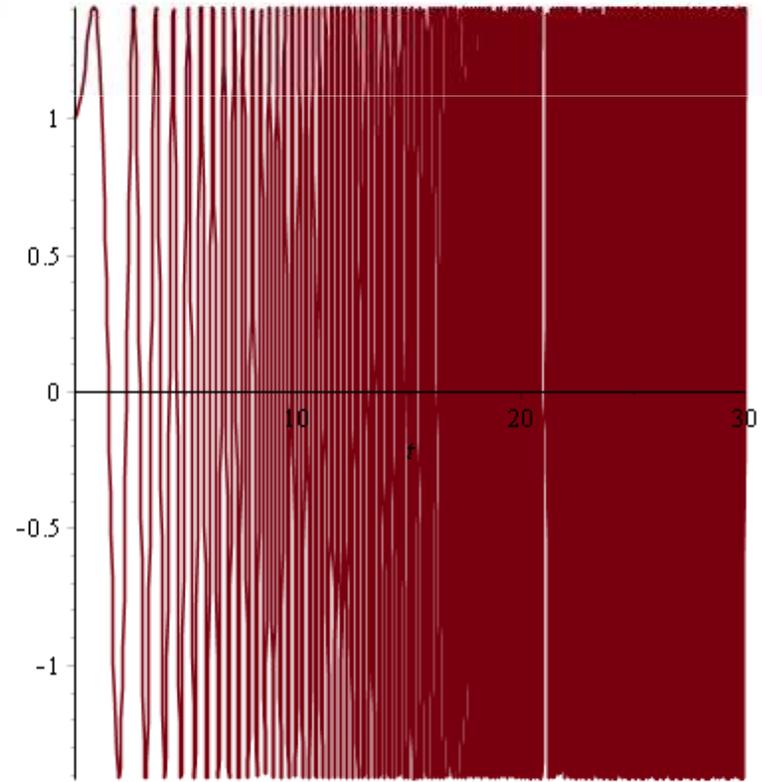
```
> sys_ode := diff(x(t), t) = 2*t*y(t), diff(y(t), t) = -2*t*x(t);
```

$$\text{sys_ode} := \frac{d}{dt} x(t) = 2t y(t), \frac{d}{dt} y(t) = -2t x(t) \tag{3}$$

```
> dsolve([sys_ode]);
```

$$\{x(t) = _C1 \sin(t^2) + _C2 \cos(t^2), y(t) = _C1 \cos(t^2) - _C2 \sin(t^2)\} \tag{4}$$

```
> plot(sin(t^2) + cos(t^2), t=0..30);
```



Critères d'existence

Théorie de l'indice

(Extrait de l'œuvre de Poincaré où il introduit à la théorie de l'indice)

142

Courbes définies par une équation différentielle 3.pdf - Adobe Reader



COURBES DÉFINIES PAR UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE. 203

CHAPITRE XIII.

DISTRIBUTION DES POINTS SINGULIERS.

Reprenons la nappe S , de genre p , et supposons que cette nappe ne présente ni point conique, ni courbe multiple.

Soient C le nombre des cols situés sur cette nappe, N le nombre des nœuds, F celui des foyers ; je dis qu'on aura la relation

$$N + F - C = 2 - 2p.$$

Traçons sur la surface S , un cycle quelconque. Ce cycle sera touché en certains de ses points par diverses trajectoires, mais les unes le toucheront extérieurement, les autres intérieurement. Soient E le nombre des contacts extérieurs, I celui des contacts intérieurs ; le nombre

$$J = \frac{E - I - 2}{2}$$

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y) , \quad \frac{dy}{dt} = f_2(x, y) , \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

***Théorie de l'indice** (Guckenheimer & Holmes 1983)*

Dans la région délimitée par une orbite périodique, il existe au moins un point d'équilibre. S'il est le seul, il est nécessairement un foyer stable (un puits), un foyer instable (une source) ou un centre. Si tous les points d'équilibre dans cette région sont hyperboliques, leur nombre est nécessairement impair $(2m + 1)$ dont m qui sont des cols (points selle) et $(m + 1)$ des puits ou des sources.

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y) , \quad \frac{dy}{dt} = f_2(x, y) , \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

Critère de Bendixson

Supposons que (f_1, f_2) est continument différentiable sur un domaine simplement connexe Ω . Le système (1) ne peut avoir de solutions périodiques que si $\operatorname{div}(f_1, f_2)$ est nulle ou change de signe dans Ω .

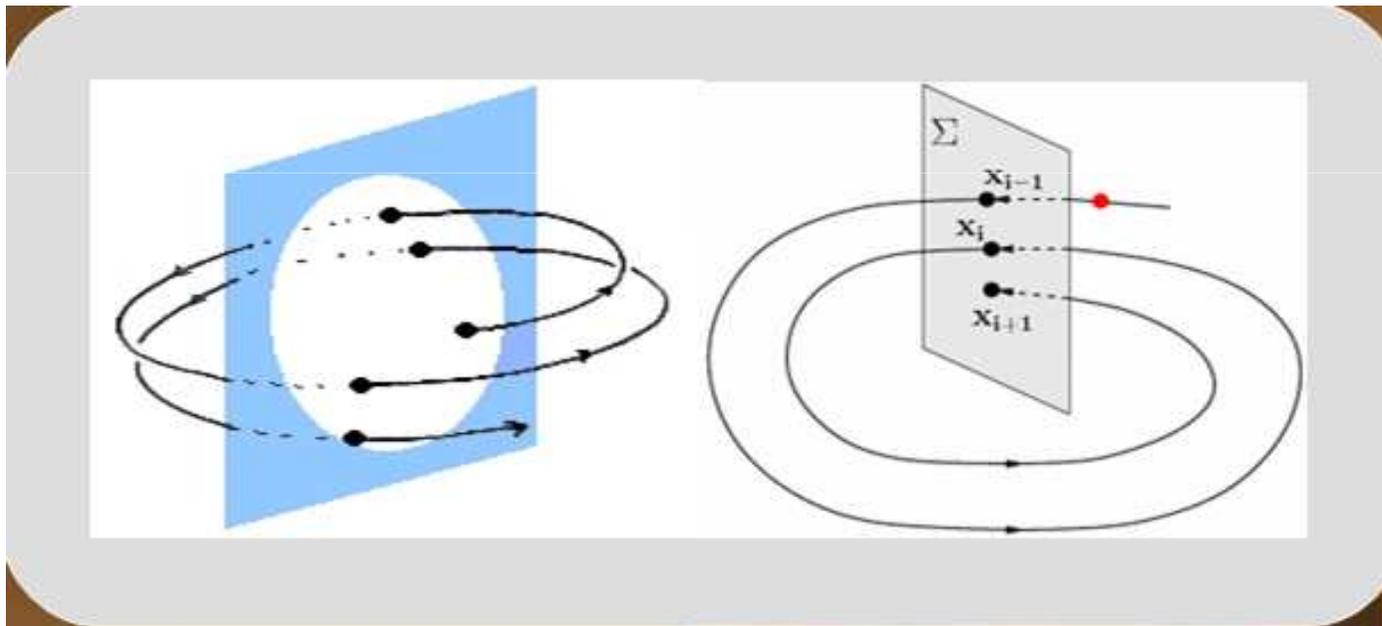
$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y) , \quad \frac{dy}{dt} = f_2(x, y) , \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

Critère de Dulac (Généralisation de celui de Bendixson)

Soit $B(x, y)$ une fonction scalaire définie sur un domaine simplement connexe Ω . Si $(\partial(Bf_1)/\partial x + \partial(Bf_2)/\partial y)$ n'est pas identiquement nulle et ne change pas de signe dans Ω , alors le système (1) n'a pas de solutions périodiques dans Ω .

Section et application de Poincaré

146



Stabilité orbitale

147

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (1)$$

Etant donné le système autonome (1) avec une solution périodique $x(t)$, une transversale S et une application de Poincaré P de point fixe $x(0) = a$, la solution $x(t)$ est (orbitalement) stable si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta(\varepsilon)$ tel que, pour tout x_0 dans S ,

$$\|x_0 - a\| \leq \delta \rightarrow \|P^n(x_0) - a\| \leq \varepsilon, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Stabilité asymptotique

148

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (1)$$

Etant donné le système autonome (1) avec une solution périodique $x(t)$, une transversale S et une application de Poincaré P de point fixe $x(0) = a$, la solution $x(t)$ est asymptotiquement stable si elle est stable et s'il existe un δ tel que, pour tout x_0 dans S ,

$$\|x_0 - a\| \leq \delta \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P^n(x_0) = a$$

Solutions périodiques (Rappel)

149

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (1)$$

Une solution non constante $x(t)$ est dite périodique s'il existe un $T > 0$ tel que

$$x(t + T) = x(t) \quad \text{pour tout } t,$$

la période d'une telle solution étant le plus petit T vérifiant la relation de périodicité ci-dessus.

$x([0, T])$ est l'orbite périodique γ (ou cycle) associée à la solution périodique. γ n'est alors pas un point d'équilibre et l'on a $\varphi_T(x) = x$ pour tout x dans γ , φ_t étant le flot associé au système dynamique (1). Il s'en suit que $\varphi_{nT}(x) = x$ pour tout x dans γ , $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Ensembles invariants

150

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (1)$$

Une partie A de Ω est dite positivement (resp. négativement) invariante si et seulement si

$$\varphi_t(A) \subset A \quad \text{pour tout } t > 0 \quad (\text{resp. } t < 0)$$

Une trajectoire est alors un ensemble invariant et c'est l'exemple le plus simple d'un tel ensemble.

Points et ensembles limites

151

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (1)$$

$y \in \Omega$ est dit un point ω – limite de $x \in \Omega$ s'il existe une suite croissante $(t_n)_n$ tendant vers l'infini telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{t_n}(x) = y$$

L'ensemble de tous les points ω – limites de x est l'ensemble ω – limite $L_\omega(x)$.

On définit les points α – limites et l'ensemble α – limite $L_\alpha(x)$ en remplaçant $t_n \rightarrow \infty$ par $t_n \rightarrow -\infty$ dans la définition ci-dessus.

Par un ensemble limite on désigne un ensemble de la forme $L_\omega(x)$ ou $L_\alpha(x)$.

Formulation équivalente

152

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (1)$$

$$L_{\omega}(x) = \bigcap_{t \geq 0} \overline{\{\varphi_s(x), s \geq t\}} \quad \text{et} \quad L_{\alpha}(x) = \bigcap_{t \leq 0} \overline{\{\varphi_s(x), s \leq t\}}$$

En d'autres termes, $L_{\omega}(x)$ (resp $L_{\alpha}(x)$) est l'ensemble des points adhérents à (la trajectoire)

$$\gamma(x) = \{\varphi_t(x), t \text{ dans } \mathbb{R}\}$$

au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Quelques exemples

153

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (1)$$

- *Si x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable, $\{x_0\}$ est l'ensemble ω – limite de tout point dans son bassin d'attraction (domaine positivement invariant).*
- *Tout point d'équilibre est son propre ensemble ω – limite et α – limite.*
- *Une orbite périodique est l'ensemble ω – limite et α – limite de chacun de ses points.*
- *L'oscillateur de van der Pol admet une orbite périodique unique γ ; elle tient lieu d'ensemble ω – limite de tout point à l'exception de l'origine. Ce dernier est l'ensemble α – limite de tout point à l'intérieur de γ . Si x est à l'extérieur de γ , $L_\alpha(x)$ est vide.*

Quelques propriétés

154

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n \quad (1)$$

- *Si x et y sont situés sur la même trajectoire, alors $L_\omega(x) = L_\omega(y)$. De même pour les α – limites*
- *Un ensemble limite est fermé dans Ω et invariant sous l'action du flot. De plus, si $\gamma^+(x)$ (resp. $\gamma^-(x)$) est bornée, $L_\omega(x)$ (resp. $L_\alpha(x)$) est compact, connexe et non vide.*
- *Un ensemble fermé invariant, en particulier un ensemble limite, contient les ensembles ω – limite et α – limite de chacun de ses points.*

Théorème de Poincaré-Bendixson

155

$$\frac{dx}{dt} = f_1(x, y) , \quad \frac{dy}{dt} = f_2(x, y) , \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (1)$$

Un ensemble limite non vide compact du système bidimensionnel (1), supposé de classe C^1 , ne contenant pas de points d'équilibre est une orbite périodique.

En d'autres termes, un tel ensemble est soit une trajectoire périodique soit une union de points d'équilibre et de trajectoires reliant ces points.

L'orbite périodique est dite cycle limite si c'est un $L_\omega(x)$ ou un $L_\alpha(x)$ pour un x n'appartenant pas à l'orbite.

Application aux systèmes de Liénard

156

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + x = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

En supposant que

a) $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ est une fonction impaire,

b) $F(x) \rightarrow +\infty$ quand $x \rightarrow +\infty$ et il existe une constante $\beta > 0$ telle que pour $x > \beta$, $F(x) > 0$ et est monotone croissante,

c) il existe une constante $\alpha > 0$ telle que pour $0 < x < \alpha$, $F(x) < 0$,

on montre que l'équation de Liénard a au moins une solution périodique. Si, de plus, $\alpha = \beta$, il existe une et une seule solution périodique dont l'orbite associée est l'ensemble ω -limite (et donc un cycle limite) de toutes les orbites à l'exception du point d'équilibre $(0,0)$.

Notion de bifurcation

Une *bifurcation* d'un système dynamique est un changement qualitatif brusque de son portrait de phase , changement produit lors de variations des paramètres.

Une bifurcation peut alors être vue comme une défaillance dans la stabilité structurelle d'un système.

Mathématiquement, donnant un système dynamique

$$\dot{x} = f_{\lambda}(x) , \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

f_{λ} étant un champ de vecteurs suffisamment régulier dépendant du vecteur-paramètres $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^p$, $\lambda = \lambda_0$ en est une valeur de bifurcation si pour les valeurs arbitrairement voisines de λ_0 , la dynamique du système (1) est topologiquement non équivalente à celle du système

$$\dot{x} = f_{\lambda_0}(x)$$

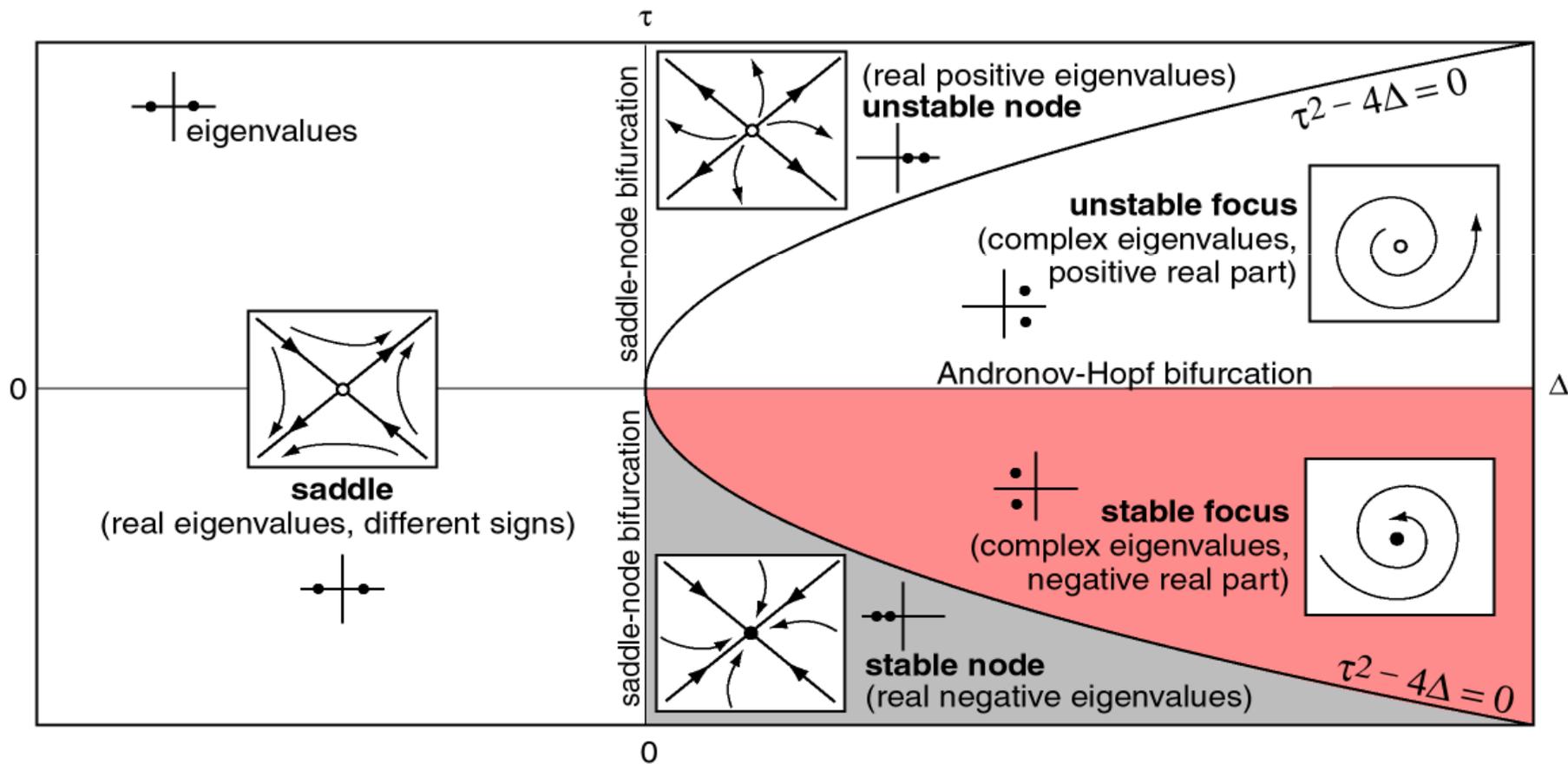
Diagramme de bifurcation

Comme exemple de bifurcations, le nombre ou la stabilité de points d'équilibre ou de solutions périodiques peut changer par perturbation de λ_0 .

Un des buts de la théorie des bifurcations est alors de produire un *diagramme de bifurcations* partitionnant l'espace des paramètres en des zones correspondant chacune à des dynamiques topologiquement équivalentes du système (1), les bifurcations ayant lieu dès lors aux frontières de ces zones.

Exemple

159



Théorème de Kupka-Smale

160

Un point de départ pour classifier les types de bifurcations est le théorème de Kupka-Smale présentant trois propriétés génériques des champs de vecteurs:

- points d'équilibre hyperboliques;
- solutions périodiques hyperboliques;
- intersections transversales des variétés stables et instables.

Différentes défaillances dans ces 3 propriétés mènent à différents types de bifurcations.

Codimension d'une bifurcation

161

La *codimension* d'une bifurcation est le nombre minimum d'équations algébriques caractérisant cette bifurcation,

les bifurcations de codimension 1 (une des trois conditions n'est pas satisfaite) étant alors le premier niveau de types de bifurcations dont:

- Points d'équilibre:
 - Bifurcation col-nœud
 - Bifurcation d'Andronov-Hopf
- Solutions périodiques:
 - Bifurcation de doublement de période (Flip bifurcation)
- Bifurcations globales ...

Bifurcation col-noeud

162

Une bifurcation col-noeud est une collision et disparition de deux points d'équilibre.

Cette bifurcation a lieu lorsque le point d'équilibre critique admet une linéarisation à valeur propre nulle.

Mathématiquement, donnant le système dynamique

$$\dot{x} = f_\lambda(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

admettant l'origine comme point d'équilibre pour $\lambda = 0$ et tel que

$$0 \in Sp \{Df_0(0)\} \text{ , valeur propre simple,}$$

alors, génériquement, au moment où λ s'annule, deux points d'équilibre collisionnent en formant un col-noeud critique, puis disparaissent.

Cette bifurcation est caractérisée par une seule condition (donc de codimension 1)

et apparaît en général chez les familles de champs de vecteurs à un paramètre, l'origine en étant une valeur singulière multiple ou encore racine multiple de l'équation

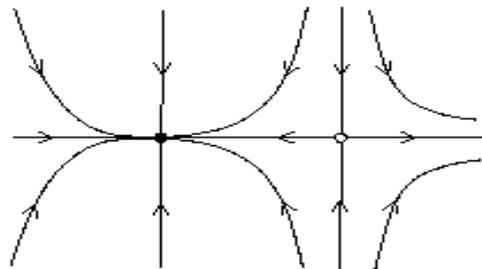
$$f_0(x) = 0$$

Exemple

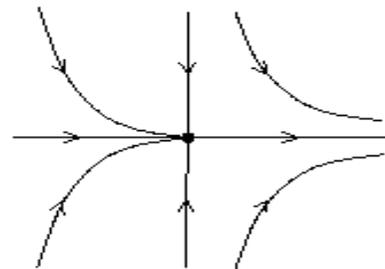
163

Bifurcation col-nœud dans le plan du système

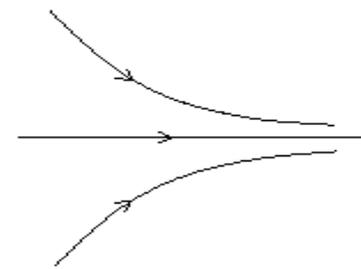
$$\begin{cases} \dot{x} = \beta + x^2 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$$



$\beta < 0$



$\beta = 0$



$\beta > 0$

Bifurcation d'Andronov-Hopf

164

La bifurcation d'Andronov-Hopf est la naissance d'un cycle limite à partir d'un point d'équilibre lorsque celui-ci change de stabilité via une paire de valeurs propres imaginaires pures.

Une telle bifurcation peut-être super-critique ou sous-critique selon qu'elle donne naissance à un cycle limite stable ou instable.

Mathématiquement, donnant le système dynamique

$$\dot{x} = f_\lambda(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

admettant la famille de points d'équilibre x_0^λ
pour $|\lambda|$ suffisamment petit et tel que

$$\lambda_{1,2} = \mu_\lambda \pm i\omega_\lambda \in Sp \{Df_\lambda(x_0^\lambda)\}, \quad \text{avec } \mu_0 = 0 \text{ et } \omega_0 > 0,$$

alors, génériquement, au moment où λ s'annule,
le point d'équilibre x_0^0 change de stabilité,
bifurquant en un unique cycle limite.

Cette bifurcation est caractérisée par une seule condition $\text{Re } \lambda_{1,2} = 0$
(donc de codimension 1)

et apparaît en général chez les familles de champs de vecteurs
à un paramètre, suffisamment réguliers.

Exemple

165

Si l'on considère le système

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= \beta y_1 - y_2 + \sigma y_1(y_1^2 + y_2^2) \\ \dot{y}_2 &= y_1 + \beta y_2 + \sigma y_2(y_1^2 + y_2^2) \end{cases} \quad \text{où } \sigma = \pm 1,$$

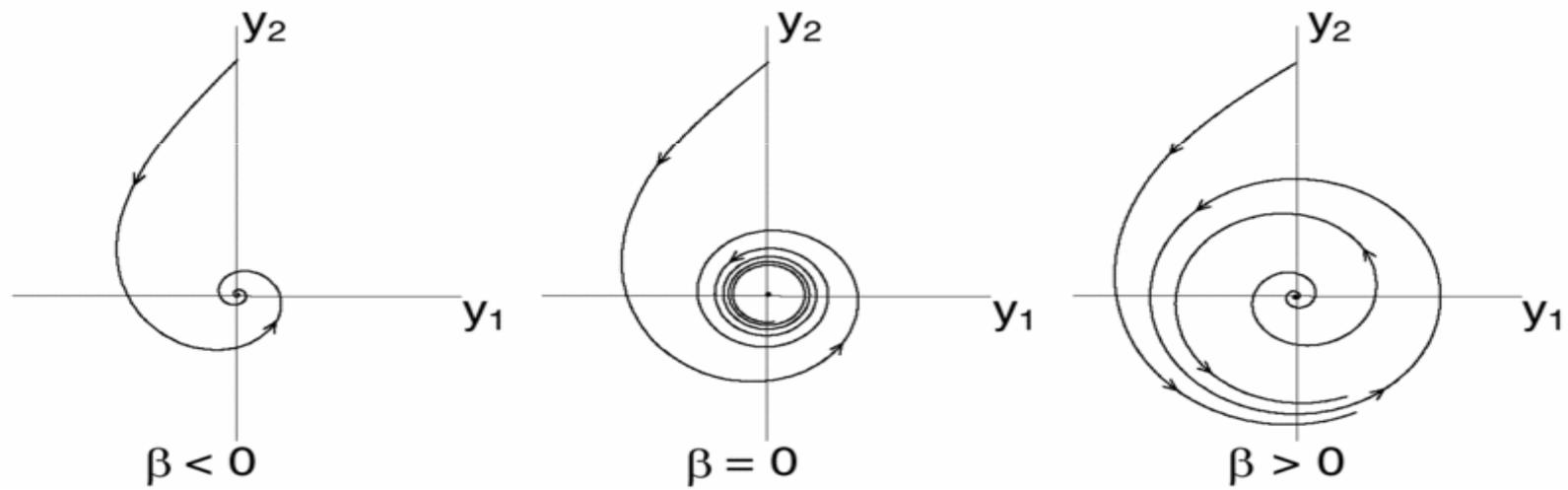
nous avons, pour $\sigma = 1$, un équilibre à l'origine asymptotiquement stable pour $\beta \leq 0$ (stable à $\beta = 0$) et instable pour $\beta > 0$, bifurquant dans ce cas en un unique cycle limite circulaire stable.

Il s'agit d'une bifurcation super-critique d'Andronov-Hopf.

Pour $\sigma = -1$, une bifurcation sous-critique d'Andronov-Hopf se produit pour $\beta < 0$.

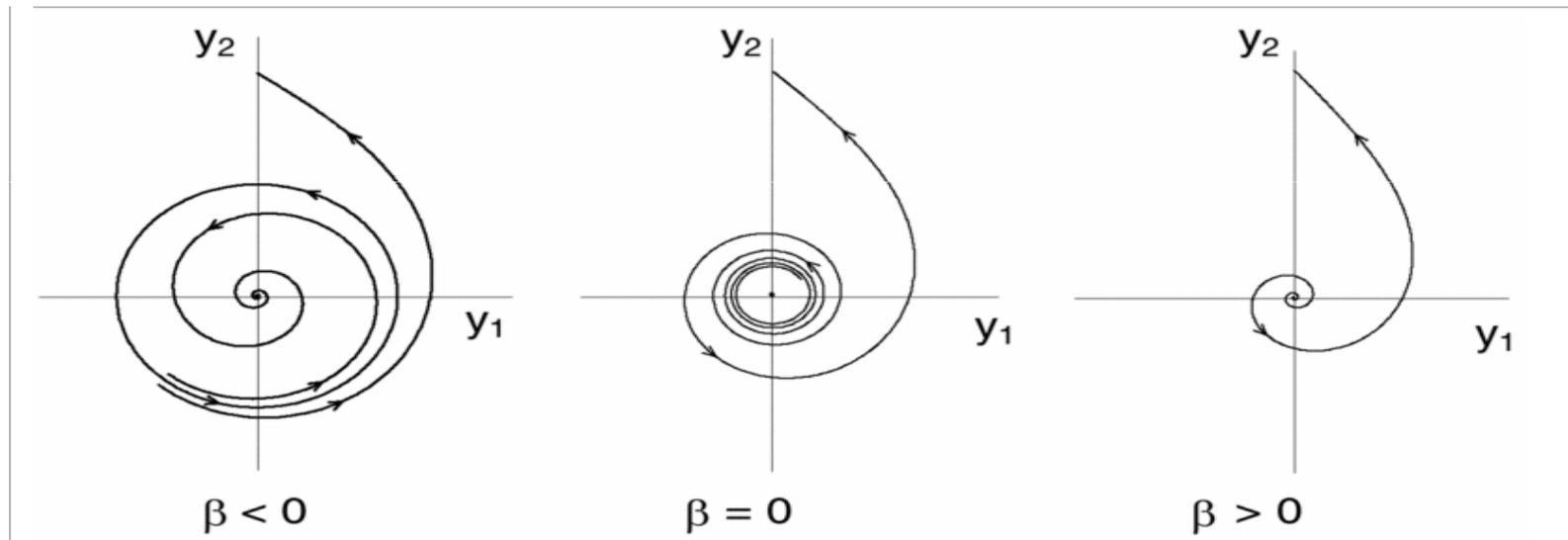
Cas super-critique

166



Cas sous-critique

167



Bifurcation de (dé)doublément de période

Route vers le chaos - Exemple de la suite logistique $x_{n+1} = \lambda x_n (1 - x_n)$

Diagramme: Ensembles w-limites en fonction de λ

168

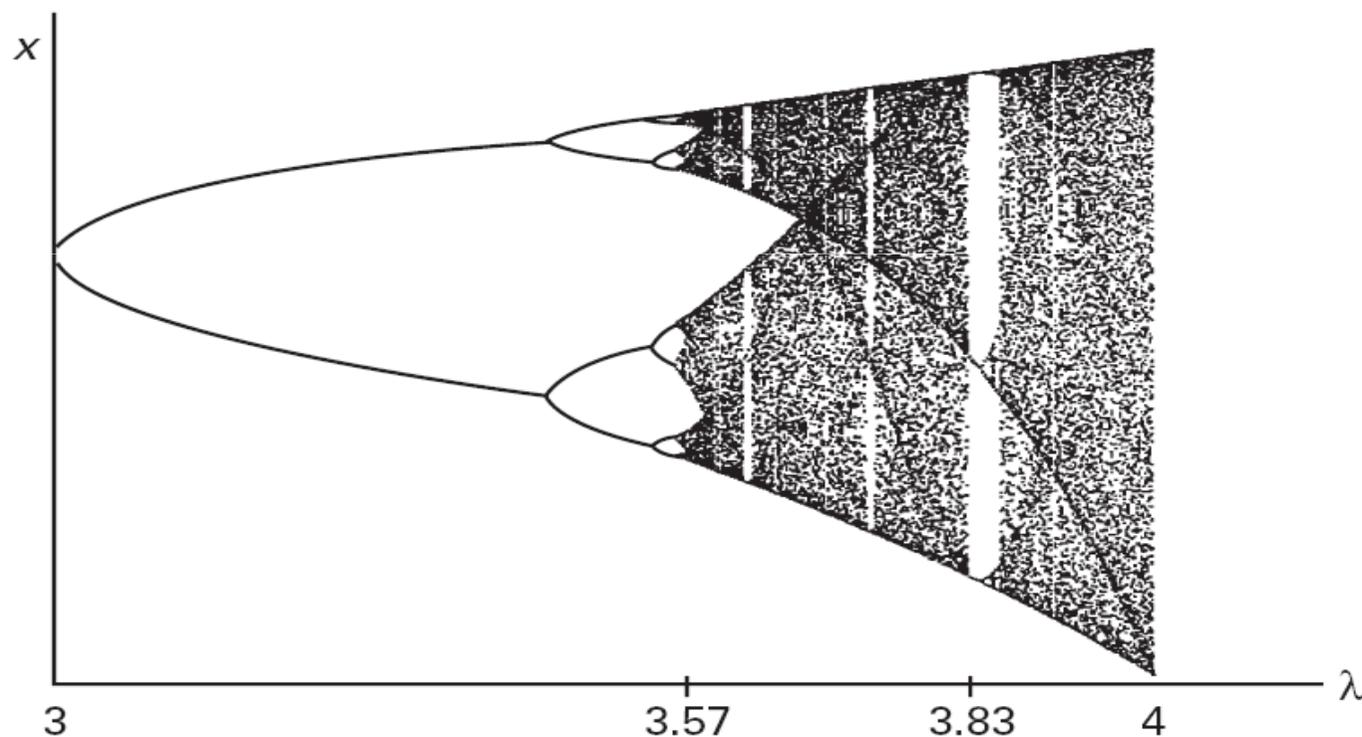


Image Wikipédia

Vers l'attracteur étrange

Invariance

169

Rappelons qu'étant donné un système dynamique

$$\dot{x} = f(x) , \quad x \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n ,$$

un ensemble $E \subset \mathcal{U}$ est *invariant* si

$$\forall x \in E, \varphi_t(x) \in E \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Vers l'attracteur étrange

Densité

170

Une orbite est *dense* dans E si chaque point de E est la limite d'une suite de points situés sur l'orbite.

Vers l'attracteur étrange

L'effet papillon

171



On dit qu'un ensemble E invariant, fermé et borné montre une *infime sensibilité aux conditions initiales* si

$$\exists \delta > 0 \text{ tq } \forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in E \text{ tq}$$

$$\|x - y\| < \varepsilon \implies \|\varphi_t(x) - \varphi_t(y)\| > \delta \text{ pour un } t > 0.$$

Vers l'attracteur étrange

Ensemble chaotique

172

E est dit *chaotique* s'il montre une infime sensibilité aux conditions initiales, E contenant plus d'une orbite dont l'une au moins y est dense.

Vers l'attracteur étrange

Ensemble attracteur

173

E est un *ensemble attracteur* s'il en existe un voisinage $\mathcal{V}(E)$ tq

$$x \in \mathcal{V}(E) \implies \varphi_t(x) \in \mathcal{V}(E) \quad \forall t \geq 0$$

En d'autres termes, un ensemble est attracteur s'il admet un voisinage positivement invariant.

Vers l'attracteur étrange

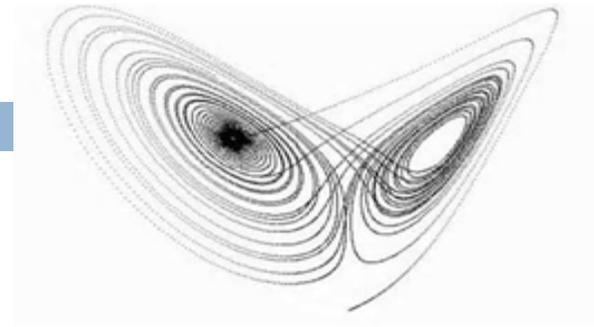
Attracteur

174

Un *attracteur* est un ensemble attracteur
avec une orbite dense.

L'attracteur étrange

175



Un attracteur chaotique est dit *attracteur étrange*.
C'est la signature même du chaos et est à bien des égards
l'outil principal pour brouter des informations en cryptographie chaotique ...

Concernant les épreuves d'examen ..

Le cours sur les systèmes dynamiques chaotiques pour le chiffrement (Master C2SI) ainsi que celui sur les méthodes avancées en théorie qualitative des équations différentielles (Master MA - Parcours IMM) ne font que commencer. Ci-après le portrait-robot d'une épreuve d'examen pour le niveau S6 de la filière SMA. Tout étudiant assidu le trouvera relativement simple et pourra s'essayer aux premières parties des épreuves (en trois heures) du niveau master (disponibles sur le site de l'Etablissement). Bon courage !

Université Mohammed V – Faculté des Sciences – Rabat
Filière SMA – Sixième Semestre
2017 – 2018

Théorie qualitative des équations différentielles

Contrôle final (1h30') – Mai 2018

Pour étudier la stabilité ou la nature d'un point d'équilibre, on justifiera toujours le passage du système linéarisé au système non linéaire.

Exercice 1.

On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= y + x(1 - \sqrt{x^2 + y^2})(\sqrt{x^2 + y^2} - 2) \\ \dot{y} &= -x + y(1 - \sqrt{x^2 + y^2})(\sqrt{x^2 + y^2} - 2) \end{cases}$$

1. Vérifier que l'origine est le seul point d'équilibre puis déterminer sa nature.
2. Soit \mathcal{B} la fonction définie par

$$\mathcal{B}(x, y) := \frac{1}{(1 - \sqrt{x^2 + y^2})(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)}$$

En utilisant le critère adéquat, montrer qu'il n'existe pas de cycle limite dans le disque

$$\mathcal{D} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leq \frac{1}{4}\}$$

3. On considère l'anneau

$$\mathcal{A} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{3}{2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{5}{2}\}$$

a) Montrer que \mathcal{A} est un domaine attractant.

Indication: on pourra utiliser les coordonnées polaires.

b) En utilisant le théorème adéquat, prouver l'existence d'un cycle limite \mathcal{C} entièrement contenu dans \mathcal{A} .

4. Etudier la stabilité du cycle limite \mathcal{C} .

Exercice 2.

Considérons le modèle prédateur-proie, défini dans le quadrant positif du plan par le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(1-x) - \alpha \frac{xy}{\gamma+x} \\ \dot{y} &= -\mu y + \beta \frac{xy}{\gamma+x} \end{cases}$$

α, β, γ et μ étant des paramètres réels strictement positifs.

1. Justifier que, pour toute donnée initiale $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$, il existe localement une et une seule solution passant par (x_0, y_0) .
2. Montrer que les sous-ensembles $\{0\} \times \mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_+^* \times \{0\}$ sont invariants sous l'action du flot du système.
3. Déterminer la nature des points d'équilibre axiaux $E_0(0, 0)$ et $E_1(1, 0)$.
4. Déterminer le point d'équilibre positif $E^*(x^* > 0, y^* > 0)$ en précisant la condition nécessaire et suffisante de son existence.
5. Que représente la condition d'existence de E^* pour la stabilité de E_1 ?
6. Etudier la stabilité de E^* puis discuter de sa nature en fonction de x^* et y^* .