Université Mohammed V - Agdal
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique
Avenue Ibn Batouta, B.P. 1014
Rabat, Maroc

Filière DEUG :

Sciences Mathématiques et Informatique (SMI)
et
Sciences Mathématiques (SM)

Module Mathématiques I

NOTES DE COURS D'ANALYSE I

Chapitre I : CONSTRUCTION DU CORPS DES REELS

ET

Chapitre I I: SUITES NUMERIQUES

Par

Saïd El Hajji	Touria Ghemires
elhajji@fsr.ac.ma	ghemires@fsr.ac.ma

Groupe d'Analyse Numérique et Optimisation
Page web : http://www.fsr.ac.ma/ANO/

Année 2005-2006

1 Construction axiomatique de $\mathbb{R}$

1.1 Notion de fonction et notations

On suppose acquise la notion intuitive d'ensemble.
On détermine un ensemble E en explicitant ses éléments ou par compréhension $E = \{x \ / \ x$ vérifie une propriété $(P)\}$.

Par exemple :

- $E_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ et
- $E_2 = \{x \in E_1 \ / \ x \text{ vérifie } 2 \leq x \leq 5\} = \{2, 3, 4\}$

Definition 1 *Soit E un ensemble, on dit que A est une partie (ou un sous-ensemble) de E si tout élément de A est un élément de E. On dit aussi que A est inclus dans E et on note $A \subset E$.*

$$A \subset E \Longleftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in E)$$

Le symbole $\in$ dénote l'appartenance et on a: $x \in E \Longleftrightarrow \{x\} \subset E$.

Definition 2 *- Une fonction f d'un ensemble A vers un ensemble B, on note $f : A \rightarrow B$, est une relation qui à chaque élément de A associe au plus un élément de B. On exprime une fonction de A vers B sous la forme:*

$$\begin{cases} f : A \longrightarrow & B \\ \quad x \longmapsto & f(x) \end{cases}$$

- *A est appelé l'ensemble de départ et B l'ensemble d'arrivée de la fonction f.*
- *$Dom(f)$,le domaine de définition de f, est l'ensemble des éléments de A , pour lesquels $f(x)$ existe:*

$$dom(f) = \mathfrak{D}_f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \text{ existe et est finie } \}$$

- *$im(f)$ est l'ensemble des éléments de B qui sont des images par f). Ainsi $dom(f) \subset A$ et $im(f) \subset B$.*
- *La fonction f est une application, lorsque $A = dom(f)$.*

Example 3 *Soit $f : x \longmapsto f(x) = \frac{x}{\sqrt[6]{9-3x}}$*

Puisque on ne peut ni diviser par 0, ni extraire la racine sixième d'un nombre négatif, on a:

$$dom(f) = \{x \ / \ (9-3x) \neq 0 \text{ et } (9-3x) \geq 0\},$$

ce qui donne:

$$dom(f) = \{x \ / \ (9-3x) > 0\} = \{x \ / \ x < 3\} =]-\infty, 3[.$$

Example 4 *Soit* $f : x \longmapsto f(x) = \ln(-|x|)$

On a : $dom(f) = \varnothing$!

1.2 Construction axiomatique de $\mathbb{R}$ et propriétés de base

On rappelle les divers ensembles de nombres:

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels.

$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 0, 1, 2, 3, ...\}$ est l'ensemble des nombres entiers relatifs.

$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels. Par définition si $x \in \mathbb{Q}$ alors $x = \frac{p}{q}$ où p et q sont des nombres relatifs premiers entre eux avec $q \neq 0$.

Sur chacun de ces ensembles l'addittion $+$ et la multiplication $\times$ sont définies; de même que la relation d'ordre $\leq$.

Proposition 5 *Si x est solution de l'équation $x^2 = 2$ alors $x \notin \mathbb{Q}$. On dit que x est irrationnel.*

Démonstration : Elle se fait par l'absurde. On suppose que $x = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ sont premiers entre eux. Si $x^2 = 2$ alors $p^2 = 2q^2$et p^2 est pair donc p est aussi pair. Ainsi $p = 2k$ donc $p^2 = 4k^2 = 2q^2$. Donc $2k^2 = q^2$. Donc q est pair. Ce qui est impossible car p et q sont premiers entre eux.

Definition 6 *On note par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. Il a été introduit pour compléter l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. On dit que x est un nombre réel si et seulement si:*

- *ou bien $x \in \mathbb{Q}$, x est dit rationnel*
- *ou bien $x \notin \mathbb{Q}$, x est dit irrationnel.*

Parmi les réels qui sont irrationnels, on peut citer : $\sqrt{2}, \pi, e, \ln(2)$.

On admet donc l'existence de l'ensemble de nombres réels $\mathbb{R}$, qui contient l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ et qui vérifie les axiomes suivants:

1. $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.

2. $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, ($x \leq y$ ou $y \leq x$).

3. La relation d'ordre $\leq$ (inférieur ou égal) est compatible avec les opérations sur $\mathbb{R}$

i) La relation d'ordre $\leq$ est compatible avec l'addition $+$:

pour tout x, y, x' et y' des nombres réels :

1. $(x \leq y\ ) \Rightarrow (\forall z \in \mathbb{R},\, x+z \leq y+z)$,

$(x \leq y \text{ et } x' \leq y') \Rightarrow (x+x' \leq y+y')$.

ii) La relation d'ordre $\leq$ est compatible avec la multiplication $\times$:

pour tout x et y des nombres réels :

$(x \leq y) \Rightarrow \forall z \in \mathbb{R}^+, (\ x \times z \leq y \times z)$,

$(x \leq y) \Rightarrow \forall z \in \mathbb{R}^-, (\ x \times z \geq y \times z)$.

4. Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.

La relation d'ordre total permet de définir la fonction valeur absolue dans $\mathbb{R}$.

Definition 7 *La valeur absolue dans $\mathbb{R}$ est une application*

$$\begin{cases} |.| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ \qquad x \longmapsto |x| \end{cases}$$

et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x \leq 0 \end{cases}$

Exercise 8 *Montrer que $|x| = \sup(x, -x)$.*

Definition 9 *On appelle partie entière d'un nombre réel x, l'unique entier relatif, noté $E(x)$ ou $[x]$, tel que : $E(x) \leq x < E(x)+1$. On définit ainsi une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{Z}$ appelée partie entière.*

Proposition 10 *Soit x un nombre réel, alors :*

i $x - 1 < E(x) \leq x$

ii $E(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$

iii $\forall n \in \mathbb{Z}, E(x+n) = E(x) + n$

1.3 Majorant, minorant d'une partie de $\mathbb{R}$

Definition 11 *Soit A une partie de $\mathbb{R}$*

On dit que $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de A si et seulement si

$$\forall x \in A,\ x \leq M$$

dans ce cas A est majorée par M.

On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un minorant de A si et seulement si

$$\forall x \in A,\ x \geq m$$

dans ce cas A est minorée par m

On dit que A est bornée ssi elle est minorée et majorée càd

$$\exists m \in \mathbb{R} \text{ et } \exists M \in \mathbb{R} :\ \forall x \in A,\ m \leq x \leq M)$$

Example 12 $]0+\infty[$ *est minorée par* 0*. On dit aussi* 0 *est un minorant de* $]0+\infty[$

Example 13 1 *est un majorant de* $]-\infty,0[$

Example 14 *L'intervalle* $]-15,14[$ *est borné dans* $\mathbb{R}$ *(majorée par 14 et minorée par -15.*

1.3.1 Borne inférieure, borne supérieure :

Definition 15 *On dit que* M_A *est la borne supérieure de* $A \Longleftrightarrow M_A$ *est le plus petit des majorants de* A*.*

On dit que m_A *est la borne inférieure de* $A \Longleftrightarrow m_A$ *est le plus grand des minorants de* A*.*

Notation 16 $M_A = \sup A, \quad m_A = \inf A$

Example 17 6 *est la borne inférieure de* $]6+\infty[$.

Caractérisation des bornes sup et inf :

$$M_A = \sup A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 1- \quad M_A \text{ est un majorant de } A \ (\forall a \in A \ , \ a \leq M_A) \\ 2- \quad \forall \epsilon > 0, \ \exists a \in A : M_A - \epsilon < a \leq M_A \end{cases}$$

$$m_A = \inf A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 1- \quad m_A \text{ est un minorant de } A \ (\forall a \in A, \ m_A \leq a) \\ 2- \quad \forall \epsilon > 0 \ \exists a \in A, \ m_A \leq a < m_A + \epsilon \end{cases}$$

On a aussi la propriété de la borne inf, analogue à celle de borne sup du 4.

Proposition 18 *Toute partie de* $\mathbb{R}$ *non vide et minorée admet une borne inférieure.*

Une propriété importante de $\mathbb{R}$ est la propriété d'Archimède:

Proposition 19 $\mathbb{R}$ *est archimédien:*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists \ n_x \in \mathbb{N}, \ x < n_x.$$

Démonstration : La démonstration se fait par l'absurde. On suppose que $\mathbb{R}$ est non archimédien, c'est à dire qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \ x \geq n$.

x est donc un majorant de $\mathbb{N}$, partie non vide, dans $\mathbb{R}$. Donc elle admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$, notée s.

En utilisant la caractérisation de la borne sup avec $\epsilon = 1$,

$$\exists m \in \mathbb{N}, \ s-1 \leq m \leq s.$$

Ce qui implique que $s < m+1$, comme $m+1 \in \mathbb{N}$; ceci contredit que *s est un majorant de* $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

Corollary 20 *soient y et z des réels strictement positifs, on a les propriétés suivantes:*

a $\exists n \in \mathbb{N},\ z < ny.$

b $\exists n \in \mathbb{N}\ ,\ 0 < \frac{1}{n} < y.$

c $\exists n \in \mathbb{N}$, $n - 1 \leq z < n.$

Démonstration : (a) il suffit de prendre $x = \frac{z}{y}$ *qui est* > 0,et d'utiliser alors la propriété d'Archimède:$\exists s \in \mathbb{N}$, $\frac{z}{y} < n \Longrightarrow z < ny.$

(b) On utilise (a) avec z=1.

(c) la propriété d'Archimède assure que l'ensemble $A = \{m \in \mathbb{N}, z < m\}$ est non vide. Soit n=infA=minA et on a $n - 1 \leq z < n$

2 SUITES NUMERIQUES

2.1 Suites Réelles : Définitions et notations

D'une façon générale, on définit une suite comme une succession ordonnée d'éléments pris dans un ensemble donné. On dit aussi qu'une suite est une énumération d'une infinité de termes.

Definition 21 *Une suite numérique, dite aussi suite réelle, est une application* u *d'une partie* I *de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{R}$ *.*

Ainsi une suite réelle, notée $u = (u_n)_{n \in I}$ *, est une application :*

$$\begin{cases} u : I \subset \mathbb{N} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad\quad n & \longmapsto u_n \end{cases}$$

On pose $u(n) = u_n$ *et on appelle* u_n *le terme général (ou le terme de rang* n*) de la suite* $(u_n)_n$*.*

Si $I = \mathbb{N}$*, la suite de terme général* u_n *sera notée aussi par* $(u_n)_n$ *ou* $\{u_0, u_1, ..., u_n, ...\}$*.*

Remark 22 *1.*

2. Une suite $(u_n)_n$ *peut être définie par l'expression de son terme général* u_n *en fonction de* n*.*

3. Une suite peut être également définie par la valeur du premier terme et par une relation de récurrence, c'est-à-dire une relation liant deux termes généraux successifs. On dit alors que c'est une suite récrrente.

Example 23 $(u_n)_{n\geq 1}$ *la suite de terme général définie par :* $\forall n \geq 1$ *,* $u_n = \frac{1}{n}$*.*

Example 24 $(u_n)_n$ *la suite de terme général définie par :* $\forall n \geq 0$ *,* $u_n = cos(n\pi)$*.*

Example 25 $(u_n)_n$ *la suite de terme général définie par :*

$$\begin{cases} \qquad u_0 = 1 \\ \forall n \geq 0,\; u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$$

Example 26 *La fonction* $u : n \geq 4 \rightarrow u(n) = \frac{2}{3^n}$*, définit la suite réelle* $(u_n)_{n\geq 4}$ *de terme général :*

$u_n = \frac{2}{3^n}$*,pour tout* $n \geq 4$*.*

On a : $dom(u) = \{n \in \mathbb{N} \;/\; n \geq 4\} = \{4, 5, 6, ...\} = I$

et $im(u) = \left\{\frac{2}{3^4}, \frac{2}{3^5}, \frac{2}{3^6}, ...\right\} = (u_n)_{n\geq 4}$*.*

Remark 27 *Soient* $(u_n)_n$ *une suite et* f *une fonction, telles que* $u_n = f(n)$ *si* $n \geq m$ *où* $m \in \mathbb{N}$*. Alors l'étude du terme général* u_n *revient à l'étude de la fonction* f *dans le domaine de la suite* $(u_n)_n$*.*

Example 28 *Soit la suite définie par* $u(n) = \frac{n^3+100}{(n-1)^3}$. *Déterminer les* 3 *premiers termes de la suite.*

On a : $dom(u) = \mathbb{N} - \{1\}$,

et $u_0 = 100, u_2 = 108, u_3 = \frac{3^3+100}{2^3} = \frac{127}{8}, u_4 = \frac{4^3+100}{3^3} = \frac{164}{27}$.

Example 29 *Soit la suite définie par* $u(n) = \sin(n)$. *Déterminer les* 3 *premiers termes de la suite.(sur une calculatrice, il faut choisir le mode radian).*

On a : $dom(u) = \mathbb{N}$,

et $u_0 = \sin(0) = 0, u_1 = \sin(1) = 0.841\,47, u_2 = \sin(2) = 0.909\,30$.

Example 30 *Déterminer le terme général de la suite* $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, ...\right\}$.

En observant les termes de la suite, on constate que le numérateur de chaque terme correspond aux termes de la suite $(n)_n$ *et que le dénominateur correspond aux termes de la suite* $(n^2+1)_n$. *On peut en déduire que le terme général de la suite est défini par* $u_n = \frac{n}{n^2+1}$.

Ceci est d'ailleurs vérifié pour $n = 1, 2, 3, 4$.

Suite arithmétique: $u = (u_n)_n$ est une suite arithmétique (ou progression arithmétique) de raison $r \in \mathbb{R}$,si elle est définie par:

u_0 donné, $u_{n+1} = u_n + r$, pour $n \geq 0$.

Suite géométrique: $u = (u_n)_n$ est une suite géométrique (ou progression géométrique) de raison $q \in \mathbb{R}$, si ellle est définie par:

u_0 donné, $u_{n+1} = qu_n$, pour $n \geq 0$.

Opérations sur l'ensemble des suites numériques :

- Deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont égales $\Leftrightarrow u_n = v_n$,$\forall n \in IN$

- l'addition de deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$est la suite $(w_n)_n = (u_n + v_n)_n$, c'est à dire $w_n = u_n + v_n$.

- multiplication par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda(u_n)_n = (\lambda u_n)_n$.

- le produit de deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$: $(u_n)_n(v_n)_n = (u_n v_n)_n$.

- le quotient $\frac{(u_n)_n}{(v_n)_n}$de deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ avec $v_n \neq 0, \forall n \in \mathbb{N}$, *est la suite* : $(w_n) = (\frac{u_n}{v_n})_n$.

- On définit une relation d'ordre par: $(u_n)_n \leq (v_n)_n \Leftrightarrow u_n \leq v_n$,$\forall n \in IN$

Definition 31 *Une suite numérique u=*$(u_n)_n$ *est*

a) majorée (ou bornée supérieurement) s'il existe un nombre $M \in \mathbb{R}$, *tel que:* $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$, .

b) minorée (ou bornée inférieurement) s'il existe un nombre $m \in \mathbb{R}$, *tel que:* $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n$.

c) bornée si elle est majorée et minorée.

Remark 32 *La suite* (u_n) *est majorée* $\Leftrightarrow$ *l'ensemble* $E = \{u_n, n \in IN\}$ *est majoré.*

La suite (u_n) *est minorée* $\Longleftrightarrow \{u_n, n \in IN\}$ *minoré.*

La suite $(u_n)_{n\in IN}$ *est bornée* $\Longleftrightarrow \{u_n, n \in IN\}$ *borné.*

Example 33 *Soit la suite* $(\frac{n-1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Cette suite est bornée car $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \frac{n-1}{n} \leq 1$.

Example 34 *Soit la suite* $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$. *Cette suite est non bornée. Elle est minorée par* 0 *(car* $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2 \geq 0$*) et non majorée.*

2.2 Suites monotones

Definition 35 *Une suite* $(u_n)_n$, *où* $n \in \mathbb{N}$, *est :*

1. *croissante si:* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$, *càd* $u_0 \leq u_1 \leq ... \leq u_n \leq ....$
2. *strictement croissante si :* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < u_{n+1}$.
3. *décroissante si:* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
4. *strictement décroissante si :* $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > u_{n+1}$.
5. *stationnaire si:* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = u_{n+1}$.

Example 36 *Etudier la monotonie de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *de terme général*

$$u_n = \frac{1}{n^2}.$$

- Puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n^2}$, *on a* $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$.

Ainsi $\frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2}$ *car* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ n^2 < (n+1)^2$.

Donc la suite $(\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est strictement décroissante.*

- On aurait pu le montrer en considérant la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$ *(on a :* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = f(n)$*).Puisque* $f'(x) = -\frac{1}{x^3} < 0$, $\forall x \in [1, +\infty[$, *la fonction* f *est strictement décroissante dans* $[1, +\infty[$, *on en déduit que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *l'est aussi.*

Example 37 *Etudier la monotonie de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de terme général*

$$u_n = \frac{2^n}{n!}.(0! = 1)$$

On va comparer deux termes consécutifs: $u_n = \frac{2^n}{n!}$ *et* $u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.

On a $u_1 = \frac{2}{1!} = 2 \leq u_2 = \frac{2^2}{2!}. = 2 \leq u_3 = \frac{2^3}{3!}. = \frac{4}{3} \leq u_4 = \frac{2^4}{4!} = \frac{2}{3}$ *Les termes semblent décroître.*

A-t-on $\forall n,\ u_{n+1} \leq u_n$? *ce qui revient à montrer* $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \overset{?}{\leq} \frac{2^n}{n!}$, *càd* $n!2^{n+1} \overset{?}{\leq} (n+1)!2^n$ *ce qui est équivalent à* $2 \overset{?}{\leq} (n+1)$.

Or cette inégalité est vérifiée pour tout $n \geq 1$ *donc on a: (*$\forall\ n \geq 1,\ u_{n+1} \leq u_n$*).*

2.3 Nature d'une suite

Definition 38 *(1)Une suite $(u_n)_n$ converge (ou est convergente) vers $L \in \mathbb{R}, lorsque$ $n \longrightarrow +\infty$, si et seulement si*

$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ *tel que* $\forall n \geq N : |u_n - L| < \epsilon$

On écrit alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n)_n = L$.

(2) Une suite $(u_n)_n$ diverge (ou est divergente), si et seulement si la suite $(u_n)_n$ n'est pas convergente.

Remark 39 $|u_n - L| < \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon < u_n - L < \varepsilon$

$\Longleftrightarrow L - \varepsilon \leq u_n \leq L + \varepsilon$

$\Longleftrightarrow u_n \in \left]L - \varepsilon, L + \varepsilon\right[$.

Example 40 *La suite $(u_n)_n$ dont le terme général est défini par $u_n = \frac{1}{n}$, où $n \geq 1$ converge vers 0.*

En effet, $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^* : N\ \epsilon > 1$ (cela provient du fait que $\mathbb{R}$ est archimédien) (on peut prendre $N = \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$). Donc $\forall n > N$, on a $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon \Rightarrow |u_n| = \frac{1}{n} < \epsilon$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$.

Example 41 *La suite $(u_n)_n$ dont le terme général est défini par $u_n = 2^{\frac{1}{n}}$, où $n \geq 1$, converge vers 1.*

En effet, $\forall n \geq 1, u_n = 2^{\frac{1}{n}} = \sqrt[\frac{1}{n}]{2} > 1$, $2^{\frac{1}{n}} = 1 + v_n$ où $v_n > 0$. Donc tout revient à étudier la convergence de la suite $(v_n)_n$.

Comme, $\forall x > 0$, on a, (par recurrence), $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Donc $\forall n \geq 1$, $2 = \left(2^{\frac{1}{n}}\right)^n = (1+v_n)^n \geq 1 + nv_n \Rightarrow 1 \geq nv_n$ càd $v_n \leq \frac{1}{n}$

Ainsi, $\forall n \geq N_\epsilon = \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1, |v_n - 0| = |v_n| \leq \frac{1}{n} < \epsilon$ càd la suite $(v_n)_n$ converge vers 0.

Comme $v_n = (u_n - 1)$ et que la suite $(v_n)_n$ converge vers 0 alors la suite $(u_n)_n$ converge vers 1.

Remark 42 *Soit une suite $(u_n)_n$ et une fonction f, telles que $u_n = f(n)$,$\forall n \geq m$, où $m \in \mathbb{N}$.*

Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Proposition 43 *La limite d'une suite, si elle existe, est unique.*

Démonstration : La preuve se fait par l'absurde. On suppose que $l_1 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $l_2 = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n, avec\ l_1 \neq l_2$

càd $\forall \epsilon > 0$,

$\exists N_{1,\epsilon} \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_{1,\epsilon} : |u_n - l_1| < \epsilon$

et $\exists N_{2,\epsilon} \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_{2,\epsilon} : |u_n - l_2| < \epsilon$

donc

en posant $N_\epsilon = \max(N_{1,\epsilon}, N_{2,\epsilon}), on\ a : \forall n \geq N_\epsilon$, $|u_n - l_1| < \epsilon$ et $|u_n - l_2| < \epsilon$

D'où $\forall \epsilon > 0, \exists N : \forall n \geq N$ on a :
$|l_1 - l_2| = |l_1 - u_n + u_n - l_2| \leq |u_n - l_1| + |u_n - l_1| < 2\epsilon$
et donc $|l_1 - l_2| = 0$ càd $l_1 = l_2$,ce qui est absurde.

Proposition 44 *Si une suite $(u_n)_n$ converge, alors elle est bornée.*

Démonstration : Si la suite $(u_n)_n$ CV vers L, on a
$\underset{n \longrightarrow +\infty}{lim} u_n = L \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N_\varepsilon$ tel que $n > N_\varepsilon, |u_n - L| < \epsilon$
comme, $u_n = u_n - L + L \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon$ tel que $n > N_\varepsilon, |u_n| \leq |u_n - L| + |L| \leq \varepsilon + |L|$
donc $\forall n > N_\varepsilon, |u_n| \leq \varepsilon + |L|$
Soit $M = sup(|u_1|, |u_2|, ..., |u_{N_\varepsilon}|, \varepsilon + |L|)$
On a : $\forall n \in IN$, $|u_n| < M$ càd la suite $(u_n)_n$ est bornée.

Remark 45 *(1) Si la suite $(u_n)_n$ est non bornée alors elle est divergente(c'est la contraposée de la proposition).*
(2) La réciproque de la proposition est fausse. En effet, soit la suite $(u_n)_n$ de terme général définie par $u_n = (-1)^n$. On a :
$\forall n$, $|u_n| \leq 1$ (car $\forall n, -1 \leq (-1)^n \leq 1$) mais la suite $(u_n)_n$ est divergente.

Limites infinies :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0,\ \exists N_A \in\ IN^* : \forall n > N_A, u_n \geq A$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0,\ \exists N_A \in\ IN^* : \forall n > N_A, u_n < -A$$

$$\Longleftrightarrow \forall B < 0, \exists\ N_B \in\ IN^* : \forall n > N_A,\ u_n < B$$

Remark 46 *Si une suite diverge, on peut avoir soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, soit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ qui n'existe pas.*

Enonçons maintenant un théorème qui regroupe les opérations sur les suites convergentes:

Theorem 47 *Si $(u_n)_n$ est une suite convergente vers $L \in \mathbb{R}$ et $(v_n)_n$ une suite convergente vers $M \in \mathbb{R}$ alors*

1. $\underset{n\to+\infty}{lim}(u_n \pm v_n) = \underset{n\to+\infty}{lim} u_n \pm \underset{n\to+\infty}{lim} v_n = L \pm M.$

2. $\underset{n\to+\infty}{lim}(u_n v_n) = (\underset{n\to+\infty}{lim} u_n)(\underset{n\to+\infty}{lim} v_n) = LM$

3. $\underset{n\to+\infty}{lim}(\lambda u_n) = \lambda(\underset{n\to+\infty}{lim} u_n) = \lambda L,$ *où* $\lambda \in \mathbb{R}.$

4. *Si* $M \neq 0$ *et* $v_n \neq 0, \forall n, alors \underset{n\to+\infty}{lim} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\underset{n\to+\infty}{lim} u_n}{\underset{n\to+\infty}{lim} v_n} = \frac{L}{M},\ M \neq 0.$

Démonstration : On a

$\underset{n\longrightarrow+\infty}{lim}\ u_n = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\ N_{1,\varepsilon}$ tel que $\forall n > N_{1,\varepsilon}, |u_n - L| < \epsilon$

et $\underset{n\longrightarrow+\infty}{lim}\ v_n = M \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\ N_{2,\varepsilon}$ tel que $\forall n > N_{2,\varepsilon}, |u_n - M| < \epsilon$

Pour tout $\epsilon > 0$,on pose: $\quad N_\epsilon = \sup(N_{1,\varepsilon}, N_{2,\varepsilon})$

1.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = L\\ \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = M\end{array}\right)\overset{?}{\Rightarrow}\lim_{n\longrightarrow+\infty}(u_n+v_n) = L+M$$

$\forall\epsilon > 0,\ \forall n > N_\epsilon$, on a :

$|u_n + v_n - (L+M)| = |(u_n - L) + (v_n - M)| \leq |u_n - L| + |v_n - M| \leq 2\epsilon$

càd la suite $(u_n + v_n)_n$ converge et on a:

$$\underset{n\to+\infty}{lim}(u_n+v_n) = \underset{n\to+\infty}{lim} u_n + \underset{n\to+\infty}{lim} v_n = L + M.$$

2.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = L\\ \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = M\end{array}\right)\overset{?}{\Rightarrow}\lim_{n\longrightarrow+\infty}(u_n v_n) = LM$$

On a :

$|u_n\ v_n - LM| = |u_n\ v_n - u_n M + u_n M - LM| = |u_n(v_n - M) + M(u_n - \ell)|$

$\Rightarrow |u_n v_n - LM| \leq |u_n|\ |v_n - M| + |M|\ |u_n - \ell|$

Soit $\epsilon > 0$,

- $\forall n > N_\epsilon$, on a $\ |u_n v_n - LM| \leq |u_n|\ \epsilon + |M|\ \epsilon$

Comme la suite $(u_n)_n$ est une suite convergente, elle est donc bornée càd: $\exists$ b tel que $\forall n,\ |u_n| < b$

on a alors: $\ \forall n > N_\epsilon, |u_n v_n - LM| \leq |u_n|\ \epsilon + |M|\ \epsilon \leq b\epsilon + |M|\ \epsilon$

- Si on pose $K = sup(b, |M|)$, on a: $b + |M|\ \leq 2$

et alors $\forall n > N_\epsilon, |u_n v_n - LM| \leq b\epsilon + |M|\,\epsilon \leq K\varepsilon$.

càd $\underset{n\to+\infty}{lim}(u_n v_n) = \underset{n\to+\infty}{lim} u_n \underset{n\to+\infty}{lim} v_n = LM.$

3. et 4. sont faciles à vérifier.

Example 48 *Etudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ dont le terme général est défini par $u_n = \frac{3}{n}$, où $n \geq 1$.*

Cette suite converge vers 0 car la fonction $\underset{x\to+\infty}{lim} f(x) = \underset{x\to+\infty}{lim} \frac{3}{x} = 0$

Example 49 *Etudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ dont le terme général est défini par $u_n = \frac{n^3+100}{(n-1)^3}$*

Cette suite converge vers 1 car la fonction $\underset{x\to+\infty}{lim} f(x) = \underset{x\to+\infty}{lim} \frac{x^3+100}{(x-1)^3} = 1$

Example 50 *Etudier la convergence de la suite $(v_n)_n$ dont le terme général est défini par*

$v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(4 + \frac{1}{n}\right)$ *où $n \geq 1$.*

Si on pose $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et $w_n = \left(4 + \frac{1}{n}\right)$, on a $\underset{n\to+\infty}{lim} u_n = e$ et $\underset{n\to+\infty}{lim} w_n = 4$ donc $\underset{n\to+\infty}{lim} v_n = 4e$.

Ainsi la suite $(v_n)_n$ converge vers $4e$.

Rappel : $\forall a > 0$, *on a* $a^x = e^{x\log(a)}$

En utilisant $\underset{X\to 0}{lim} \frac{\log(1+X)}{X} = 1$ *et en faisant le changement de variable* $x = \frac{1}{X}$, *on a :* $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\log(1+\frac{1}{x})} = e^{\frac{\log(1+X)}{X}}$.

Donc $\underset{X\to 0}{lim} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ *ainsi* $\underset{n\to+\infty}{lim} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$.

Example 51 *Etudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ dont le terme général est défini par*

$u_n = (-1)^n$ *où* $n \geq 1$.

Cette suite diverge car $(-1)^n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ -1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$ *donc* $\underset{n\to+\infty}{lim} (-1)^n$ *n'existe pas*

Example 52 *Etudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ dont le terme général est défini par*

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1}, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

On a une suite géométrique de raison $q = 2$. Par recurrence sur n, on montre que: $u_n = 2^n u_0 = 2^n$.

Donc cette suite diverge car la fonction $\underset{x\to+\infty}{lim} f(x) = \underset{x\to+\infty}{lim} 2^x = +\infty$.

Dans certains cas, on peut aisément prouver qu'une suite est convergente à l'aide de certains critères.

2.3.1 Critères de convergence:

Theorem 53 *(d'encadrement) : Soit $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ des suites telles que $u_n \leq w_n \leq v_n$ pour tout $n \geq m$, où $m \in \mathbb{N}$. Si $\underset{n\to+\infty}{lim} u_n = L$ et $\underset{n\to+\infty}{lim} v_n = L$ alors $\underset{n\to+\infty}{lim} w_n = L$.*

Example 54 *Déterminer* $\underset{n\to+\infty}{lim} \frac{\sin(n)}{n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ donc $\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$.

Or $\underset{n\to+\infty}{lim} \frac{-1}{n} = 0$ et $\underset{n\to+\infty}{lim} \frac{1}{n} = 0$ donc $\underset{n\to+\infty}{lim} \frac{\sin(n)}{n} = 0$.

Definition 55 *Une suite $(u_n)_n$ est dite alternée si seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}^*$) on a $u_n u_{n+1} \leq 0$.*

Proposition 56 *Si une suite alternée converge alors sa limite est nulle.*

Example 57 *Déterminer* $\underset{n\to+\infty}{lim} \frac{(-1)^n}{n}$.

Pour tout $n \geq 1$, *on a* $\frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$. *or* $\underset{n\to+\infty}{lim} \frac{-1}{n} = 0$ *et* $\underset{n\to+\infty}{lim} \frac{1}{n} = 0$ *donc* $\underset{n\to+\infty}{lim} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Theorem 58 *Soit une suite* $(u_n)_n$, *où* $n \in \mathbb{N}$

1. *Si la suite* $(u_n)_n$ *est croissante et majorée par* M, *alors la suite est convergente et de plus sa limite* l *vérifie* $l \leq M$.
2. *Si la suite* $(u_n)_n$ *est décroissante et minorée par* m, *alors la suite est convergente et de plus sa limite* l *vérifie* $l \geq m$.

Remark 59 *On peut voir facilement que si*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \ \ ou \ \ \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty,$$

alors la suite $(u_n)_n$ *est non bornée*

Proposition 60 *Soit une suite* $(u_n)_n$, *où* $n \in \mathbb{N}$,

1) si la suite $(u_n)_n$ *est croissante et non majorée, alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2) si la suite $(u_n)_n$ *est décroissante et non minorée, alors* $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Example 61 *Déterminer, sans évaluer la limite, si la suite* $(\frac{3n}{4n+1})_n$ *est convergente ou divergente. On dit aussi déterminer la nature de la suite.*

On a $u_n = \frac{3n}{4n+1}$ *est définie pour tout* n. *De plus , on a* $u_n = f(n)$ *où* f *est la fonction* $f(x) = \frac{3x}{4x+1}$. *On a* $f'(x) = \frac{3}{(4x+1)^2} > 0, \forall x \in [0, +\infty[$. *Ainsi la suite* $(\frac{3n}{4n+1})_n$ *est strictement croissante.*

D'autre part, pour tout $n, u_n = \frac{3n}{4n+1} \leq \frac{4n}{4n+1} \leq \frac{4n}{4n} = 1$. *Par suite la suite* $(\frac{3n}{4n+1})_n$ *est majorée. Comme elle est déja (strictement) croissante alors elle est convergente.*

Proposition 62 *(Critère de D'Alembert pour la convergence des suites à termes* > 0*): Soit* $(u_n)_n$ *une suite réelle à termes strictement positifs (càd* $\forall n, u_n > 0$*). Si* $\underset{n\to+\infty}{lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L < 1$ *alors la suite* $(u_n)_n$ *converge vers* 0.

Démonstration : On a $\underset{n\to+\infty}{lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L < 1$ donc

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon : n \geq N_\epsilon, \ \text{ on a } \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - L \right| < \epsilon.$$

Puisque $L < 1$,il existe $b \in \mathbb{R} : 0 \leq L < b < 1$.

Pour $\epsilon = b - L > 0, \exists N, \forall n \geq N$, on a :

$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - L \right| < b - L \Leftrightarrow -(b-L) \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} - L \leq b - L \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < b \Rightarrow u_{n+1} < bu_n$

Ainsi (par itération du processus) , on a :

$0 < u_{n+1} < bu_n < b^2 u_{n-1} < ... < b^{n-N+1} u_N$

Or $\underset{n \to +\infty}{lim} (b^{n-N+1} u_N) = (b^{-N} u_N) \underset{n \to +\infty}{lim} b^{n+1} = 0$ donc $\underset{n \to +\infty}{lim} u_{n+1} = 0$, càd la suite $(u_n)_n$ converge vers 0.

Example 63 *Etudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie pour tout n par $u_n = \frac{n}{2^n}$.*

Pour tout n, On a $u_n = \frac{n}{2^n} > 0$.

$\underset{n \to +\infty}{lim} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \underset{n \to +\infty}{lim} (\frac{n+1}{2^{n+1}} \frac{2^n}{n}) = \underset{n \to +\infty}{lim} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1.$

Donc, d'après le critère dit de D'Alembert, la suite $(u_n)_n = (\frac{n}{2^n})_n$ converge vers 0.

2.3.2 Suites de Cauchy

Definition 64 *Une suite réelle (u_n) est dite suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, si et seulement si :*

$\forall \epsilon > 0,\ \exists\ N_\varepsilon \in \mathbb{N}^* : \forall p \geq N_\varepsilon$ *et* $\forall q > N_\varepsilon \Longrightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$

Theorem 65 *Toute suite réelle convergente dans $\mathbb{R}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration : Si (u_n) est une suite réelle convergente vers l dans $\mathbb{R}$, on a

$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ N_\varepsilon > 0 : \forall\ n > N_\varepsilon\ \ |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{\varepsilon}$

Donc

$\forall \epsilon > 0,\ \exists\ N_\varepsilon > 0 : \forall p \geq N_\varepsilon$ *et* $\forall q \geq N_\varepsilon$ on a :

$$|u_p - uq| \leq |u_p - \ell| + |u_q - \ell| < \epsilon + \epsilon < 2\epsilon.$$

La réciproque du théorème précédent est vraie:

Theorem 66 *Toute suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$ est convergente dans $\mathbb{R}$.*

Quelques propriétés des suites de Cauchy:

Proposition 67 *Si (u_n) et (v_n) sont deux suites de Cauchy alors :*

Les suites $(|u_n|)_n$ et $(|v_n|)_n$ sont de Cauchy

La suite $(u_n + v_n)_n$ est de Cauchy

Definition 68 *Une suite (u_n) est dite suite contractante dans $\mathbb{R}$, si et seulement si :*

$\forall n \geq 1,\ |u_{n+1} - u_n| < k\,|u_n - u_{n-1}|$ *où* $0 < k < 1$.

Theorem 69 *Toute suite contractante dans $\mathbb{R}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$.*

2.4 Suites récurrentes

Definition 70 *Une suite récurrente s'écrit sous la forme suivante:* $u_0, u_1, ..., u_{s-1}$ *donnés, et* u_n *s'écrit sous la forme suivante :*

$u_n = F(u_{n-1,}u_{n-2}, ..., u_{n-s})$ *, où* F *est une fonction donnée*

ou

$u_n = G(u_{n,}u_{n-1,}u_{n-2}, ..., u_{n-s})$*, où* G *est une fonction donnée;*

pour un entier s donné.

2.5 Exemples:

Example 71 *Les suites arithmétiques et géométriques sont des suites recurrentes.*

Example 72 *Suites Arithmético-géométrique : Ce sont des suites* $(u_n)_n$ *dont le terme général est défini par :*

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = au_n + b \text{ pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

où a, b sont des réels donnés.

Example 73 *Calculer les 3 premiers termes de la suite* $(u_n)_n$ *définie par :*

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n \ + 1 \text{ pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

On a $u_0 = 3$ *donc* $u_1 = 2u_0 + 1 = 7, u_2 = 2u_1 + 1 = 15$ *et* $u_3 = 2u_2 + 1 = 31$.

Example 74 *Calculer les 2 premiers termes de la suite* $(u_n)_n$ *définie par*

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = \frac{3}{2+u_{n-1}}, \text{ pour tout } n \geq 1. \end{cases}$$

On a $u_0 = 0$ *donc* $u_1 = \frac{3}{2+u_0} = \frac{3}{2}, u_2 = \frac{3}{2+u_1} = \frac{3}{2+\frac{3}{2}} = \frac{6}{7}$

Example 75 *Calculer les 2 premiers termes de la suite de Fibonacci* $(u_n)_n$ *définie par :*

$$\begin{cases} u_1 = 1, \qquad u_2 = 1, \\ u_n = u_{n-2} + u_{n-1}, \text{ si } n \geq 3. \end{cases}$$

On a $u_1 = u_2 = 1$ *donc* $u_3 = u_1 + u_2 = 1 + 1 = 2$ *et* $u_4 = u_2 + u_3 = 1 + 2 = 3$.

2.5.1 Etude de suites récurrentes particulière

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie dans I et à valeur dans un sous-ensemble J de I, càd $f : I \to J \subset I$.

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in I, \text{ donné} \\ u_{n+1} = f(u_n), \ n \geq 0 \end{cases}$$

Cette suite est appelée suite récurrente associée à f et u_0.
On a : $\forall n \in \mathbb{N},\ f(u_n) \in I$ donc la suite $(u_n)_n$ est bien définie.

Proposition 76 *Si la suite $(u_n)_n$ converge vers l et si f est continue en l alors $l = f(l)$.*

Remark 77 *Pour étudier une suite recurrente de la forme :* $\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = f(u_n),\ n \geq 0 \end{cases}$

i) On étudie : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$.

- On peut étudier le signe du second membre.

- Si tous les u_n sont positifs, on étudie le rapport $R = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$, si cette limite existe.

Si $R > 1$ alors la suite $(u_n)_n$ est croissante.

Si $R < 1$ alors la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

ii) On peut faire l'hypothèse que la suite $(u_n)_n$ converge vers l. l est alors solution de l'équation $l = f(l)$, si on suppose que f est continue. On cherche alors à monter que le terme $|u_{n+1} - l|$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$.

Example 78 *Etudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ dont le terme général est défini par*

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4, \text{ si } n \geq 1. \end{cases}$$

On a $u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 4 = 5$,

$u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 4 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}u_0 + 4) + 4 = \frac{1}{4}u_0 + 6$

$u_3 = \frac{1}{2}u_2 + 4 = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}u_0 + 6) + 4 = \frac{1}{8}u_0 + 7$

Par récurrence sur n, on montre que: $\forall n, u_n \geq 0$.

Si la suite $(u_n)_n$ converge vers l alors $l = \frac{1}{2}l + 4 \Rightarrow l = 8$.

Ainsi, $l - u_{n+1} = (\frac{1}{2}l + 4) - (\frac{1}{2}u_n + 4) = \frac{1}{2}(l - u_n)$.

Donc $l - u_{n+1} = \frac{1}{2}(l - u_n) = \frac{1}{2^{n+1}}(l - u_0) = \frac{3}{2^n}$ *(car $8 - u_0 = 6$), la suite $(u_n)_n$ converge vers 8.*

Example 79 *Etudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ dont le terme général est défini par*

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = \frac{3}{2+u_{n-1}}, \text{ si } n \geq 1. \end{cases}$$

On a une suite récurrente càd de la forme $u_n = f(u_{n-1})$ avec $f(x) = \frac{3}{2+x}$.

Si la suite $(u_n)_n$ converge vers l, on aura $l = f(l)$ càd $l = \frac{3}{2+l}$, dont les solutions sont 1 et -3. Comme tous les éléments de la suite sont positifs alors $l \geq 0$. Par suite une limite eventuelle de la suite est $l = 1$.

On a $u_n - 1 = \frac{3}{2+u_{n-1}} - 1 = \frac{-1+u_n}{2+u_n}$ *donc* $|u_n - 1| = \left|\frac{-1+u_n}{2+u_n}\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_{n-1} - 1\right|$.
Par itération du processus, on a: $|u_n - 1| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - 1| = \frac{1}{2^n}$. *Donc la suite $(u_n)_n$ converge vers $l = 1$.*

Example 80 *On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :*

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné,} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{\cos(u_n)}{3},\ n \geq 0 \end{cases}$$

La suite $(u_n)_n$ est une suite récurrente associée à f et $u_0 = 1$, avec

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{\cos(x)}{3}, \forall x \in [1, +\infty[.$$

Sa dérivée est: $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sin(x)}{3}, \forall x \in [1, +\infty[\Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} < 1$
La suite $(u_n)_n$ est alors contractante donc elle converge.

Theorem 81 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie dans I à valeurs dans un sous-ensemble de I, càd $f : I \to J \subset I$. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :* $\begin{cases} u_0 \in I, \text{ donné} \\ u_{n+1} = f(u_n), \ n \geq 0 \end{cases}$

i) Si la fonction f est croissante sur I alors la suite $(u_n)_n$ est monotone. Plus précisement:

si $u_0 \leq u_1$ alors la suite $(u_n)_n$ est croissante.
si $u_0 \geq u_1$ alors la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

ii) Si la fonction f est décroissante sur I alors les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones. L'une est croissante et l'autre est décroissante.

Démonstration : i) Comme on a: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1})$,

- si $u_0 \leq u_1$ et f croissante $\Rightarrow f(u_0) \leq f(u_1) \Rightarrow u_2 - u_1 = f(u_1) - f(u_0) \geq 0 \Rightarrow u_1 \leq u_2$.

Par récurrence sur n, on a: $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1}) \geq 0$. La suite $(u_n)_n$ est donc croissante.

- Le cas $u_0 \geq u_1$ se traite de manière analogue au cas précédent.

ii) Si la fonction f est décroissante $\Rightarrow g = fof$ est croissante.

Or pour u_0 donné, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = fof(u_{2n}) = g(u_{2n})$.

De même pour u_1 donné, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+3} = g(u_{2n+1})$

En utilisant i), on montre que les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones. En effet

- si $u_0 \leq u_2$

$g = fof$ croissante $\Longrightarrow u_2 = g(u_0) \leq u_4 = g(u_2)$ et par itération du procédé, la suite $(u_{2n})_n$ est croissante

f décroissante $\Longrightarrow u_1 = f(u_0) \geq u_3$ et par itération du procédé, la suite $(u_{2n+1})_n$ est décroissante.

- si $u_0 \geq u_2$,le même raisonnment est valable dans ce cas aussi.

Example 82 *On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :*
$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n^3 + 1), \ n \geq 0 \end{cases}$
La suite $(u_n)_n$ est une suite récurrente associée à f et $u_0 = 1$ où

$$f(x) = \frac{1}{3}(x^3 + 1), \forall x \in [0, +\infty[.$$

f est une fonction croissante. D'après le théorème précédent, la suite $(u_n)_n$ est monotone. De plus, $u_0 = 1 \geq u_1 = f(1) = \frac{2}{3}$, il s'en suit que cette suite est

décroissante. D'autre part, par récurrence sur n, on montre que la suite $(u_n)_n$ *est minorée par* 0.

Donc la suite $(u_n)_n$ *converge vers une limite* $l \in [0,1]$ *et qui vérifie* $l = f(l)$, *càd* l *est l'une des solutions de l'équation* $l^3 - 3l + 1 = 0$.

Example 83 *On considère la suite* $(u_n)_n$ *définie par :*

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné}, \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{\cos(u_n)}{3},\ n \geq 0 \end{cases}$$

La suite $(u_n)_n$ *est une suite récurrente associée à* f *et* $u_0 = 1$ *où* $\forall x \in [1, +\infty[$ *,on a* $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{\cos(x)}{3}$.

$\forall x \in [1, +\infty[$ *,on a* $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sin(x)}{3}. \Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} < 1$

La suite $(u_n)_n$ *est alors contractante donc elle converge.*

2.6 Suites adjacentes

Definition 84 *Soient* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites réelles on dira que* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *sont adjacentes si*

1) $(u_n)_n$ *est une suite croissante et* $(v_n)_n$ *est une suite décroissante*

2) $\forall n$ *, on a* $u_n \leq v_n$

3) $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$

Proposition 85 *Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.*

Faire la démonstration à titre d'exercice.

Example 86 *Soient* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites définies par :*

$u_0 = 1, u_n = 1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!}$

$v_0 = 4, v_n = u_n + \frac{1}{n!}$ *pour* $n \geq 1$

On a : $\forall n, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \Rightarrow u_{n+1} > u_n\ \forall n \Longrightarrow (u_n)$ *est strictement croissante.*

On a : $\forall n, v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}) - (u_n + \frac{1}{n!}) = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$

donc $\forall n, v_{n+1} - v_n = \frac{2}{(n+1)xn!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!}\left[\frac{2-(n+1)}{(n+1)!}\right] = \frac{1}{n!}\left(\frac{1-n}{n+1}\right) < 0, si\ n > 1.$

$\Rightarrow \forall n, v_{n+1} - v_n < 0 \Rightarrow (v_n)_n$ *est strictement décroissante.*

D'autre part,

$\forall n, v_n - u_n = \frac{1}{n!} > 0 \Longrightarrow \forall n, v_n > u_n$

et $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} (v_n - u_n) = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$

donc $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *sont 2 suites adjacentes, donc elles sont convergentes et ont la même limite* l.

On a donc $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} u_n = \lim\limits_{n \longrightarrow \infty} v_n = \ell$, *avec* $u_n < \ell < v_n$ *et* $1 \leq u_n < v_n$.

Remarque : ℓ *est un nombre irrationnel :*

La démonstration se fait par l'absurde: supposons que ℓ *est un nombre rationnel, càd* $\exists (p, N) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* : l = \frac{p}{N}$.

On a :

$\forall n,\ \ 1 \leq u_n < v_n \Rightarrow 1 < \ell = \frac{p}{N}$

$\forall n,\ u_n < \ell < v_n \implies \forall n, 1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{N\ !} < \frac{P}{N} < 1 + \frac{1}{1!} ... + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!}$

En multipliant par $N!$ *les* 2 *membres des inégalités précédentes, on obtient :*

$N!+(N-1)!+(N-2)!+...+1 < P(N-1)! < N!+(N-1)!+(N-2)!+...+1+1$

Donc si on pose $A = N! + (N-1)! + (N-2)! + ... + 1$ *alors* $A < P(N-1)! < A + 1$

Ce qui est absurde, car $P(N-1)! \in \mathbb{N}$ *et* A *et* $A+1$ *sont des entiers consécutifs .*

Donc ℓ *est un nombre irrationnel. Ce nombre est noté par* e.

Et on a $e = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!}\right) = 1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!} + ...$