Université Mohammed V - Agdal
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique
Avenue Ibn Batouta, B.P. 1014
Rabat, Maroc Filière :

SMI - SM & SMP - SMC
Module : M_6

NOTES de cours

Chapitre 3

COURBES PARAMETREES PLANES

Par

Alami Idrissi Ali El Hajji Saïd Hakam Samir

htttp ://www.fsr.ac.ma/ANO/

Année 2005-2006

Chapitre 3

COURBES PARAMETREES PLANES

3.1 Définitions

Soient :

1. P le plan muni du repère orthonormé $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$
2. I un intervalle de $\mathbb{R}$: $I \subset \mathbb{R}$.
3. f et g deux fonctions numérqiues définies dans I, que l'on suppose assez régulières (minimum continues).

Pour tout $M \in P$, on pose $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ et on note $M = M(x, y) = M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Définition 3.1.1 : *Une courbe paramétrique plane Γ est l'ensemble des positions (x, y) prises par un point $M(x, y)$, $M \in P$, dont les coordonnées sont des fonctions d'un paramètre t : $M = (x(t), y(t))$.*

Si ce paramètre est le temps, il s'agit alors de la trajectoire du point. On pose :

$$\Gamma = \{M(x,\, y) \in P : x = x(t) \text{ et } y = y(t) \text{ où } t \text{ décrit } I,\ I \subset \mathbb{R}\}$$

Une courbe paramétrée plane est une application

$$\Gamma : D \subset P \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ où } D = \{(x(t),\, y(t)) \ : \ t \in I \subset \mathbb{R}\}$$

La donnée de Γ est équivalente à la donnée de deux fonctions réelles de variable réelle f et g définies sur $I = D_f \cap D_g$ telles que pour tout $t \in I$ on ait pour tout $M \in P$,

$$\overrightarrow{0M}(t) = f(t)\,\overrightarrow{i} + g(t)\,\overrightarrow{j}$$

On dit alors que Γ est décrite par les équations :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ t \in I = D_f \cap D_g \end{cases}$$

$t \in I$, s'appelle le paramètre.
Par abus de notation , on pose (on note) :

$$\begin{aligned} M \in \Gamma &\Leftrightarrow \exists t \in I : M(t) \in \Gamma \\ &\Leftrightarrow \exists t \in I : \overrightarrow{0M}(t) = f(t)\overrightarrow{i} + g(t)\overrightarrow{j} \\ &\Leftrightarrow \exists t \in I : \overrightarrow{0M}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j} \end{aligned}$$

3.2 Exemples

3.2.1 Droite

Si la représentation d'une courbe Γ, dans un répére orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est

$$\begin{cases} x(t) = \alpha t + a \\ y(t) = \beta t + b \\ t \in I \subset \mathbb{R} \end{cases}$$

Si de plus $I = \mathbb{R}$ alors Γ est une droite de vecteur directeur (α, β) passant par le point $A(a, b)$.
Si de plus $I \subset \mathbb{R}$ alors Γ est la partie de la droite de vecteur directeur (α, β) passant par le point $A(a, b)$, correspondant aux valeurs prises par x et y quand t décrit I.

3.2.2 Cercle

Si la représentation d'une courbe Γ, dans un répére orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est

$$\begin{cases} x(t) = R\cos(t) \\ y(t) = R\sin(t) \\ t \in I \subset \mathbb{R} \end{cases}$$

Si $I = [0, 2\pi]$, alors Γ est le cercle de centre O et de rayon $R.i.e.R^2 = R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t$.
Si $I \subset \mathbb{R}$ alors Γ est la partie du cercle de centre O et de rayon R. correspondant aux valeurs prises par x et y quand t décrit I.
Ainsi si $I = [0, \pi]$, t décrit $[0, \pi]$ alors x décrit $[-R, +R]$ et y décrit $[0, R]$ i.e. Γ est le demi cercle "positif" de centre O et de rayon R.

Exemple 3.2.1 *Dessiner les points $M(0)$ et $M(2)$ de la courbe paramétrée :*

$$\begin{cases} x(t) = t^2 + \frac{1}{t+1} \\ y(t) = t + \frac{1}{t^2-1} \\ t \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]-1, 1\right[\cup \left]1, +\infty\right[\end{cases}$$

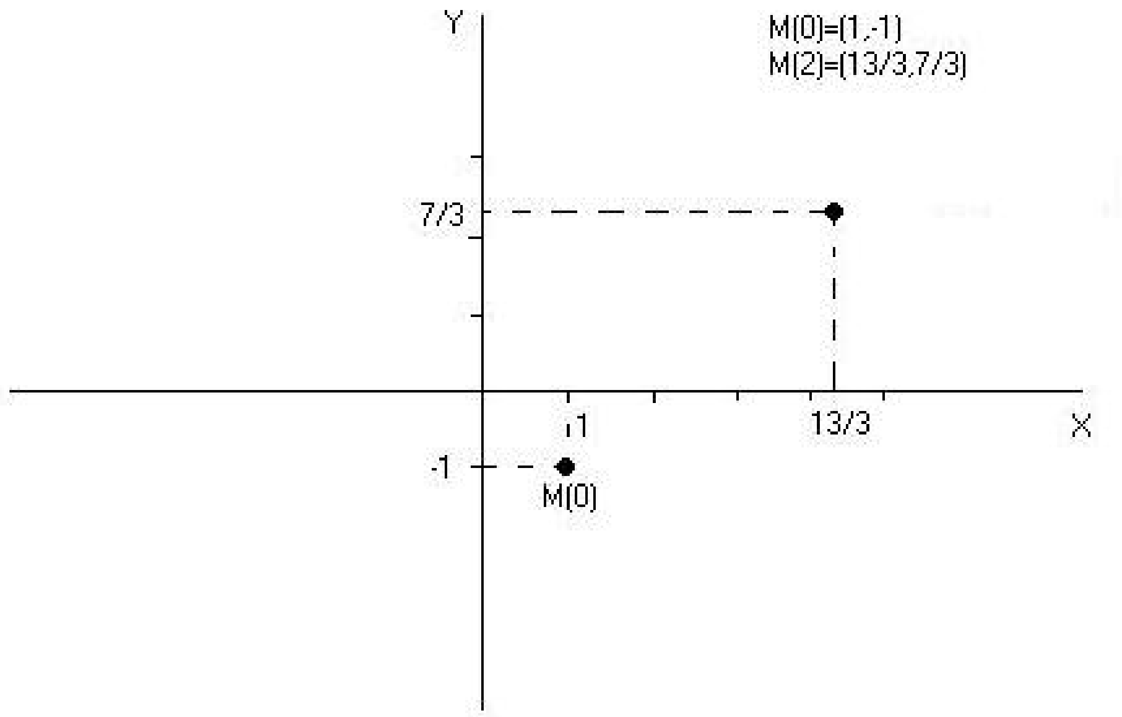


FIG. 3.1 –

3.3 Invariances

3.3.1 Périodicité

Définition 3.3.1 *On dit que la courbe Γ est périodique de période T si et seulement si :*

i) $\forall\ t \in I,\ t+T$ *et* $t-T \in I$.
ii) $\forall\ t \in I,\ M(t+T) = M(t)$.

Si $\overrightarrow{OM}(t) = f(t)\overrightarrow{i} + g(t)\overrightarrow{j}$, alors Γ est périodique de période T , si et seulement si f et g sont périodiques et de période T.

Exemple 3.3.1 *Si $M_o = M_o(x_o, y_o)$, le cercle $C(M_o, R)$ peut être paramétré de la façon suivante :*

$$\begin{cases} x(t) = R\ \cos(t) + x_o \\ y(t) = R\ \sin(t) + y_o \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Les fonctions sinus et cosinus étant périodiques de période 2π, il en est de même de la courbe .

Dans la pratique, si Γ est périodique de période T, l'étude de la courbe Γ se fait dans un intervalle de longueur T, par exemple $[t_o, t_o+T]\cap I$ pour n'importe quel point t_o de I.

Exemple 3.3.2 *:*

$$\begin{array}{ll} i) & x(t)=t-\pi E\left(\dfrac{t}{\pi}+\dfrac{1}{2}\right)\ ,\ y(t)=\operatorname{tg}t,\ t\in\mathbb{R}\setminus\dfrac{\pi}{2}+\mathbb{Z}\pi \\ ii) & x(t)=\cos t^2,\ y(t)=\sin t^2,\ t\in\mathbb{R} \end{array}$$

3.3.2 Invariance par translation

La courbe Γ sera invariante par la translation $\Im$ si et seulement si $\Im(\Gamma)=\Gamma$. Soit M un paramètrage de Γ et soit $\overrightarrow{v}$ le vecteur de la translation .

La condition $\Im(\Gamma)=\Gamma$ s'exprime de la façon suivante :

$\forall M\in\Gamma, \Im(M)\in\Gamma$ et $\forall M\in\Gamma, \exists M_2\in\Gamma : \Im(M_2)=M \Longleftrightarrow$

$\forall\, t\in I,\ \forall\, t_1\in I : \overrightarrow{M(t)M(t_1)}=v$ et $\exists\ t_2\in I\ \overrightarrow{M(t_2)M(t)}=\overrightarrow{v}$

3.3.3 Symétries

3.3.3.1 Symétrie centrale

Soit $\mathbf{S}$ la symétrie par rapport à un point $A(a,b)$; Γ est invariante par la symétrie $\mathbf{S}$ si et seulement si $\mathbf{S}(\Gamma)=\Gamma$.

On a $\mathbf{S}^2=Id_P$. Il suffit alors de vérifier que $\mathbf{S}(\Gamma)\subset\Gamma$. Soit (a,b) les coordonnées du centre de la symétrie $\mathbf{S}$,la condition $\mathbf{S}(\Gamma)\subset\Gamma$ s'écrit :

$$\forall\, t\in I,\ \exists\, t_1\in I\ f(t_1)=2a-f(t) \text{ et } g(t_1)=2b-g(t)$$

Remarque : Si f et g sont impaires, alors Γ est symétrique par rapport à l'origine.

Exemple 3.3.3 *Trouver le centre de symétrie de la courbe Γ d'équations :*

$$\begin{cases} x(t)=t^3-3t^2+2t \\ y(t)=2t^3-6t^2+13t+11 \\ \ t\in\mathbb{R} \end{cases}$$

3.3.3.2 Symétrie par rapport à une droite parallèle à l'un des axes :

- Γ est symétrique par rapport à la droite d'equation $x=a$ si et seulement si :

$$\forall\, t\in I,\ \exists\, t_1\in I\ :\ f(t_1)=2a-f(t) \text{ et } g(t_1)=g(t)$$

Exemple 3.3.4 *: Symétrie par rapport à l'axe OY (a=0)*

$$\begin{cases} f(t)=\sin t \\ g(t)=\cos 2t \end{cases} \quad \forall\, t\in I,\ \exists\, t_1=-t\in I\ :\ f(t_1)=-f(t) \text{ et } g(t_1)=g(t)$$

Car la fonction sin est impaire et la fonction cos est paire. L'étude de cette courbe se fera sur le domaine $[0,\, \pi]$ car elle est périodique de période $T = 2\pi$ est symétrique par rapport à l'axe OX.

• Γ est symétrique par rapport à la droite d'equation $y = b$ si et seulement si

$$\forall\, t \in I,\ \exists\, t_1 \in I\ :\ f(t_1) = f(t) \text{ et } g(t_1) = 2b - g(t)$$

Exemple 3.3.5 *: Symétrie par rapport à l'axe OX (b=0)*

$$\begin{cases} f(t) = t + \dfrac{1}{t} \\ g(t) = t - \dfrac{1}{t} \end{cases} \quad \forall\, t \in I,\ \exists\, t_1 = \frac{1}{t} \in I\ :\ f(t_1) = f(t) \text{ et } g(t_1) = -g(t)$$

L'étude de cette courbe se fera sur le domaine $[-1,\, 0[\cup]0,\, 1]$ car son domaine de définition est $\mathbb{R}^*$ et pour $t \in [-1,\, 0[\cup]0,\, 1]$ on a $\dfrac{1}{t} \in [-\infty,\, -1] \cup [1,\, +\infty[$.

3.3.4 Translation

Si il existe T tel que

$$\begin{cases} f(t + nT) = f(t) + nT \\ g(t + nT) = g(t) + nT \\ t \in I \text{ et } n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Exemple 3.3.6 *:*

$$\begin{cases} f(t) = t + \cos t \\ g(t) = t + \sin t \end{cases} \quad T = 2\pi$$

3.4 Branches infinies

On peut avoir des branches infinies quand $t \longrightarrow +\infty$, $t \longrightarrow -\infty$, $t \longrightarrow t_o^-$ et $t \longrightarrow t_o^+$. L'étude est la même.

a) Cas général :

Définition : On dit que la courbe paramétrée M admet une branche infinie pour $t \longrightarrow t_o^-$ si

$\lim\limits_{t \longrightarrow t_o^-} \left\|\overrightarrow{OM}(t)\right\| = +\infty$, avec $\left\|\overrightarrow{OM}(t)\right\| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\overrightarrow{OM}(t) = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$

Proposition :

Pour que la courbe M présente une branche infinie pour $t \longrightarrow t_o^-$ il faut et il suffit que :

$$\lim_{t \longrightarrow t_o^-} |f(t)| + |g(t)| = +\infty$$

Preuve :

$$\left\|\overrightarrow{OM}(t)\right\|^2 = |f(t)|^2 + |g(t)|^2 \leq (|f(t)| + |g(t)|)^2$$

c.à.d

$$\left\|\overrightarrow{OM}(t)\right\| \leq |f(t)| + |g(t)|$$

D'autre part on a :

$$|f(t)| \leq \sqrt{|f(t)|^2 + |g(t)|^2}$$

et

$$|g(t)| \leq \sqrt{|f(t)|^2 + |g(t)|^2}$$

$\Longrightarrow$

$$|f(t)| + |g(t)| \leq 2\left\|\overrightarrow{OM}(t)\right\|$$

d'où l'équivalence .

Remarque :

L'existence d'une branche infinie pour la courbe M n'impliquent pas nécessairement l'existence des limites

$$\lim_{t \longrightarrow t_o^-} |f(t)| \text{ et } \lim_{t \longrightarrow t_o^-} |g(t)|.$$

Contre-exemple : Etudier en $+\infty$ la courbe suivante :
$f(t) = t\cos(t)$ et $g(t) = t\sin(t)$.

Définition : On dit que la branche infinie admet la direction asymptotique $\overrightarrow{u_o}$ si :

$$\lim_{t \longrightarrow t_o^-} \frac{\overrightarrow{OM}(t)}{\left\|\overrightarrow{OM}(t)\right\|} = \overrightarrow{u_o}$$

Conséquences de la définition ci-dessus :
i) Si le vecteur $\overrightarrow{u_o}$ existe alors $\|\overrightarrow{u_o}\| = 1$.
ii) En posant $\theta(t) = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM}(t))$, la condition ci-dessus s'écrit :
$\lim_{t \to t_0^-} \theta(t) = \theta_0$, avec $\theta_0 = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u_o})$
iii) Si on pose $\alpha(t) = \tan\theta(t) = \frac{g(t)}{f(t)}$, la condition s'écrit :
$\lim_{t \to t_0^-} \alpha(t) = \alpha_0$, avec $\alpha_0 = \tan\theta_0$.
Définition
Soit M une courbe paramétrée admettant une branche infinie pour $t \longrightarrow t_0^-$.On dit que la droite Δ est une **asymptote** de la courbe si et seulement si la distance de $M(t)$ à Δ tend vers 0 quand $t \longrightarrow t_0^-$.

Recherche des asymptotes

La recherche des asymptotes se fera en procédant de la façon suivante :
(i) Déterminer les valeurs de t pour lesquelles il y a branche infinie.
(ii) Trois cas sont possibles :

1^{er}cas : $\lim_{t \to t_0^-} f(t) = x_0$ et $\lim_{t \to t_0^-} g(t) = \infty$.

La droite verticale d'équation $x = x_0$ est une asymptote.

$2^{éme}$cas : $\lim_{t\to t_0^-} f(t)=\infty$ et $\lim_{t\to t_0^-} g(t)=y_0$.

La droite horizontale d'équation $y=y_0$ est une asymptote.

$3^{éme}$cas : $\lim_{t\to t_0^-} f(t)=\infty$ et $\lim_{t\to t_0^-} g(t)=\infty$.

Dans ce cas on poursuit l'étude de la façon suivante :

-On calcule la limite suivante (si elle existe) $\alpha_0=\lim_{t\to t_0^-}\alpha(t)=\lim_{t\to t_0^-}\frac{g(t)}{f(t)}$.

-On calcule la limite suivante (si elle existe) $\beta_0=\lim_{t\to t_0^-} g(t)-\alpha_0 f(t)$; dés lors la droite d'équation $y=\alpha_0 x+\beta_0$ est une asymptote.

- Si $g(t)-\alpha_0 f(t)-\beta_0>0$ au voisinage de t_0^- ,la courbe est au-dessus de l'asymptote.

- Si $g(t)-\alpha_0 f(t)-\beta_0<0$ au voisinage de t_0^- , la courbe est en dessous de l'asymptote.

- Si α_0 existe et si $\beta_0=\infty$, on dit que la courbe admet une branche parabolique de direction asymptotique $y=\alpha_0 x$.

b) Cas où les fonctions f et g admettent des développements limités.

Supposons que les fonctions f et g admettent les développements limités suivants au voisinage de t_0 :

$f(t)=\frac{a}{t-t_0}+b+\varepsilon(t)$, $g(t)=\frac{a'}{t-t_0}+b'+\varepsilon'(t)$, avec $\lim_{t\to t_0^-}\varepsilon(t)=\lim_{t\to t_0^-}\varepsilon'(t)=0$.

Alors la droite d'équations paramétriques :

$$\begin{cases} x=a\lambda+b \\ y=a'\lambda+b' \\ \lambda\in IR \end{cases}$$

est une asymptote.

Remarque :

Si φ et ψ sont des fonctions telles que :

$\lim_{t\to t_0^-}[f(t)-\varphi(t)]=\lim_{t\to t_0^-}[g(t)-\psi(t)]=0$.

On dit que la courbe $M(t)=(f(t),g(t))$ admet pour asymptote le support de la courbe paramétrée $t\to(\varphi(t),\psi(t))$.

Exemples :

(i) Soit la courbe définie par :

$x(t)=t-t^3$, $y(t)=\frac{t^2}{2}-\frac{3t^4}{4}$

La courbe n'admet pas de droite comme asymptote puisque l'on a :

$\lim_{t\to t_0^-}\frac{y(t)}{x(t)}=+\infty$.

(ii) Considérons la courbe définie par :

$x(t)=\frac{t^3}{t^2-1}$, $y(t)=\frac{t^2}{t-1}$

On a alors :

$\lim_{t\to\infty}\frac{y(t)}{x(t)}=1$ et $\lim_{t\to\infty} y(t)-x(t)=1$.

La droite d'équation $y=x+1$ est une asymptote pour t tendant vers $\pm\infty$ .Pour déterminer la position de la courbe par rapport à l'asymptote , effectuons le développement limité des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ en $\pm\infty$:

$x(t)=t+\frac{1}{t}+\varepsilon(\frac{1}{t^2})$, $y(t)=t+1+\frac{1}{t}+\varepsilon(\frac{1}{t^2})$

d'où :

$y(t) = x(t) + 1 + \frac{1}{t} + \varepsilon(\frac{1}{t^2})$

Par conséquent la courbe est au-dessus de l'asymptote pour t tendant vers $+\infty$, et en dessous de l'asymptote pour t tendant vers $-\infty$.

5) Etude locale :

a) Points réguliers, stationnaires et biréguliers :

Définition : Un point t_o de D tel que f et g soient dérivables en t_o avec $f\prime(t_o) \neq 0$ ou $g\prime(t) \neq 0$ est dit **régulier** . Si $f\prime(t_o) = g\prime(t_o) = 0$, le point est dit **stationnaire**.

On écrit aussi :

$M\prime(t_o) = (f\prime(t_o), g\prime(t_o))$

$M(t_o)$ est régulier si $\overrightarrow{M'(t_o)} \neq \overrightarrow{0}$

$M(t_o)$ est stationnaire si $\overrightarrow{M'(t_o)} = \overrightarrow{0}$

Définition : Un point t_o de D tel que f et g admettent des dérivées secondes en t_o est dit **birégulier** si $\overrightarrow{M\prime(t_o)}$ et $\overrightarrow{M"(t_o)}$ sont linéairement indépendants.

t_o est birégulier si et seulement si :

$$f\prime(t_o)g"(t_o) - f"(t_o)g\prime(t_o) \neq 0$$

b) Méthode des développements limités

Soit t_o, nous supposons f et g indéfiniment dérivables en t_o. Notons :

$$\overrightarrow{M(t)} = f(t)\overrightarrow{i} + g(t)\overrightarrow{j}, \ \overrightarrow{M^{(n)}(t)} = f^{(n)}(t)\overrightarrow{i} + g^{(n)}(t)\overrightarrow{j}$$

Au voisinage de t_o , nous avons la formule de Taylor :

$$\overrightarrow{M(t)} = \overrightarrow{M(t_o)} + h\overrightarrow{M\prime(t_o)} + ... + \frac{h^n}{n!}\overrightarrow{M^n(t_o)} + h^n\overrightarrow{\varepsilon(t)}$$

où $\overrightarrow{\varepsilon(t)} = \varepsilon_1(t)\overrightarrow{i} + \varepsilon_2(t)\overrightarrow{j}$ avec $\varepsilon_1(t) \longrightarrow 0$ et $\varepsilon_2(t) \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow t_0$ et $h = t - t_o$

Définition : On appelle **premier invariant** de la courbe paramétrée M en t_o le plus **petit** entier strictement positif p tel que $M^{(p)}(t_o) \neq \overrightarrow{0}$ (si il existe). De la définition de p :

$$\overrightarrow{M(t_o)M(t_o+h)} = \frac{h^p}{p!}\overrightarrow{M^{(p)}(t_o)} + h^p\overrightarrow{\varepsilon(t)}$$

$\overrightarrow{M^{(p)}(t_o)} \neq 0$ et $\lim\limits_{t \longrightarrow t_o} \overrightarrow{\varepsilon(t)} = \overrightarrow{0}$

On voit que $\overrightarrow{M(t_o)M(t_o+h)}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{M_p(t_o)} + p!\,\overrightarrow{\varepsilon(t)}$ qui tend vers $\overrightarrow{M_p(t_o)}$ quand t tend vers t_0. La tangente à la courbe Γ en $M(t_o)$ a la direction, du vecteur $\overrightarrow{M_p(t_o)}$

Règle pratique : On calcule les dérivées successives de f et g en t_o, et on détermine p tel que :

$$f\prime(t_o)) = g\prime(t_o) = ...= f^{(p-1)}(to) = g^{(p-1)}(t_o) = 0$$

et $((f^{(p)}(t_o) \neq 0$ ou $g^{(p)}(t_o) \neq 0)$

La tangente a pour équations :

$$\begin{cases} x = x_o + \lambda f^{(p)}(t_o) \\ y = y_o + \lambda g^{(p)}(t_o) \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

L'équation cartésienne de la tangente s'écrit :

$$g^{(p)}(t_o)(x - x_o) - f^{(p)}(t_o)(y - y_o) = 0$$

Définition : On appelle **second invariant** de la courbe M en t_o le plus petit entier q, $(q > p)$ tel que les vecteurs $\overrightarrow{M^{(p)}(t_o)}$ et $\overrightarrow{M^{(q)}(t_o)}$ soient linéairement indépendants.

$\overrightarrow{M^{(p)}(t_o)}$ et $\overrightarrow{M^{(q)}(t_o)}$ sont linéairement indépendants si et seulement si

$$det\left(\overrightarrow{M^{(p)}(t_o)}, \overrightarrow{M^{(q)}(t_o)}\right) \neq 0$$

Remarque : Si t_o est birégulier alors $p = 1$ et $q = 2$.

Considérons le repère $\left\{M(t_o), \overrightarrow{M^{(p)}(t_o)}, \overrightarrow{M^{(q)}(t_o)}\right\}$, où p et q désignent respectivement le premier et le second invariant du point $M(t_0)$.Soit M un point du plan , (α, β) ses coordonnées dans le nouveau repère, nous avons alors :

$$\overrightarrow{M(t_o)M} = \alpha\overrightarrow{M^{(p)}(t_o)} + \beta\overrightarrow{M^{(q)}(t_o)}$$

$M \in I$ si et seulement si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

$M \in II$ si et seulement si $\alpha < 0$ et $\beta > 0$

$M \in III$ si et seulement si $\alpha > 0$ et $\beta < 0$

$M \in IV$ si et seulement si $\alpha < 0$ et $\beta < 0$

En appliquant la formule de Taylor , nous obtenons :

$$\overrightarrow{M(t_o)M(t)} = \frac{(t-t_o)^p}{p!}\overrightarrow{M^{(p)}(t_o)} + ... + \frac{(t-t_o)^q}{q!}\overrightarrow{M^{(q)}(t_o)} + \frac{(t-t_o)^q}{q!}\overrightarrow{\varepsilon(t)}$$

En utilisant la définition de q, nous obtenons :

$$\overrightarrow{M(t_o)M(t)} = \frac{(t-t_o)^p}{p!}\ (1+\varepsilon 1(t))\overrightarrow{M^{(p)}(t_o)} + \frac{(t-t_o)^q}{q!}(1+\varepsilon_2(t))\overrightarrow{M^{(q)}(t_o)}$$

où $\lim\limits_{t\longrightarrow t_o}\varepsilon_1(t) = \lim\limits_{t\longrightarrow t_o}\varepsilon_2(t) = 0$.

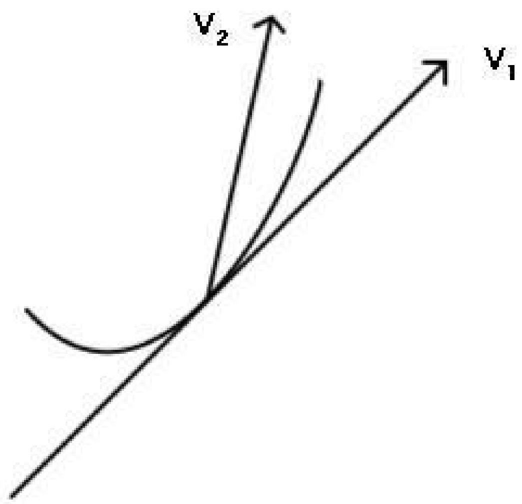
Donc pour t voisin de t_o , $\dfrac{(t-t_o)^p}{p!}(1+\varepsilon_1(t))$ est du signe de $(t-t_o)^p$; de même $\dfrac{(t-t_o)^q}{q!}(1+\varepsilon_2(t))$ est du signe de $(t-t_o)^q$.

Le point $M(t)$ pour t voisin de t_o et $t > t_o$ est donc dans la r égion I

Nature du point M

1er cas : p impair et q pair

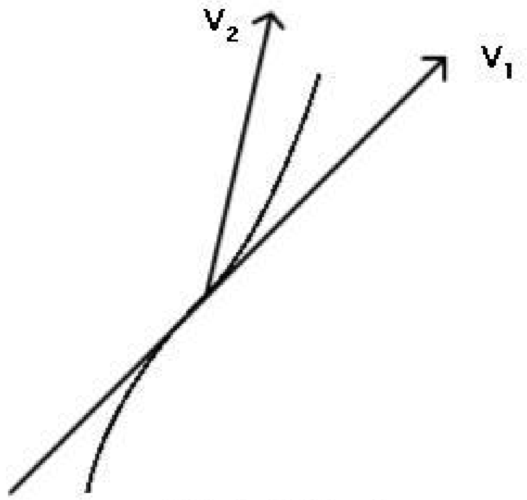
Si t est voisin de t_o et $t < t_o$, alors $M(t) \in II$ car $\alpha < 0$ et $\beta > 0$. Un tel point est dit **ordinaire**



Point ordinaire.

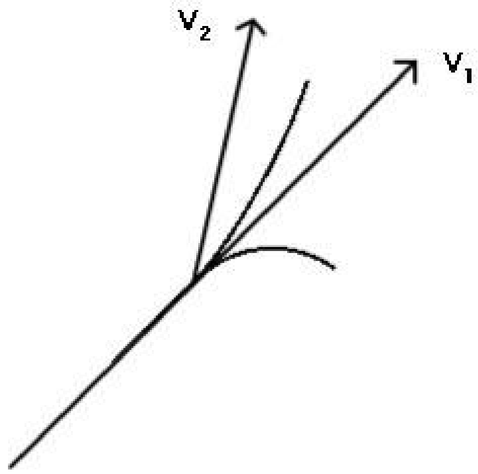
2ème cas : p impair et q pair

Si t est voisin de t_o et $t < t_o$ alors $M(t) \in IV$ car $\alpha < 0$ et $\beta > 0$. Un tel point est dit point **d'inflexion**. **3ème cas** : p pair et q impair



Point d'inflexion.

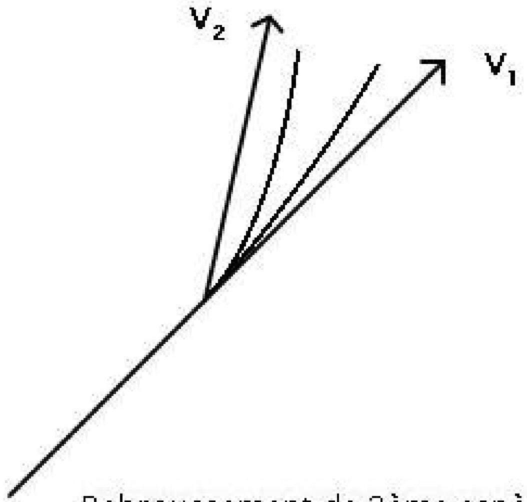
Si t est voisin de t_o et $t < t_o$ alors $M(t) \in III$ car $\alpha > 0$ et $\beta < 0$.
Le point t_o est dit point de **rebroussement de première espèce**.



Rebroussement de 1ère espèce.

4ème cas : p pair et q pair

Si t est voisin de t_o et $t < t_o$ alors $M(t) \in I$ car $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ .Un tel point est dit point de **rebroussement de seconde espèce**. **Règle pratique** : Une fois



Rebroussement de 2ème espèce.

p déterminé, on calcule $f^{(p+1)}(t_o)$ et $g^{(p+1)}(t_o)$ puis

$$f^p(t_o)g^{(p+1)}(t_o) - f^{(p+1)}(t_o)g^p(t_o)$$

Si ce nombre est non nul, alors $q = p + 1$, sinon on continue jusqu'à trouver q tel que :

$$f^{(p)}(t_o)g^q(t_0) - f^{(q)}(t_o)g^{(p)}(t_o) \neq 0$$

c) Pente de la tagente.

La pente de la tangente à Γ en un point $M(t_o)$, où le premier invariant p existe, est donnée par le rapport suivant :

$$m(t_o) = \frac{g^{(p)}(t_o)}{f^{(p)}(t_o)}$$

avec la convention que $m(t_o) = \infty$ si $f^{(p)}(t_o) = 0$.

d) Points multiples.

Un point A est dit multiple où double de la courbe paramètrée M si il existe t_1 et t_2 distincts tels que : $M(t_1) = M(t_2) = A$.

Exemple :

a)

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{(t+2)^2}{t+1} \\ y(t) = \dfrac{(t-2)^2}{t-1} \end{cases}$$

i) $D =]-\infty, -1\,[\cup] -1, 1\,[\cup]\ \ 1, +\infty[$

ii) $(x(-t), y(-t) = (-y(t), -x(t)) = -(y(t), x(t))$

la courbe est symétrique par rapport à la seconde diagonale $y = -x$.

Etude sur $[0, 1\,[\cup]\ \ 1, +\infty[$.

iii) Etude aux bornes

$$(x(0), y(0) = (4, -4)$$
$$t \longrightarrow 1, t = 1 + \varepsilon$$
$$x(t) = \frac{9}{2} + \frac{3}{4}\varepsilon + \circ(\varepsilon)$$
$$y(t) = -2 + \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}$$
$$t \longrightarrow 1^-$$
$$x(t) \longrightarrow \frac{9^-}{2} \text{ et } y(t) \longrightarrow -\infty$$
$$t \longrightarrow 1^+ \ \ x(t) \longrightarrow \frac{9^+}{2} \text{ et } y(t) \longrightarrow +\infty$$
$$\text{asymptote, } x = \frac{9}{2}$$
$$t \longrightarrow +\infty$$
$$x(t) = t + 3 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + 0\left(\frac{1}{t^2}\right)$$
$$y(t) = t + 3 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + 0\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

L'asymptote est : $x = t + 3, y = t - 3$

ou $y = x - 6$

$y(t) - (x - 6) > 0$ la courbe est au-dessus de l'asymptote.

(iv) Tableau des variations :

$$x\prime(t) = \frac{t(t+2)}{(t+1)^2}\ ,\ y\prime(t) = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}$$

t	0		1		2		$+\infty$
x'	0	$+$		$+$		$+$	
y'	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
x	4	$\nearrow$	$9/2$	$\nearrow$	$16/3$	$\nearrow$	$+\infty$
y	-4	$\searrow$	$-\infty \,\|\|\, +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

v) **Point remarquable**

Au voisinage de $t=0$, on a :

$$\overrightarrow{OM}(t) = (4\overrightarrow{i} - 4\overrightarrow{j}) + (\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})t^2 + (-\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j})t^3 + 0(t^3)$$

$p = 2$ pair, $q = 3$ impair

$M(0)$ est un point de rebroussement de première espèce, la tangente étant la seconde diagonale.