Université Mohammed V - Agdal
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique
Avenue Ibn Batouta, B.P. 1014
Rabat, Maroc

Filière DEUG :

Sciences Mathématiques et Informatique (SMI)
et
Sciences Mathématiques (SM)

Module Mathématiques I

NOTES de cours d'Analyse I

Chapitre IV :
Fonctions réelles à une variable réelle.
Formule de Taylor, Dévelopements Limités et Calcul de Limite

Par

Saïd EL HAJJI
Groupe d'Analyse Numérique et Optimisation
Email : elhajji@fsr.ac.ma

et

Samir HAKAM
Email : s-hakam@fsr.ac.ma

Année 2003-2004

Chapitre IV : Fonctions réelles à une variable réelle. Formule de Taylor, Dévelopements Limités et Calcul de Limite[1]

Objectif du chapitre :

Connaitre et utiliser la formule de Taylor et sesvaraiantes

Connaitre et utiliser les développements limites

Savoir calculer la limite de fonction, construite à partir des fonctions usuelles, par des dévelopements limités.

Plan du chapitre :

1) Introduction au calcul de limites :

Définition : Dans le calcul des limites, on appelle Forme Indéterminée (on note F.I.), toute situation qui conduit à un cas où les théorémes portant sur les opérations sur les limites ne permettent pas de conclure. Les formes indéterminées les plus courantes sont :

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty^0, -\infty + \infty, 1^\infty, 0^0, 0^\infty, \text{ etc ....}$$

Le résultat dépend des fonctions.
Par exemple si $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x$ alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, on dit que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sin(x)}{x}$ est une forme indéterminée de la forme $\frac{0}{0}$. Car cette limite ne peut être déterminer directement d'où le nom FI. Elle l'est par définition de la dérivée $(\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\sin(0)}{x-0} = (\sin x)'_{x=0} = \cos(0) = 1)$ et $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

---
[1]S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI &SM

Exemples de Formes indéterminés [2]:

1) F.I.$0 \times \infty$: $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \frac{1}{x}$. Quand $x \to 0$, le calcul de $\lim_{x\to 0} f(x)g(x)$ fait intervenir le produit $0 \times \infty$ qui ne peut être déterminé puique cela dépend des fonctions f et g.D'où le nom de forme indéterminée de la forme $0 \times \infty$. Cependant

$$\lim_{x\to 0} f(x)g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

(par définition de la dérivée de la fonction $\sin(x)$ en 0).

2) F.I. $\frac{\infty}{\infty}$: $f(x) = \log(x)$ et $g(x) = \frac{1}{x}$.Quand $x \to +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ fait apparaitre une forme indéterminée de la forme $\frac{+\infty}{+\infty}$. Mais,d'aprés la régle de l'Hospital,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x} = 0 \text{ car } \lim_{x\to+\infty} \frac{(\log(x))'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

3) F.I. $\infty - \infty$:

a) $f(x) = \log(x)$ et $g(x) = -x$. Quand $x \to +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} (f(x) + g(x))$ fait apparaitre une forme indéterminée de la forme $+\infty - \infty$.Cependant

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to+\infty} (\log(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} x(\frac{\log(x)}{x} - 1) = -\infty$$

car $\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x)}{x} = 0$.

b) $f(x) = \sqrt{x+1}$ et $g(x) = \sqrt{x}$. Quand $x \to +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - g(x))$ fait apparaitre une forme indéterminée de la forme $+\infty - \infty$. Mais

$$f(x) - g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

(on dit que l'on a multiplié par l'expression conjuguée)

Ainsi $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)) = \lim_{x\to+\infty} (\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}) = 0$.

4) F.I. 1^∞ : $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ et $g(x) = x$. Quand $x \to +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} (f(x)^{g(x)})$, fait apparaitre une forme indéterminée de la forme 1^∞.

Pour calculer cette limite, on va passer au *log*.

[2]S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI &SM

Si on pose $y = f(x)^{g(x)} = (1 + \frac{1}{x})^x$, alors pour tout $x > 0, y > 0$.
Ainsi $\log(y) = \log(1 + \frac{1}{x})^x = x\log(1 + \frac{1}{x})$.
Tout revient revient à étudier $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\log(x + \frac{1}{x}))$.
On pose $u = \frac{1}{x}$,il faut donc déterminer $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\log(1+u)}{u}$.
On a $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\log(1+u)}{u} = 1$ car c'est la dérivée de la fonction $\log(1 + u)$ en 0.
Donc le limite cherchée vaut e.

Ces différents exemples donnent un apercu des méthodes dont on dispose actuellement pour résoudre (on dit lever ou contourner) ces formes indéterminées. Ces méthodes sont du genre "astuces" ou utilisent la définition de la dérivée ou la régle de l'Hospital.

Définition : Déterminer la limite quand on a une forme indéterminée s'appelle "lever l'indétermination".

Dans ces formes indéterminées, il est remarquable de constater qu'il n'y a problème que quand les fonctions concernées tendent vers 0 ou ∞ ou se raménent à ces cas.

Définition [3]:
Une fonction qui tend vers 0 est appelée "un infiniment petit".
Une fonction qui tend vers ∞ est appelée "un infiniment grand".

La régle de l'Hospital permet de résoudre un tres grand nombre de Formes Indéterminés (toutes celles de la forme $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ et toutes celles qui s'y raménent). Mais elle a quelques inconvénients :

1 - Avant de l'appliquer, il faut savoir si l'on est dans des cas d'application de cette régle ou de ses généralisations.

2 - Il faut calculer des dérivées de fonctions

3 - Son utilisation demande parfois des astuces dans la façon d'écrire le quotient et il peut être nécessaire de transformer ce quotient avant de lui appliquer cette régle.

4 - Elle ne marche toujours pas .

L'étude de $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin(\frac{1}{x})$ ne se fait pas par la régle de l'Hospital.

Cependant, $\forall x \in IR, -1 \leq \sin(x) \preceq 1$ donc $\forall x \in IR^*, -x^2 \leq x^2\sin(\frac{1}{x}) \preceq x^2$
$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}x^2\sin(\frac{1}{x}) = 0$.

[3]S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI &SM

Il est donc nécessaire d'avoir une méthode plus systématique. Nous allons fournir les moyens d'étudier la limite de trés nombreuse fonctions par une méthode générale basée sur le calcul des dévelopements limités.

2) Formule de Taylor et Variantes [4]:

2.1 : Formules de Taylor et Mac-Laurin.

Définition : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

i) On dit que f est continûment dérivable sur I si elle est dérivable et sa dérivée f' est continue sur I.

ii) On dit que f est n fois continûment dérivable sur I si elle est dérivable n fois et que ses dérivées f', f'', $\cdots$, $f^{(n-1)}$, $f^{(n)}$ sont continues sur I, $(n \in \mathbb{N})$. On dira que la fonction f est de classe C^n.

Si f est un polynôme de degré n càd

$$f(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0.$$

On a : $f(0) = a_0$.
Or $f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ...2a_2 x + a_1 \Rightarrow f'(0) = a_1$.
De même

$$f''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + ... + 2a_2 \Rightarrow f''(0) = 2a_2.$$

De façon générale, et aprés k itérations, (par récurrence) on voit que

$$f^{(k)}(0) = k!a_k$$

Ainsi les coefficients du polynômes s'expriment ne fonction des dérivées successives pour $x = 0$ et l'on a :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Peut-on généraliser cette propriété à une fonction f "quelconque"?
D'aprés le théoréme des Acroissements Finis, on sait que si f est une fonction continue dans $[0, x]$ et est dérivable dans $]0, x[$, il existe $c \in]0, x[: f(x) = f(0) + cf'(c)$.
Plus généralement, on a :

[4] S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI &SM

Théoréme de Taylor :

Soit f une fonction définie sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ telle que

i) f est n fois continûment dérivable sur le segment $[a, b]$.

ii) $f^{(n+1)}$ existe et est définie sur l'ouvert $]a, b[$.

Alors il existe au moins un $c \in]a, b[$ telle que

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + .. + \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + .. + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}($$

Remarques [5]*:*

1) Si $n = 0$, *on retrouve la formule des Accroissement finies :* $f(b) = f(a) + (b-a)f'(c)$.

2) Cette égalité est appelée Formule de Taylor - Lagrange ou Formule de Taylor (on note F.T.) à l'ordre $(n+1)$ *dans* $[a, b]$.

La formule de Taylor est valable sur l'intervalle $[a, b]$

3) $R_n = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$ *est appelé reste de Lagrange.*

Si f *est un un polynôme de degré* n, *le reste* R_n *est nul.*

Preuve :

On considère la fonction polynômiale suivante:

$$P_n(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

on a degré de $P_n = n$.

On remarque que $P_n(a) = f(a)$

$$P_n'(x) = f'(a) + (x-a)f''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{(k-1)}}{(k-1)!} f^{(k)}(a) + \cdots + \frac{(x-a)^{(n-1)}}{(n-1)!} f^{(n)}(a)$$

$P_n'(a) = f'(a)$

$p_n''(a) = f''(a), \cdots, P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a), \cdots, P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)$

P_n peut s'écrire sous la forme

$$P_n(x) = P_n(a) + (x-a)P_n'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} P_n''(a) + \cdots + \frac{(x-a)^k}{k!} P_n^{(k)}(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!} P_n^{(n)}(a)$$

On considère la fonction φ_n définie par

$$\varphi_n(x) = f(x) - P_n(x) - \alpha_n \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} \Longrightarrow \varphi_n(a) = 0$$

[5] S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI &SM

où α_n est une constante réelle choisie de telle sorte que

$$\varphi_n(b) = f(b) - P_n(b) - \alpha_n \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

φ_n est définie continue sur le segment $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, on a

$$\varphi_n(a) = \varphi_n(b) = 0$$

Théorème de Rolle: il existe au moins une valeur $c_n \in]a, b[$ telle que

$$\varphi_n'(c_n) = 0$$
$$\varphi_n'(x) = f'(x) - P_n'(x) - \alpha_n \frac{(x-a)^n}{n!}$$

Appliquant encore une fois de plus le Théorème de Rolle sur la fonction φ_n' qui est définie continue sur le segment $[a, c_n]$ et dérivable sur $]a, c_n[$, on a

$$\varphi_n'(a) = \varphi_n'(c_n) = 0$$

donc il existe au moins une valeur $c_{n-1} \in]a, c_n[$ telle que

$$\varphi_n''(c_{n-1}) = 0$$
$$\varphi_n''(x) = f''(x) - P_n''(x) - \alpha_n \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$\vdots$$

il existe au moins une valeur $c_1 \in]a, c_2[$ telle que

$$\varphi_n^n(c_1) = 0$$
$$\varphi_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - P_n^{(n)}(x) - \alpha_n(x-a)$$

Appliquant le Théorème de Rolle sur la fonction $\varphi_n^{(n)}$ qui est définie continue sur le segment $[a, c_1]$ et dérivable sur $]a, c_1[$, on a

$$\varphi_n^{(n)}(a) = \varphi_n^{(n)}(c_1) = 0$$

donc il existe au moins une valeur $c \in]a, c_1[$ ($c \in]a, c_1[\subset]a, b[\Longrightarrow c \in]a, b[$) telle que

$$\varphi_n^{(n+1)}(c) = 0$$
$$\varphi_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - P_n^{(n+1)}(x) - \alpha_n$$

degré de $P_n = n \Longrightarrow P_n^{(n+1)}(x) = 0 \Longrightarrow \varphi_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - \alpha_n$ donc

$$\varphi_n^{(n+1)}(c) = 0 \Longrightarrow f^{(n+1)}(c) = \alpha_n$$

d'où

$$\varphi_n(x) = f(x) - P_n(x) - \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

$$\Longrightarrow \varphi_n(b) = f(b) - P_n(b) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) = 0$$

car α_n a été choisie de telle sorte que $\varphi_n(b) = 0$

$$f(b) = P_n(b) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) :: c \in]a, b[$$

d'où la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $(n+1)$

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + .. + \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + .. + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}($$

Autre écriture de la formule de Taylor à l'ordre $(n+1)$ [6]:

En posant $b - a = h \Longrightarrow b = a + h$

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \quad c \in]a, a+h[$$

Autre forme de la formule de Taylor à l'ordre $(n+1)$:

$c \in]a, a+h[\Longrightarrow\ 0 < c - a < h\ ,\ 0 < \dfrac{c-a}{h} < 1 \Longrightarrow \exists\ \theta\ \in]0, 1[\ ,\ \theta = \dfrac{c-a}{h} \Longrightarrow c = a + \theta\ h$

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta\ h)\ ,\ \theta \in]0, 1$$

[6] S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI &SM

Formule de Mac-Laurin :
C'est le cas particulier où $a = 0$

$$f(x) = f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)\ ,c\in]0,x[$$

$$f(x) = f(0)+\frac{x}{1!}f'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^k}{k!}f^{(k)}(0)+\cdots+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta\ x)\ ,\theta\in]0,1[$$

2.2 - Exemples:

Formules de Taylor (et de Mac-Laurin) de quelque fonctions usuelles. Toutes ces formules sont valables pour x au voisinage de 0. Pour les obtenir au voisinage de a,il suffit de poser $x = x - a$.

1) $f(x) = e^x$. Comme $f^{(n)}(x) = e^x$ et $f^{(n)}(0) = 1$, on a :

$$e^x = 1 + x + \tfrac{x^2}{2!} + ... + \tfrac{x^n}{n!} + Ax^{n+1} \text{ avec } A = \tfrac{e^c}{(n+1)!} \text{ et } 0 < c < x$$

2) $f(x) = \sin(x)$. On a

$$f'(x) = \cos(x), f''(x) = -\sin(x),$$
$$f^{(2p)}(x) = (-1)^p \sin(x), f^{(2p+1)}(x) = (-1)^p \cos(x)$$

donc $f^{(2p)}(0) = 0$ et $f^{(2p+1)}(0) = 1$. Ainsi

$$sin(x) = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} + ... + \tfrac{(-1)^p}{(2p+1)!}x^{2p+1} + Ax^{2p+2}.$$

3) De même $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{(-1)^p}{(2p)!}x^{2p} + Ax^{2p+1}$.

4) $f(x) = \frac{1}{1-x}$. On a :

$$f\prime(x) = \tfrac{1}{(1-x)^2}, ..., f^{(n)}(x) = \tfrac{n!}{(1-x)^{n+1}} \text{ donc } f^{(n)}(0) = n!.$$

Ainsi :

$$\tfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + Ax^{n+1} \text{ avec } A = \tfrac{1}{(1-c)^{n+2}.}$$

5) Si $|x| < 1, f(x) = \log(1-x)$ est bien définie et on a :

$$f'(x) = \frac{1}{1-x},\ ...,\ f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n} \text{ donc } f^{(n)}(0) = (n-1)!.$$

Ainsi pour $|x| < 1$,

$$\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + Ax^{n+1} \text{ avec A=}\frac{1}{n(1-c)^{n+1}}.$$

6) Pour tout $\alpha \in IR$, soit $f(x) = (1+x)^\alpha$ (on suppose que α n'est pas un entier positif sinon f est polynôme).
On a :
$f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, ...,$(et par recurrence) $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}$.
donc $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))$
et $\exists c \in]0, x[$:

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + Ax^{n+1} \text{ avec}$$
$$A = \alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)(1+c)^{\alpha-n-1}$$

a) $\alpha = 1$: $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + Ax^{n+1}$.
b) $\alpha = \frac{1}{2}$: $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8} + ... + \frac{(-1)n-1}{2n-1}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{x^n}{2^{2n}} + Ax^{n+1}$.

2.3 - Application de la Formule de Taylor au Calcul numérique [7]:

Si f est une fonction de classe C^{n+1} au voisinage de a :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)\ ,\ \theta \in]0,1[$$

On suppose connue les valeurs $f(a)$, $f'(a)$, $\cdots$, $f^{(n)}(a)$.
On prend pour valeur approchée de $f(a+h)$ la valeur

$$f(a) + hf'(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

Si on pose,

$$g(a) = f(a) + hf'(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

[7] S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI &SM

L'erreur commise est

$$f(a+h) - g(a) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

Comme θ est inconnu, on ne peut pas donner une valeur précise de $f^{(n+1)}(a+\theta h)$.

L'erreur commise est donnée donc par $\dfrac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h)$

$$a < a+\theta h < a+h$$

Donc, si Mest un majorant de $f^{(n+1)}(a+\theta h)$ sur $]a, a+h[$ on a

$$|f^{(n+1)}(a+\theta h)| < M$$

$$|\frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h)| < \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!} M$$

Donc $f(a+h)$ est égale à $g(a)$ avec une erreur absolue inférieur $\dfrac{|h|^{n+1}}{(n+1)!} M$

Exemple [8]:

Calculer $\sin(31°)$ à 10^{-6} prés

$$\sin(30°) = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\sin(a+h) = \sin(a) + h\cos(a) - \frac{h^2}{2}\sin(a) + \frac{h^3}{3!}\cos(a+\theta h)$$

$h = 1° = \dfrac{\pi}{180} = 0.0174$

$\cos(30°) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660$

$$\sin(31°) = 0.5 + 0.0174 \times 0.8660 - \frac{0.0174^2}{2} \times 0.5 - \frac{0.0174^3}{3!}\cos(\frac{\pi}{6} + \theta\frac{\pi}{180})$$

$$|\frac{0.0174^3}{3!}\cos(\frac{\pi}{6} + \theta\frac{\pi}{180})| < 10^{-6}$$

donc à 10^{-6} , $\sin(31°) \simeq 0.513550$.

La valeur fournie par le logiciel MATLAB est $\sin(31°) \simeq 0.51503807491005$.

[8] S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI &SM

Exercice : Calculer une approximation de Arctg (1.001) à 10^{-2} prés.

3) Développements limités.[9]**:**

Nous avons vu en **1)** quelques remarques sur le calcul des limites et quelques inconvénients de la régle de l'Hospital.

Dans cette section, nous allons développer une méthode générale pour déterminer les limites. Cette méthode est systématique et sera basée sur le calcul des dévelopements limites.

3.1 - Infiniment petit - Infiniment grand : Définitions et Notations
Soient f et g deux fonctions numériques définies au voisinage de x_0 c'est à dire définies sur $I =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ (sauf peut être en x_0)

Définition : Infiniment petit

i) On dit que $f(x)$ est un infiniment petit (on note I.P) lorsque $x \to x_0$ au voisinage de x_0 si:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

$x - x_0$ est un infiniment petit principal (I.P.P) de f quand $x \to x_0$

ii) On dit que $f(x)$ est un infiniment petit lorsque $x \to \infty$ si:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

$\frac{1}{x}$ est un infiniment petit principal de f quand $x \to \infty$.

Exemple :

$$\sin(x) \text{ est I.P lorsque } x \to 0$$
$$\frac{1}{x^2} \text{ est I.P lorsque } x \to \infty$$
$$\cos(x) \text{ est I.P lorsque } x \to \frac{\pi}{2}$$

Définition : Infiniment grand

i) On dit que $f(x)$ est un infiniment grand (I.G) lorsque $x \to x_0$ au voisinage de x_0 si:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

[9] S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI &SM

$\dfrac{1}{x - x_0}$ est un infiniment grand principal (I.G.P) de f quand $x \to x_0$.

ii) On dit que $f(x)$ est un infiniment grand lorsque $x \to \infty$ si:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

Exemple:

$$\operatorname{tg}(x) \begin{cases} \text{est I.p lorsque } x \to 0 \\ \text{est I.G lorsque } x \to \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Soient f et g deux fonctions numériques définies au voisinage de x_0 c'est à dire définies sur $I =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ (sauf peut être en x_0)

Définition : Négligeabilité

On dit que $f(x)$ est negligeable devant g au voisinage de x_0 et on note

$$f = \circ(g) \text{ (on dit que } f \text{ est gale petit o de } g \text{)}$$

s'il existe une fonction ε définie au voisinage de x_0 telque:

$$f(x) = \varepsilon(x) g(x) \text{ et que } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

On dit que $f(x)$ est negligeable devant g au voisinage de l'infini s'il existe une fonction ε définie au voisinage de l'infini tel que:

$$f(x) = \varepsilon(x) g(x) \text{ et que } \lim_{x \to \infty} \varepsilon(x) = 0$$

Remarque :

Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 on a

$$f = \circ(g) \text{ au voisinage de } x_0 \iff \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Exemple:

$$x^\alpha = \circ(x^\beta) \begin{cases} \text{au voisinage de 0 si } \alpha > \beta \\ \text{au voisinage de l'infni si } \alpha < \beta \end{cases}$$

$x^4 = \circ(x^2)$ au voisinage de 0

$x^2 = \circ(x^4)$ au voisinage de l'infini

$$\frac{x^\alpha}{x^\beta} = \frac{1}{x^{\alpha-\beta}} \begin{cases} \longrightarrow_{x\to 0} 0 \text{ si } \alpha > \beta \\ \longrightarrow_{x\to\infty} 0 \text{ si } \alpha < \beta \end{cases}$$

3.1 - Développement limité (on note D.L) [10]**:**

3.1 - Définitions, Notations:

Définition : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I contenant x_0 (sauf peut être en x_0)

On dit que f admet on D.L n au voisinage de x_0 s'il existe un polynôme $P_n(x)$ de d° $\leq n$

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

tel que

$$f(x) - P_n(x) = \circ((x - x_0)^n)$$

c'est à dire

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x)$$
$$\text{avec } \varepsilon(x) \longrightarrow 0 \text{ quand } x \to x_0$$

$P_n(x)$ est appelé partie entière ou regulière du D.L de f.
$(x - x_0)^n \varepsilon(x)$ est appelé reste du D.L de f.

Remarque :

Pour une simplification, nous utiliserons les D.L en 0*, pour obtenir un D.L en* x_0*, il suffit de poser* $x = (x - x_0)$.

Remarques fondamentales :

1) *Le développement limité est une notion locale càd si vous calculer un DL de f à l'odre* n *au voisinage de* x_0 *alors cette formule (égalité) est vraie pour tout* $x \in V(x_0)$ *uniquement.*
2) *Pour une simplification, nous utiliserons et calculerons les D.L en* 0 .
3) *Pour obtenir un D.L en* $x_0 \in IR$*, il suffit de poser* $x = (x - x_0)$.
4) *Pour obtenir un D.L en* ∞*, il suffit de poser* $x = \frac{1}{x}$.

Théorème 1 : Unicité d'un développement limité

Si f admet un D.L d'ordre n en 0 alors il est unique.

Remarque : L'unicite est à prendre dans les sens que la partie entière du DL à l'odre n *au voisinage de* 0 *est unique.*

[10] S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI &SM

Preuve :
On suppose l'inverse .

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + \circ(x^n) \ , \ \circ(x^n) = x^n\varepsilon_1(x)$$
$$f(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + \circ(x^n) \ , \ \circ(x^n) = x^n\varepsilon_2(x)$$

soit $p \leq n$ le plus petit entier telque $a_p \neq b_p$

$$0 = f - f = (a_p - b_p)x^p + (a_{p+1} - b_{p+1})x^{p+1} + \cdots + (a_n - b_b)x^b + x^n(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x))$$

en divisant par x^p on a

$$0 = (a_p - b_p) + (a_{p+1} - b_{p+1})x + \cdots + (a_n - b_b)x^{n-p} + x^{n-p}(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x))$$

lorsque $x \to 0$ on a

$$a_p - b_p = 0 \Longleftrightarrow a_p = b_p \text{ contradiction avec } a_p \neq b_p$$

d'où

$$a_i = b_i \text{ pour } i = 1 \cdots n$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon_1(x) \\ f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon_12(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow 0 = f(x) - f(x) = x^n(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)) \Longrightarrow \varepsilon_1 = \varepsilon_2$$

Propriété (cf section suivante pour détails**):**
Si f est de classe C^n au voisinage de x_0, alors f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 de la forme :

$$f(x) = f(0) + \tfrac{f'(0)}{1!}x + \tfrac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \tfrac{f^{(n)}0)}{n!}x^n + x^n\epsilon(x) \text{ avec } \epsilon(x) \to 0 \text{ quand } x \to 0.$$

Théorème 2 : Développement limités des fonctions paires et impaires [11]
Soit f une fonction numérique définie au voisinage de 0 et qui admet le D.L

$$\begin{aligned} f(x) &= \underbrace{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}_{P_n(x)} + x^n\varepsilon(x) \ , \ \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0 \\ &= P_n(x) + x^n\varepsilon(x) \end{aligned}$$

[11] S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI &SM

i) si f est paire alors $P_n(x)$ est paire i.e.

$$a_1 = a_3 = \cdots = a_{2k+1} = \cdots = 0$$

ii) si f est impaire alors $P_n(x)$ est impaire i.e.

$$a_0 = a_2 = \cdots = a_{2k} = \cdots = 0$$

Preuve :

i) Si f paire $\Longrightarrow f(x) = f(-x)$ donc l'unicité du D.L $\Longrightarrow P_n(x) = P_n(-x)$

$$P_n(-x) = a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + cdots + (-1)^{n-1}a_{n-1}x^{n-1} + (-1)^n a_n x^n$$

$$\left.\begin{array}{rcl} P_n(x) - P_n(-x) & = & 2a_1x + 2a_3x^3 + \cdots + 2a_{2k+1}x^{2k+1} + \cdots \\ & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow a_1 = a_3 = \cdots = a_{2k+1} = \cdots =$$

ii) si f est impaire alors

$$a_0 = a_2 = \cdots = a_{2k} = \cdots = 0$$

en effet f impaire $\Longrightarrow f(x) = -f(-x)$ donc l'unicité du D.L $\Longrightarrow P_n(x) = -P_n(-x)$

$$P_n(-x) = a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + cdots + (-1)^{n-1}a_{n-1}x^{n-1} + (-1)^n a_n x^n$$

$$\left.\begin{array}{rcl} P_n(x) + P_n(-x) & = & 2a_0 + 2a_2x^2 + \cdots + 2a_{2k}x^{2k} + \cdots \\ & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow a_0 = a_2 = \cdots = a_{2k} = \cdots = 0$$

3.2 - Opérations sur les développement limités[12]

i) Somme

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = P_n(x) + \circ(x^n) \\ f(x) = Q_n(x) + \circ(x^n) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) + g(x) = P_n(x) + Q_n(x) + \circ(x^n)$$

Remarque : Si f et g admettent un développement limité à l'ordre n et m respectivement, au voisinage de x_0, fini ou non, alors $f+g$ admet un développement limité à l'ordre $Min(m,n)$, obtenu en ajoutant les deux développements limités de f et g

[12]S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI &SM

Preuve :

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}_{P_n(x)} + x^n\varepsilon_1(x) \quad , \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$$
$$g(x) = \underbrace{b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n}_{Q_n(x)} + x^n\varepsilon_2(x) \quad , \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$$

$f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + x^n(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x))$
$f(x) + g(x) = q_0 + q_1x + \cdots + q_nx^n + x^n\varepsilon(x)$
$q_i = a_i + b_i \;\; i = 1, \cdots, n$
$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \;\; \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = \lim\limits_{x\to 0}(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)) = 0$
$\Longrightarrow f(x) + f(x) = (P_n(x) + Q_n(x)) + \circ(x^n)$

Exemple:

$$f(x) = 2 + x + \frac{x^4}{10} \circ (x^4)$$
$$g(x) = -2 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{9} + \circ(x^4)$$
$$f(x) + f(x) = x + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{10} + \circ(x^n)$$

ii) Produit

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = P_n(x) + \circ(x^n) \\ f(x) = Q_n(x) + \circ(x^n) \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) \times g(x) = (P_n(x) \times Q_n(x)) + \circ(x^n)$$

Remarques [13]*:*

1) Dans le calcul , on ne garde que les termes de degré inférieur ou égal à n.

2) Si f et g admette un développement limité à l'ordre n et m respectivement, au voisinage de x_0, fini ou non, alors $f \times g$ admet un développement limité à l'ordre $Min(m, n)$, obtenu en multipliant les deux développements limités de f et g. Dans le calcul , on ne garde que les termes de degré inférieur ou égal à $Min(m, n)$.

Preuve :

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n}_{P_n(x)} + x^n\varepsilon_1(x) \quad , \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$$
$$g(x) = \underbrace{b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n}_{Q_n(x)} + x^n\varepsilon_2(x) \quad , \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon_2(x) = 0$$

[13] S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI &SM

$$
\begin{aligned}
f(x) \times g(x) &= (P_n(x) + \circ(x^n))(Q_n(x) + \circ(x^n)) \\
&= (P_n(x) + x^n\varepsilon_1(x))(Q_n(x) + x^n\varepsilon_2(x)) \\
&= P_n(x) \times Q_n(x) + P_n(x) \times x^n\varepsilon_2(x) + Q_n(x) \times x^n\varepsilon_1(x) + x^{2n}\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x) \\
&= P_n(x) \times Q_n(x) + x^n \left(P_n(x) \times \varepsilon_2(x) + Q_n(x) \times \varepsilon_1(x) + x^n\varepsilon_1(x)\varepsilon_2(x)\right) \\
&= P_n(x) \times Q_n(x) + x^n\varepsilon(x) \ , \ \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0
\end{aligned}
$$

Exemple:

$$
\begin{aligned}
&f(x) = 2 + x + \frac{x^4}{10} \circ (x^4) \\
&g(x) = -2 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{9} + \circ(x^4) \\
&f(x)xf(x) = -4 - 2x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{9}x^3 - \frac{7}{18}x^4 + \circ(x^4)
\end{aligned}
$$

iii) Quotient

$$
\begin{aligned}
&f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon_1(x) \\
&g(x) = Q_n(x) + x^n\varepsilon_2(x) \ \ \text{on suppose } g(0) \neq 0
\end{aligned}
$$

càd si f et g admette un développement limité à l'ordre n, au voisinage de x_0, fini ou non, et si le coefficient constant de g est non nul, alors $\frac{f}{g}$ admet un développement limité à l'ordre n.au voisinage de x_0.

Pour déterminer la partie principale de $\frac{f}{g}$, on fait la division de P par Q suivant les puissances croissantes de x à l'ordre n.

Remarques [14]*:*

i) Si g admet un D.L d'ordre n en 0 et que $g(0) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ admet un D.L d'ordre n en 0.

ii) Pour calculer le DL d'ordre n de $\frac{f}{g}$, Il suffit de montrer que $\frac{1}{g}$ admet un développement limité à l'ordre n puis de faire le produit par celui de f et ne conservant que les termes de degré $\leq n$.

ii) Dans le cas où $g(0) = 0$, on peut opérer d'une manière analogue, mais on obtient un développement dit développement limité généralisé.

[14] S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI &SM

Exemple :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \underbrace{1+x+x^3}_{P_3(x)} + x^3\varepsilon(x) \\
g(x) &= 2x + 3x^3 + x^3\varepsilon(x) \text{ en met } 2x \text{ en facteur} \\
&= 2x\underbrace{(1+\frac{3}{2}x^2)}_{Q_2(x)} + x^3\varepsilon(x) \\
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{1}{2x} \times \frac{P_3(x)}{Q_2(x)} \\
&= \frac{1}{2x} + \cdots + x^3\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

On obtient un développement dit développement limité généralisé [15].

Preuve : On fait la division de P par Q suivant les puissances croissantes de x à l'ordre n

$$P_n(x) = Q_n(x)S(x) + x^{n+1}R(x) \text{ degr de } S \leq n$$

$$\begin{aligned}
(f(x) - x^n\varepsilon_1(x)) &= (g(x) - x^n\varepsilon_2(x))S(x) + x^{n+1}R(x) \\
f(x) &= g(x) \times S(x) + x^n \underbrace{(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)S(x) + xR(x))}_{=\varepsilon_3(x)\to 0}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow f(x) = g(x) \times S(x) + x^n\varepsilon_3(x)$$

$$\Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = S(x) + x^n\frac{\varepsilon_3(x)}{g(x)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = S(x) + x^n\varepsilon(x) \quad \varepsilon(x) \longrightarrow 0 \text{ quand } x \to 0$$

Exemple:

1)

$$\begin{aligned}
f(x) &= -2 + 3x + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{9} + \circ(x^4) \\
g(x) &= 2 + x + \frac{x^4}{10} \circ (x^4) \\
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{25}{9}\frac{1}{9}x + \frac{1}{9}x^2 + \circ(x^4)
\end{aligned}$$

[15]S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI &SM

Si f admet un D.L en 0 et que $f(0) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ admet un D.L en 0.

2) D.L de $\cos(x)$ à l'ordre 4 en 0 est

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \circ(x^4)$$

D.L de $\dfrac{1}{\cos(x)}$ à l'ordre 4 en 0: on a $\cos(0) = 1 \neq 0$

$$\frac{1}{\cos(x)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \circ(x^4)$$

$\dfrac{1}{\cos(x)}$ est paire $\Longrightarrow a_1 = a_3 = a_{2k+1} = 0$

$$\cos(x) \times \frac{1}{\cos(x)} = 1 \Longleftrightarrow (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \circ(x^4)) \times (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \circ(x^4)) = 1$$

$$\Longrightarrow a_0 + (-\frac{a_0}{2} + a_2)x^2 + (\frac{a_0}{2} + \frac{a_2}{2} + a_4) + \circ(x^4) = 1$$

$$\Longrightarrow \left.\begin{array}{l} a_0 = 1 \\ -\frac{a_0}{2} + a_2 = 0 \\ \frac{a_0}{24} - \frac{a_2}{2} + a_4 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} a_0 = 1 \\ a_2 = \dfrac{1}{2} \\ a_4 = -\dfrac{1}{24} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{24} \end{array}$$

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + \circ(x^4)$$

Une autre manière de développer $\dfrac{1}{f}$ lorsque $f(0) \neq 0$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k$$
$$+ \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \circ(x^n)$$

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\cos(x)} &= \frac{1}{1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4!}+x^4\varepsilon(x)} \\
&= [1+(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+x^4\varepsilon(x))]^{-1} \\
&= 1+(-1)\times(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+x^4\varepsilon(x))+\frac{(-1)\times(-2)}{2!}(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+x^4\varepsilon(x))^2 \\
&\quad+\underbrace{\frac{(-1)\times(-2)\times(-3)}{3!}(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+x^4\varepsilon(x))^3}_{x^4\tilde{\varepsilon}(x)} \\
&= 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}-x^4\varepsilon(x)+\frac{x^4}{4}+x^4\tilde{\varepsilon}(x) \\
&= 1+\frac{x^2}{2}-(\frac{1}{24}-\frac{1}{4})x^4+x^4\varepsilon_1(x) \\
\frac{1}{\cos(x)} &= 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5}{24}x^4+x^4\varepsilon_1(x)
\end{aligned}
$$

iv) Composition [16]**:**

Si f admet un développement limité à l'ordre n en x_0, fini ou non, si le terme constant de f vaut a_0 et si g admet un développement limité à l'ordre n en a_0, alors gof admet un développement limité à l'ordre n en x_0, obtenu en développant la composée des développements limités de f et g.

La technique à utiliser est de remplacer tous les termes en x de la partie principale du DL en 0

de f par la partie principale de g et en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égale à n.

Exemples :

1) Calculer le DL d'ordre 3 de $f(x) = e^{\sin(x)}$ en 0.

On a : pour $\epsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$ et $\sin(0) = 0$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$

donc

$e^{\sin(x)} = 1 + (x - \frac{x^3}{6}) + \frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{6})^2 + \frac{1}{6}(x - \frac{x^3}{6})^3 + x^3\epsilon(x)$

et si on en ne garde que les termes de degré inférieur ou égale à 3.

alors

[16] S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI &SM

$e^{\sin(x)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^3\epsilon(x)$

2) Calculer le DL d'ordre 2 de $h(x) = e^{\cos(x)}$ en 0.

On a: pour $\epsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$ et $\cos(0) = 1$.

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$

comme $\cos(0) = 1 \neq 0$, on pose $g(x) = \cos(x) - 1$ donc $g(0) = 0$.

ainsi

$g(x) = -\frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$ et $g(0) = 0$

$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$

donc

$fog(x) = e^{(\cos(x)-1)} = 1 + (-\frac{x^2}{2}) + \frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2})^2 + x^2\epsilon(x)$

Comme on ne doit garder que les termes de degré inférieur ou égale à 2.

$e^{(\cos(x)-1)} = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$

ainsi

$h(x) = e^{\cos(x)} = e(1 - x^2) + x^2\epsilon(x)$

3.2 - Calcul des D.L- Développement de Taylor-Young [17]:

Théorème de Taylor-Young

Si f est $(n-1)$ fois continûment dérivable sur un intervalle Icontenant 0 et que $f^{(n)}$ est continue au point 0,

alors f admet un D.L dit de Taylor-Young à l'ordre n de la forme

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \circ(x^n)$$

où encore

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

Preuve : Théorème de Mac Laurin

$$f(x) = f(0)+xf'(0)+\frac{x^2}{2!}f''(0)+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)+\frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\theta x) \text{ avec } 0 < \theta < 1$$

lorsque $x \to 0$, $\theta x \to 0$

$f^{(n)}$ est continue au point 0 $\Longrightarrow f^{(n)}(\theta x) \longrightarrow f^{(n)}(0)$ lorsque $x \to 0$, on peut écrire donc

$$f^{(n)}(\theta x) = f^{(n)}(0) + \varepsilon_1(x) \text{ avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0$$

[17] S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI &SM

d'où

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^n}{n!}\varepsilon_1(x)$$

$$\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon_1(x)}{n!} \longrightarrow 0 \text{ quand } x \to 0$$

Remarque:

La condition que $f^{(n)}(0)$ existe suffit pour avoir le D.L de Taylor-Young. Cette condition du théorème est seulement suffisante et non nécéssaire.

Exemple [18]:

$$\begin{cases} f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x}) \quad \text{si} \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \times x\sin(\frac{1}{x}) & \lim\limits_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x}) = 0 \text{ (car } |\sin(\frac{1}{x})| \leq 1) \\ f(x) = x^2\varepsilon(x) & \lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0 \end{cases}$$

donc admet pour D.L au voisinage de 0 à l'ordre 2

$$f(x) = 0 + \circ(x^2)$$

alors que f'' n'existe pas en 0.

$$\begin{cases} f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x}) \\ f'(x) = 3x^2 \sin(\frac{1}{x}) - x\cos(\frac{1}{x}) \\ f''(x) = (6x - \frac{1}{x})\sin(\frac{1}{x}) - 4\cos(\frac{1}{x}) \end{cases}$$

En fait si s admet les condition du théorème de Mac Laurin

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon_1(x) \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$$

alors

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \ , \ k = 1, \cdots, n$$

Développement limité des fonctions usuelles [19]

[19] S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI &SM

(à retenir par coeur ou à retrouver rapidement)

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\circ(x^n) \text{ Mac Laurin}\\
\sin(x) &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{2p+1}\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}+\circ(x^{2p+1})\\
\cos(x) &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!}+\circ(x^{2p})\\
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\circ(x^n)\\
\mathrm{tg}(x) &= x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\frac{62}{2835}x^9+\circ(x^9)\\
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+\circ(x^n)\\
(Arc\sin(x))' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\\
&= 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{5}{16}x^6+\frac{35}{128}x^8+\frac{63}{256}x^{10}+\circ(x^{10})\\
Arc\sin(x) &= x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\frac{5}{112}x^7+\frac{35}{1152}x^9+\circ(x^9)
\end{aligned}
$$

Propriété [20]:

Si f admet les propriété du théorème précédent, f' satisfait aux mêmes conditions et en remplaçant n par $n-1$ on a

$$f'(x)=f'(0)+xf''(0)+\frac{x^2}{2!}f^{(3)}(0)+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)++x^{n-1}\varepsilon(x)$$

et on constate que le polynôme principal de f' est la dérivée du polynôme principal de f.

i.e. si $f(x)=P_n(x)+x^n\varepsilon(x)$ et si f' existe alors $f'(x)=P_n'(x)+x^{n-1}\varepsilon(x)$.

Exemples :

1) Développement limité de $f(x) = \text{Arctg}(x)$ à l'ordre 5 au voisinage de 0.

$$\begin{aligned}
f(x) &= P_5(x) + x^5\varepsilon(x) \text{ avec } \varepsilon(x) \to 0\\
f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}\\
&= 1 - x^2 + x^4 + x^4\varepsilon_1(x)\\
\Longrightarrow P_5'(x) &= 1 - x^2 + x^4\\
\Longrightarrow P_5(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\\
\Longrightarrow f(x)(x) &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + x^5\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

2) Développement limité de $f(x) = \log(x)$ au voisinage de 0.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}\\
&= 1 - x + x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon_1(x)\\
\Longrightarrow f(x) &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

iii) Développement limité de $f(x) = x\text{cotg }(x)$ à l'ordre 5 au voisinage de 0.

$$\begin{aligned}
f(x) = x\text{cotg}(x) &= \frac{x\cos(x)}{\sin(x)}\\
&= \frac{x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{4!} + \circ(x^5)}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \circ(x^5)}\\
x\text{cotg}(x) &= 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45}x^4 - x^5\varepsilon(x)\\
\text{cotg}(x) &= \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - x^4\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

3.3 - Calcul de Limites avec les Développements limités

Remarque fondamentale [21]

i) Si f admet un développement limité à l'ordre n, au voisinage de 0 *càd*

[21] S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI &SM

$$f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon(x) \ avec \ \varepsilon(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$$

alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = P_n(0)$.

ii) Tous les DL seront obtenues à partir des DL usuels au $V(0)$ *et des théorèmes de base sur les DL.*

1) Soit $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x$, calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

On a :

$$f(x) = (1+\frac{1}{x})^x \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)$$
$$\log(f(x)) = \log((1+\frac{1}{x})^x) = x\log(1+\frac{1}{x})$$

au voisinage de $+\infty$ on a

$$\log(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})$$
$$x\log(1+\frac{1}{x}) = 1 + \varepsilon(\frac{1}{x})$$

d'où

$$\lim_{x\to+\infty} x\log(1+\frac{1}{x}) = \lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})) = 1$$

2) Calculer $\underset{x\to 0}{lim}\log(\frac{\sin(x)}{x})$

Calculer le D.L à l'ordre 2 au voisinage de 0 de

$$\log(\frac{\sin(x)}{x})$$

$$\begin{aligned}
\log(\frac{\sin(x)}{x}) &= \log(1+(\frac{\sin(x)}{x}-1)) \\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon_1(x) \\
\frac{\sin(x)}{x} &= 1 - \frac{x^2}{3!} + x^2\varepsilon_2(x) \\
\log(\frac{\sin(x)}{x}) &= \log(1+(\frac{\sin(x)}{x}-1)) \\
&= (-\frac{x^2}{3!}) - \frac{1}{2}(-\frac{x^2}{3!})^2 + x^2\varepsilon_3(x) \\
&= -\frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x)
\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{x\to 0} \log(\frac{\sin(x)}{x}) = 0$

3) Soit $f(x) = (\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\log(x)})$. Calculer $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

On pose $t = x-1$ de telle sorte que $t \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$.

On a $f(x) = (\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\log(x)}) = (\frac{1}{t} - \frac{1}{\log(1+t)}) = \frac{\log(1+t)-t}{t\log(1+t)}$.

Remarque : Lors du calcul des DL, on choisit l'ordre n du DL le plus bas possible et tel que la partie principale du dénominateur n'est pas nul et on calcule tous les DL à cette ordre.

au voisinage de $t = 0$, on a $\log(1+t) = t + t\varepsilon_1(t)$

Donc $t\log(1+t) = t^2 + t^2\varepsilon_2(t)$.

Il faut calculer le DL du numératuer à l'ordre 2.

$\log(1+t) - t = -\frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon_3(t)$.

Ainsi $\frac{\log(1+t)-t}{t\log(1+t)} = \frac{-\frac{t^2}{2}}{t^2} + t^2\varepsilon(t)$ donc $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\log(1+t)-t}{t\log(1+t)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\frac{1}{2}$.

Remarque [22]*: Dorénavent, on notera par $\varepsilon(x)$ toute expression qui tends vers* 0 *quand x tend vers* 0 *ainsi on allegera les écritures.*

3) Soit $f(x) = \frac{\sin(x) - tg(x)}{\sin(x)(1-\cos(x))}$.Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Pour que la partie principale du dénominateur ne s'annulle pas , le calcul des DL à l'ordre 3 voisinage de 0 devrait suffire.

On a :

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\epsilon(x)$ et

$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\epsilon(x) \Rightarrow 1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2} + x^3\epsilon(x)$

donc $\sin(x)(1-\cos(x)) = (x - \frac{x^3}{6})(\frac{x^2}{2}) + x^3\epsilon(x) = \frac{x^3}{2} + x^3\epsilon(x)$.

Comme $tg(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^3\epsilon(x)$.

on a $\sin(x) - tg(x) = (x - \frac{x^3}{6}) - (x + \frac{x^3}{3}) + x^3\epsilon(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^3\epsilon(x)$.

Donc $\quad f(x) = \frac{\sin(x)-tg(x)}{\sin(x)(1-\cos(x))} = \frac{-\frac{1}{2}x^3}{\frac{x^3}{2}} + x^3\epsilon(x) = -1 + x^3\epsilon(x)$

3.4 - Généralisation des développements Limités :

Développements Limités au voisinage de l'infini

Soit f une fonction définie au voisinage de l'infini c'est à dire f définie sur $]A, +\infty[$ ou $]-\infty, B[$ avec $A > 0$ et $B < 0$.

Définition :

[22]S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI &SM

On dit que f admet un D.L d'ordre n au voisinage de de l'infini si elle est de la forme

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \circ(\frac{1}{x^n})$$

ou encore

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon(\frac{1}{x}) \text{ avec } \varepsilon(\frac{1}{x}) \to 0 \text{ quand } x \to \infty$$

Remarque :

Si f admet un D.L en $\frac{1}{x}$ au voisinage de l'infini, alors f admet une limite finie lorsque $x \to \infty$.

Développements Limités généralisé

Soit f une fonction définie au voisinage de 0 sauf peut être en 0 tel que $x^p f(x)$ admet un D.L au voisinage de 0

$$x^p f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \circ(x^n)$$
$$f(x) = \frac{a_0}{x^p} + \frac{a_1}{x^{p-1}} + \frac{a_2}{x^{p-2}} + \cdots + a_n x^{n-p} + \circ(x^{n-p})$$

on dit alors que f admet un D.L généralisé au voisinage de l'infini.

Les D.L au voisinage de l'infini sont utilisés pour l'étude des branches infinies des courbes.

Un D.L permet la détermination (éventuelle) des asymptotes, des directions asymptotiques et la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Rappel du plan de l'étude d'une fonction [23]

$$f : x \longrightarrow f(x) \text{ une fonction numrique}$$

i) Domaine de définition de f, D_f: les intervalles où f est définie.

ii) Parité, périodicité (chercher dans ce cas la plus petite période).

iii) Etude de la continuité de f.

iv) Etudes des limites aux bornes des intervalles de D_f, points d'arrêts, asymptotes, directions asymptotiques, position de la courbe par rapport aux asymptotes et tangentes aux points critiques de la courbe.

v) Calculer la dérivée et dresser le tableau de variation de f.

vi) Résumer i, ii, iii, iv dans ce tableau de variation et signaler les particularités de $(\mathcal{C})$

[23] S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI &SM

vii) Construire la courbe $(\mathcal{C})$.

Remarque:

Pour le calcul des limites, on peut utiliser les D.L au voisinage de 0, à l'infini ainsi que les résultas sur les fonctions équivalentes et infiniments petits.

Asymptote:

Une condition nécéssaire et suffisante poue que $(\mathcal{C})$ admette une asymptote à l'infini et que l'on puisse trouver a et b telque $f(x) - ax - b$ tend vers 0 lorsque $x \to \infty$.

$$\begin{aligned} &f(x) = ax + b + \varepsilon(x) \\ &\lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0 \end{aligned}$$

Exemple :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x+2}{x}\sqrt{x^2-1} \\ \frac{f(x)}{x} &= \frac{x+2}{x^2}\sqrt{x^2-1} \end{aligned}$$

Pour avoir le D.L au voisinage de l'infini on fait le changement de variable $x = \dfrac{1}{X}$

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{X}{|X|}(1+2x)\sqrt{1-X^2} \Longrightarrow \begin{cases} \text{si } X > 0, & \dfrac{f(x)}{x} = (1+2X)\sqrt{1-X^2} \\ \text{si } X < 0, & \dfrac{f(x)}{x} = -(1+2X)\sqrt{1-X^2} \end{cases}$$

$$\sqrt{1-X^2} = 1 - \frac{1}{2}X^2 + \circ(x^2) \Longrightarrow \begin{cases} \text{si } X > 0, & \dfrac{f(x)}{x} = 1 + 2X - \dfrac{1}{2}X^2 + x^2\varepsilon_1(X) \\ \text{si } X < 0, & \dfrac{f(x)}{x} = -1 - 2X - \dfrac{1}{2}X^2 + x^2\varepsilon_2(X) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{si } X > 0, & f(x) = x + 2 - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{x}\varepsilon_1(\dfrac{1}{x}) \\ \text{si } X < 0, & f(x) = -x - 2 - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{x}\varepsilon_2(\dfrac{1}{x}) \end{cases}$$

La droite $y = x + 2$ est asymptote à la courbe et que la courbe est au dessous de l'asymptote à + l'infini puisque la différence $f(x) - x - 2$ est du signe de $-\dfrac{1}{2x}$

La droite $y = -x - 2$ est asymptote à la courbe et que la courbe est au dessous de l'asymptote à + l'infini puisque la différence $f(x) + x + 2$ est du signe de $-\dfrac{1}{2x}$

Direction asymptotique [24]:

Supposons que f admet un D.L au voisinage de l'infini de la forme

$$f(x) = ax + b + \varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$$

Le coefficient directeur de l'asymtote oblique est $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait direction asymptotique est que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ existe et est finie}$$

Branche parabolique :

La courbe admet une branche parabolique lorsque $\dfrac{f(x)}{x}$ admet une limite a finie lorsque $x \to \infty$ et $f(x) - ax$ n'a pas de limite finie lorsque $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \text{ et } \lim_{x\to\infty} f(x) - ax = \infty$$

On dira que la courbe admet une branche parabolique dans la direction de coefficient a

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$$

Exemple :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$$

mais

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - 0 \times x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

On a une branche parabolique dans la direction de coefficient 0 c'est à dire une branche parabolique dans la direction de l'axe des ordonnées.

[24] S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI &SM

Applications à l'étude des fonctions[25]

Etude locale d'une fonction

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ I un intervalle de $\mathbb{R}$ et x_0 un point de I.
Si on connait le D.L de f au voisinage de x_0, on en déduit l'allure de la représentative de f au voisinage du point de coordonnée $\begin{pmatrix} x_0 \\ f(x_0) \end{pmatrix}$

Exemple :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2\varepsilon(x) \text{ avec } \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Si $a_2 \neq 0$, la courbe représentative de f au voisinage du point $\begin{pmatrix} x_0 \\ a_0 \end{pmatrix}$ $(\mathcal{C})$ à l'allure de la parabole

$$x \longrightarrow a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2$$

Si $a_2 = 0$ et $a_1 \neq 0$ alors on a un point d'inflexion au voisinage de $\begin{pmatrix} x_0 \\ a_0 \end{pmatrix}$

<u>Application des développements limités à l'étude des fonctions</u>

1)

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x^2 + x} = \frac{1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}}$$

$$x = \frac{1}{X} \Longrightarrow x \longrightarrow \infty \text{ lorsque } X \to 0$$

$$\begin{aligned} f(x) = Y = \frac{1 - X - X^2}{1 + X} &= (1 - X - X^2)(1 - X + X^2 + X^2\varepsilon_1(X)) \text{ avec } \lim_{X \to 0} \varepsilon_1(X) = 0 \\ &= 1 - 2X + X^2 + X^2\varepsilon_2(X)) \\ &= 1 - 2X + X\varepsilon(X) \end{aligned}$$

$Y \longrightarrow 1$ lorsque $X \longrightarrow 0 (x \longrightarrow \infty) \Longrightarrow f$ admet une asymptote horizontale

On peut voir à partir de ce D.L la position de la courbe par rapport à l'asymptote (au dessus ou en dessous)

$$\begin{aligned} &Y - 1 = -X + X\varepsilon(X) \\ &Y - 1 \geq 0 \text{ si } X \leq 0 \text{ c'est dire } -x \text{ assez grand} \\ &Y - 1 \leq 0 \text{ si } X \geq 0 \text{ c'est dire } x \text{ assez grand} \end{aligned}$$

[25] S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI &SM

2)

$$f(x) = \frac{x+2}{x}\sqrt{x^2-1}$$

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} &= \frac{x+2}{x^2}\sqrt{x^2-1} \\
&= \frac{x+2}{x^2} \times |x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \\
&= \frac{x+2}{|x|}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \\
&= \frac{x}{|x|}(1+\frac{2}{x})\sqrt{1-\frac{1}{x^2}} \\
&= \frac{X}{|X|}(1+2X)\sqrt{1-X^2} \quad \text{avec } x = \frac{1}{X}
\end{aligned}$$

donc lorsque $x \longrightarrow \infty$, $X \longrightarrow 0$, on a

$$\frac{f(x)}{x} = \begin{cases} (1+2X)\sqrt{1-X^2} & \text{si} \quad X > 0 \\ -(1+2X)\sqrt{1-X^2} & \text{si} \quad X < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-X^2} &= 1 - \frac{1}{2}x^2 + \circ(x^2) \\
\Longrightarrow \frac{f(x)}{x} &= \frac{x+2}{x^2}\sqrt{x^2-1} \\
&= \begin{cases} 1 + 2X - \dfrac{X^2}{2} + X^2\varepsilon_1(X) & \text{si} \quad X > 0 \\ -(1+2X) - \dfrac{X^2}{2} + X^2\varepsilon_1(X) & \text{si} \quad X < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{x^2}\varepsilon_1(\dfrac{1}{x}) & \text{si} \quad x > 0 \\ -(1+\dfrac{2}{x}) - \dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{1}{x^2}\varepsilon_1(\dfrac{1}{x}) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \\
f(x) &= \begin{cases} (x+2) - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{x}\varepsilon_1(\dfrac{1}{x}) & \text{si} \quad x > 0 \\ -(x+2) - \dfrac{1}{2x} + \dfrac{1}{x}\varepsilon_1(\dfrac{1}{x}) & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow y = x + 2$ est asymptote à la courbe au voisinage de + l'infini et $(\mathcal{C})$ est en dessous del'asymptote car $-\dfrac{1}{x} < 0$.

Saïd EL HAJJI
Université Mohammed V - Agdal
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique
Groupe d'Analyse Numérique et Optimisation
Avenue Ibn Batouta, B.P. 1014
Rabat, Maroc
Email : elhajji@fsr.ac.ma
Page web : www.fsr.ac.ma/LMC

ANNEXE :
Fonctions équivalentes [26].

<u>Définition</u> : Fonctions Equivalentes

On dit que f et g sont équivalentes au voisinage de $x = x_0$ (resp. ∞) si on a:

$$f(x) = g(x)\,(1 + \varepsilon(x)) \text{ avec } \lim_{x \to x_0 \ (resp.\ \infty)} \varepsilon(x) = 0$$

et on écrit

$$f \sim g$$

Remarques Fondamentales :

1) Dans la définition précédente, on suppose implicitement que le quotient $\frac{f(x)}{g(x)}$ est définie au voisinage de a.

2) Si la fonction g ne s'allume pas au voisinage de a, sauf peut être en a, alors la fonction $\frac{f(x)}{g(x)}$ est définie au voisinage pointé de a.

3) Du fait de la division par g dans cette définition, g risque de s'annuler aoutour de a. Pour éviter ce problème, on dira qu'au voisinage de a, les fonctions f et g sont équivalentes si

$f(x) = g(x)(1 + \epsilon(x))$ *où* $\lim\limits_{x \to a} \epsilon(x) = 0$

ou $f(x) = \varphi(x)g(x)$ *où* $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = 1.$

4)

1) Dire que $f \sim 0$,au voisinage de a,ne veut pas dire que $f \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

ii) $f \underset{V(a)}{\sim} l \neq 0$, veut dire que $f \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$.

5)

i) Si $f \sim g$ alors

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) + \varepsilon(x)\; g(x) \\ f(x) &= g(x) + \circ(g(x)) \\ f &= g + \circ(g) \end{aligned}$$

ii) Si $f \sim g$ alors

$$f - g = \circ(g)$$

[26] S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI &SM

iii) Si $f \sim g$ et si $g \neq 0$ au voisinage de x_0 alors

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Exemples [27]:

$$\sin(x) \sim x \text{ au voisinage de 0 car } \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$
$$\text{tg}(x) \sim x \text{ au voisinage de 0 car } \lim_{x \to 0} \frac{\text{tg}(x)}{x} = 1$$
$$1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2} \text{ au voisinage de 0 car } 1 - \cos(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \sim 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$$
$$\exp(x) - 1 \sim x \text{ au voisinage de 0 car } \lim_{x \to 0} \frac{\exp(x) - 1}{x} = 1$$

$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n,\ a_i \neq 0 \quad i = 1, \cdots n$ au voisinage de l'infini alors

$$P(x) \sim a_n x^n$$

en effet

$$P(x) = a_n x^n \left(\frac{a_0}{a_n x^n} + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_2}{a_n x^{n-2}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + 1\right)$$
$$\lim_{n \to \infty} \frac{P(x)}{a_n x^n} = \left(\frac{a_0}{a_n x^n} + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_2}{a_n x^{n-2}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + 1\right)$$
$$= 1$$
$$\Longrightarrow P(x) \sim a_n x^n \text{ au voisinage de l'infini}$$

au voisinage de 0 on a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{P(x)}{a_0} = \left(1 + \frac{a_1 x}{a_0} + \frac{a_2 x^2}{a_0} + \cdots + \frac{a_{n-1} x^{n-1}}{a_0} + \frac{a_n x^n}{a_0}\right)$$
$$= 1$$
$$\Longrightarrow P(x) \sim a_0 \text{ au voisinage de 0}$$

Pour utiliser les fonctions équivalentes, il est essentiel de connaitre ces résultats et remarques :

Théorème : Si au voisinage de a, $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$ alors au voisinage de a,

1) $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$
2) $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g2}$
3) Si $\alpha f_1 + \beta f_2 \neq 0$ et $\alpha g_1 + \beta g_2 \neq 0$ alors $\alpha f_1 + \beta f_2 \sim \alpha g_1 + \beta g_2$.

Remarque :

1) Si au voisinage de a, $f \sim g \nRightarrow K(f) \sim K(g)$. En effet au voisinage de l'infinie, $x+1 \sim x$ mais il est faux que e^{x+1} soit équivalent à e^x , ou bien que $\sin(x+1)$ soit équivalent à $\sin(x)$.

2) Si f et g sont des infiniments petits (ou grands) et si $f \sim g$ alors $\log(f) \sim \log(g)$

2) Au voisinage de 0, $\sin(x) \sim x$ et $tg(x) \sim x$ mais $sin(x) - tg(x)$ n'est pas équivalent à 0?

Théorème : Si au voisinage de a, $f \sim g$ et si $u(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} a$ et si l'ensemble image de u est inclus dans les ensembles de définitions de f et de g, alors au voisinage de x_0, $f(u(x)) \sim g(u(x))$.

Exemple :

1) Au voisinage de 0, on a : $e^x - 1 \sim x \Rightarrow e^{x^2} - 1 \sim x^2$

2) Au voisinage de 0, on a $log(1+x) \sim x \Rightarrow log(1 + \frac{x}{e^x}) \sim \frac{x}{e^x}$

Le théorème suivant (à admettre) est essentiel pour l'utilisation des limites.

Théorème Fondamental [28]: Si dans un produit ou quotient de fonctions, dont on cherche s'il a une limite et ce que vaut cette limite quand la variable tend vers a, on remplace un des facteurs de ce produit ou quotient par une fonction équivalente au voisinage de a, on ne change pas ainsi le fait que cette expression ait ou n'ait pas une limite, et on ne change pas non la valeur de cette limite si elle existe.

Application au calcul des limites :

Exemples

1) Au voisinage de l'infinie, $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \underset{V(\infty)}{\sim} a_n x^n$.

[28]S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI &SM

En effet $\frac{P_n(x)}{a_n x^n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{x} + ... + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}$ Donc $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P_n(x)}{a_n x^n} = 1.$

2) Au voisinage de $x = 0, \sin(x) \sim x.$

En effet $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$ Il suffit d'appliquer entre autre la régle de l'Hospital

3) Au voisinage de $x = 0$, $tg(x) \sim x.$

En effet $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1, cos(x) = 1$ et $\frac{tg(x)}{x} = \frac{1}{\cos(x)} \frac{\sin(x)}{x}.$

4) Au voisinage de $x = 0, 1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}.$

En effet $1 - \cos(x) = 2\sin^2(\frac{x}{2}).$

Or $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to 0} (\frac{\sin(\frac{x}{2})}{\frac{x}{2}})^2 = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin^2(\frac{x}{2})}{\frac{x^2}{4}} = 1 \Rightarrow \frac{2\sin^2(\frac{x}{2})}{x^2} = \frac{1}{2}.$

5) Calculer $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + x^2 + 1}{x^3}$

quand $x \to \infty$ on a

$$\left.\begin{array}{rcl} x^3 + x^2 + 1 & \sim & x^3 \text{ au vois. de } \infty \\ x^3 & \sim & x^3 \text{ au vois. de } \infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^3} \sim \frac{x^3}{x^3} = 1 \text{ au vois. de } \infty$$

d'où $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 + x^2 + 1}{x^3} = 1$

5) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2}$

au voisinage de 0 on a

$$\left.\begin{array}{l} \cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) \\ 1 - \cos(x) = 2\sin^2(\dfrac{x}{2}) \\ \sin^2(\dfrac{x}{2}) \sim \dfrac{x^2}{2} \end{array}\right\} \Longrightarrow 1 - \cos(x) = 2\sin^2(\frac{x}{2}) \sim 2\frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 1 - \cos(x) & \sim & \dfrac{x^2}{2} \text{ au vois. de } 0 \\ x^2 & \sim & x^2 \text{ au vois. de } 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \sim \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \text{ au vois. de } 0$$

d'où $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{x^2} = \dfrac{1}{2}$

Remarque :

1) *Comment déterminer un équivalent d'une fonction f donnée dans un voisinage de a?*

Propriété [29]**:** Pour une fonction f au voisinage de a, le premier terme **non nul** que l'on rencontre en écrivant la Formule de Taylor est un équivalent de f au voisinage de a.

Exemples:

D'aprés les formules de Taylor (et de Mac-Laurin) de quelque fonctions usuelles. Toutes ces formules sont valables pour x au voisinage de 0 (pour les obtenir au voisinage de a,il suffit de poser $x = x - a$), on obtient :.

1) Au voisinage de 0, $e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$

2) Au voisinage de 0, $sin(x) \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}x^{2p+1}$.

3) Au voisinage de 0, $\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{(-1)^p}{(2p)!}x^{2p}$

4) Au voisinage de 0, $\frac{1}{1-x} \sim 1 + x + x^2 + ... + x^n$

5) Au voisinage de 0, $\log(1 - x) \sim x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$

6)Au voisinage de 0,
et pour tout $\alpha \in IR$, $(1+x)^\alpha \sim 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))}{n!}x^n$
En particulier :
$\frac{1}{1+x} \sim 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n$
$\sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{1}{2}x - \frac{x^2}{8} + ... + \frac{(-1)n-1}{2n-1}\frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{x^n}{2^{2n}}$

Remarque : Peut -on déterminer, un équivalent de f au voisinage de a sans utiliser la Formule de Taylor ?

[29]S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI &SM

EX 1: Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(\frac{\pi}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

f est-elle continue ? Dérivable ? De classe C^1 ?

EX 2: Soit f une fonction dont la courbe représentative passe par le point $(1, \sqrt{3})$ et admet une tangente au point d'abssice 1. On suppose que cette tangente passe par le point $(2, 2\sqrt{3})$.

a) Déterminer $f'(1)$.

b) On suppose que f admet une fonction réciproque f^{-1} noté g, déterminer alors $g(\sqrt{3})$.

EX 3: Soit la fonction définie par: $f(x) = x^3 - 3a^2x + b$ où a et b sont des constantes réelles avec $a > 0$.

a) En utilisant le théorème de Rolle et en raisonnant par l'absurde, montrer que f s'annule au plus une fois sur l'intervalle $[-a, a]$.

b) Déterminer les valeurs de b pour lesquelles f s'annule.

Ex 4:

a) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $f(x) = \log(x)$ sur l'intervalle $[n, n+1]$ où n est un entier naturel vérifiant $n > 0$, montrer que

$$\frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log(n) < \frac{1}{n}$$

b) On définie la suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de nombres réels en posant

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n)$$

Montrer que la suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement monotone. En déduire qu'elle est convergente et que si $\gamma = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} u_n$, on a $0 \leq \gamma < 1$ (γ s'appelle la constante d'Euler-Mascheroni. on ignore encore si elle est rationnelle ou non).

Ex 5: Soit f la fonction définie par $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ pour $x > 1$.

1) Montrer que $f(x)-2=(x-1)\left(1+\frac{1}{c}\right)^{c}\log(1+c)-\log(c)-\frac{1}{1+c}$ pour un certain c vérifiant $1<c<x$.

2) Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction log pour montrer que $\log(1+y)-\log(y)\geq\frac{1}{1+y}$ pour $y>0$. En déduire que $f(x)\geq 2$ pour tout $x\geq 1$.

3) On définie la suite $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ par $v_n=\frac{n!}{n^n}$ pour $n\geq 1$.

a) Utiliser le raisonnement par recurrence pour montrer $v_n\leq\frac{1}{2^{n-1}}$ pour tout $n\geq 1$
(On remarquera d'après 2) que $f(n)\geq 2$ pour tout $n\geq 1$).

b) Etudier la monotonie de le suite $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ et conclure si elle est convergente ou divergente.

c) Calculer la limite de cette suite en justifiant votre réponse.

<u>Ex 6:</u> Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $t\longrightarrow\log\left(\log(k)\right)$ et $S_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\log(k)}$.
En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'interval $[k,k+1]$, où k est un entier strictement superieur à 1, montrer que la suite $\{S_n\}_{n>1}$ est divergente.

<u>Ex 7:</u> Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $t\longrightarrow\frac{1}{\sqrt{1+t}}$ et $S_n=\sum_{k=1}^{n}f(\frac{k}{n^2})-1$.

1) Vérifier que f' est criossante et continue sur $\mathbb{R}^+$.

2) Montrer que $\forall\ n\in\mathbb{N}^*$: $\frac{n+1}{2n}f'(0)\leq S_n\leq\frac{n+1}{2n}f'(1)$. (indication: On appliquera le théorème des accroissements finis.)

3) En déduire que la suite $\{S_n\}_{n\geq 1}$ converge et calculer sa limite.

<u>Ex 8:</u> Soit f une fonction réelle définie sur $[a,b]$. on dit que f est lipschitzienne s'il existe un réel k tel que: $|f(x)-f(y)|\leq k|x-y|$ où x et y sont des éléments quelconques de $[a,b]$.
Soit f une fonction dérivable et lipschitzienne sur $[a,b]$. Montrer que f' est bornée sur $[a,b]$.

<u>Ex 9:</u> Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie de la façon suivante:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{\pi}{x}) \sin(\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{x})}) & \text{si} \quad x \neq 0 \quad \text{et } x \neq \frac{1}{n} \ \forall\, n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \quad \text{et } x = \frac{1}{n} \ \forall\, n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1) Déterminer l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^+$ où f est continue.

2) Montrer que f est dérivable en 0 et en tout points $x \neq \frac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{h \longrightarrow 0,\, h \neq 0} \frac{(\frac{1}{n} + h)^2 \sin(\frac{\pi}{\frac{1}{n}+h})}{h} = (-1)^{n+1}\pi$$

4) En déduire que f n'est pas dérivable aux points $x = \frac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Oui les **Développements limités .**

Saïd EL HAJJI
Université Mohammed V - Agdal
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique
Groupe d'Analyse Numérique et Optimisation
Avenue Ibn Batouta, B.P. 1014
Rabat, Maroc
Email : elhajji@fsr.ac.ma
Page web : www.fsr.ac.ma/ANO/elhajji