Université Mohammed V - Agdal
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique
Avenue Ibn Batouta, B.P. 1014
Rabat, Maroc

Filière DEUG :

Sciences Mathématiques et Informatique (SMI)
et
Sciences Mathématiques (SM)

Module Mathématiques I

NOTES DE COURS D'ANALYSE I

Chapitre V : Développements limités et applications

Par
Saïd EL HAJJI
Email : elhajji@fsr.ac.ma

&

Touria GHEMIRES
Email ghemires:@fsr.ac.ma

Groupe d'Analyse Numérique et Optimisation
Page web : http://www.fsr.ac.ma/ANO/

Année 2005-2006

TABLE DES MATIERES

Chapitre IV :
Développements limités et applications

Soient f et g deux fonctions réelles définies au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$, sauf peut être en x_0.

1 Comparaison de fonctions:

Soient f et g deux fonctions réelles définies au voisinage d'un point x_0 sauf peut être en x_0.

Dans la suite $\mathcal{V}(x_0)$ désigne un voisinage arbitraire de x_0 et $\mathcal{V}_0(x_0) = \mathcal{V}(x_0) \setminus \{x_0\}$.

1.1 Fonctions équivalentes

Définition :

On dit que f et g sont équivalentes, quand $x \longrightarrow x_0$, s'il existe une fonction h, définie dans $\mathcal{V}_0(x_0)$, telle que:

$$f(x) = g(x)h(x),\ \forall x \in \mathcal{V}_0(x_0), \quad \text{avec} \lim_{x\to x_0} h(x) = 1$$

et on écrit alors

$$f \underset{x_0}{\sim} g \quad \textit{ou tout simplement} \quad f \sim g$$

De manière analogue, on définit deux fonctions équivalentes au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$,à droite ou à gauche d'un point.

Remarques:

1) $f \sim g$ peut s'écrire aussi:

$$f(x) = g(x)\left(1 + \varepsilon(x)\right), \forall x \in \mathcal{V}_0(x_0), \quad \text{avec} \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

2) Si la fonction g ne s'annule pas au voisinage de x_0, la définition précédente signifie que: $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *=1.*

En particulier $f \underset{x_0}{\sim} l$, où l est une constante *non nulle, veut dire que* $f(x) \underset{x\to x_0}{\to} l$.

Exemples :

1) $\sin(x) \sim x$,au voisinage de 0, car $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x} = 1$.

2) $tg(x) \sim x$,au voisinage de 0, car $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg(x)}{x} = 1$.

3) $1 - \cos(x) \sim \frac{x^2}{2}$,au voisinage de 0, car $1 - \cos(x) = 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \underset{0}{\sim} 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2}$.

4) $\exp(x) - 1 \sim x$,au voisinage de 0, car $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$.

5) Pour la fonction polynômiale: $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$, avec $a_n \neq 0$

$\star$ Au voisinage de l'infini:

$P_n(x) = a_nx^n(\frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_2}{a_nx^{n-2}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1)$

$\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\frac{P_n(x)}{a_nx^n} = (\frac{a_0}{a_nx^n} + \frac{a_1}{a_nx^{n-1}} + \frac{a_2}{a_nx^{n-2}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_nx} + 1) = 1 \Longrightarrow P_n(x) \sim a_nx^n$,au voisinage de l'infini.

$\star$ Au voisinage de 0:

[1]S. EL HAJJI et T. GHEMIRES

- Si $a_0 \neq 0, P(x) \sim a_0$,au voisinage de 0.

Car $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \frac{P(x)}{a_0} = (1 + \frac{a_1 x}{a_0} + \frac{a_2 x^2}{a_0} + \cdots + \frac{a_{n-1}x^{n-1}}{a_0} + \frac{a_n x^n}{a_0}) = 1.$

- Si $a_0 = a_1 = ... = a_{i-1} = 0$ et $a_i \neq 0$, alors $P(x) \sim a_i x^i$,au voisinage de 0.

Théorème : Si au voisinage de x_0, $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2$, alors au voisinage de x_0 :

1) $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$
2) $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g2}$
3) Si $\alpha f_1 + \beta f_2 \neq 0$ et $\alpha g_1 + \beta g_2 \neq 0$ alors $\alpha f_1 + \beta f_2 \sim \alpha g_1 + \beta g_2$.

Remarque :

1) Si $f \underset{x_0}{\sim} g$, les fonctions composées $h \circ f$ et $h \circ g$ ne sont pas nécessairement équivalentes au voisinage de x_0.

En effet au voisinage de l'infini: $x + 1 \sim x$ mais e^{x+1} n'est pas équivalent à e^x. De même $\sin(x + 1)$ n'est pas équivalent à $\sin(x)$.

2) Au voisinage de 0 : $\sin(x) \sim x$ et $tg(x) \sim x$ mais $sin(x) - tg(x)$ n'est pas équivalent à 0.

Théorème : Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et si $u(x) \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} x_0$ et l'ensemble image de u est inclus dans les ensembles de définition de f et de g, alors $f(u(x)) \underset{x_0}{\sim} g(u(x))$.

Exemple :

1) Au voisinage de 0: $e^x - 1 \sim x \Rightarrow e^{x^2} - 1 \sim x^2$

2) Au voisinage de 0: $log(1 + x) \sim x \Rightarrow log(1 + \frac{x}{e^x}) \sim \frac{x}{e^x}$

Propriété : Si une fonction f possède un développement de Taylor au voisinage de x_0, le premier terme **non nul** rencontré dans ce développement est un équivalent de f au voisinage de x_0.

Exemples:

D'aprés les formules de Taylor (et de Mac-Laurin) de quelque fonctions usuelles. Toutes ces formules sont valables pour x au voisinage de 0 (pour les obtenir au voisinage de a,il suffit de poser $x = x - a$), on obtient :.

1) Au voisinage de 0, $e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$

2) Au voisinage de 0, $sin(x) \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} x^{2p+1}$.

3) Au voisinage de 0, $\cos(x) \sim 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{(-1)^p}{(2p)!} x^{2p}$

4) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a:

$$(1 + x)^\alpha \sim 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))}{n!} x^n$$

En particulier :

$\frac{1}{1+x} \sim 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n$, au voisinage de 0.
$\frac{1}{1-x} \sim 1 + x + x^2 + ... + x^n$, au voisinage de 0.

5) Au voisinage de 0, $\log(1 - x) \sim x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!}$.

1.2 Fonctions négligeables:

Définition:

On dit que f est négligeable devant g, au voisinage de x_0, et on note

$$f = \circ(g)$$

s'il existe une fonction ε définie dans $\mathcal{V}_0(x_0)$ telle que:

$$f(x) = \varepsilon(x)g(x), \forall x \in \mathcal{V}_0(x_0), \quad \text{avec} \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

De manière analogue on définit des fonctions équivalentes au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$,à droite ou à gauche d'un point.

Remarque :

Si g ne s'annule pas au voisinage de x_0 on a:

$$f = \circ(g), \text{ au voisinage de } x_0 \iff \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Exemple:

Si $\alpha > \beta$, $x^\alpha = \circ(x^\beta)$,au voisinage de 0.
Si $\alpha < \beta, x^\alpha = \circ(x^\beta)$,au voisinage de l'$\infty$.
par exemple: $x^4 = \circ(x^2)$ au voisinage de 0 et $x^2 = \circ(x^4)$ au voisinage de l'∞ .

2 Développements limités

2.1 Définitions et propriétés:

Définition : Soit f une fonction numérique définie dans $\mathcal{V}_0(x_0) = \mathcal{V}(x_0) \setminus \{x_0\}$.

On dit que f admet un D.L d'ordre n, au voisinage de x_0, s'il existe un polynôme P_n de d° $\leq n$

tel que: $f(x) - P_n(x) = \circ((x - x_0)^n)$

Si $P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n$,le DL de f peut s'écrire sous la forme suivante:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\varepsilon(x - x_0), \forall x \in \mathcal{V}_0(x_0)$$

$$\text{avec } \varepsilon(x) \longrightarrow 0, \text{ lorsque } x \longrightarrow x_0.$$

$P_n(x)$ est appelé partie principale du D.L de f.

$(x - x_0)^n\varepsilon(x)$ est appelé reste du D.L de f.

Remarques importantes:

1) *Le développement limité est une notion locale: L'égalité du DL de f ,à l'ordre n, au voisinage de x_0 est vraie* dans un voisinage de x_0 *uniquement.*

2) L*e D.L en x_0* peut être calculé en substituant $x - x_0$ à x dans *le D.L en* 0. *Pour obtenir un D.L au voisinage de l'∞, il suffit de substituer* $\frac{1}{x}$ à x *dans le DL au voisinage de* 0.

Pour simplifier dans la suite, on étudie les DL en $x_0 = 0$.

Théorème 1 : Unicité d'un développement limité

Si f admet un D.L d'ordre n, en 0 alors il est unique.

Remarque : l'unicité est dans le sens que la partie entière du DL à l'ordre n au voisinage de 0 *est unique.*

Démonstration:

Supposons que pour tout $x \in \mathcal{V}_0(0)$:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon_1(x) \text{ , où } \lim_{x\longrightarrow 0} \varepsilon_1(x) = 0,$$

et

$$f(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + x^n\varepsilon_1(x), \text{ où } \lim_{x\longrightarrow 0} \varepsilon_2(x) = 0,$$

avec $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \neq (b_0, b_1, \cdots, b_n)$.

Soit p le plus petit entier, entre 0 et n, tel que $a_p \neq b_p$.

En faisant la soustraction des deux égalités précédentes, on obtient:
$0=f(x)-f(x)=(a_p-b_p)x^p+(a_{p+1}-b_{p+1})x^{p+1}+\cdots+(a_n-b_n)x^n+x^n(\varepsilon_1(x)-\varepsilon_2(x))$
En divisant par x^p, on a
$0=(a_p-b_p)+(a_{p+1}-b_{p+1})x+\cdots+(a_n-b_n)x^{n-p}+x^{n-p}(\varepsilon_1(x)-\varepsilon_2(x)), \forall x\in\mathcal{V}_0(0)$.
Lorsque $x\longrightarrow 0$, on a: $a_p-b_p=0 \Longleftrightarrow a_p=b_p$,
ce qui est en contradiction avec $a_p\neq b_p$.D'où $a_i=b_i$ pour $i=1,\cdots,n$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=P_n(x)+x^n\varepsilon_1(x)\\ f(x)=P_n(x)+x^n\varepsilon_2(x)\end{array}\right\} \Longrightarrow 0=f(x)-f(x)=x^n(\varepsilon_1(x)-\varepsilon_2(x)) \Longrightarrow \varepsilon_1=\varepsilon_2\ , dans\ \mathcal{V}_0(0).$$

Théorème 2:

Si f est de classe C^n au voisinage de x_0, alors f admet un développement limité d'ordre n, au voisinage de x_0 de la forme suivante:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+(x-x_0)^n\varepsilon(x-x_0),$$
$$\text{avec } \lim_{x\longrightarrow x_0}\varepsilon(x-x_0)=0.$$

Démonstration: D'après le théorème de Taylor: $\exists c$ compris entre x et x_0 tel que:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$$
$$=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+[\frac{f^{(n)}(c)}{n!}-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}](x-x_0)^n$$

$(x\longrightarrow x_0)\Longrightarrow(c\longrightarrow x_0)$ et comme $f^{(n)}$ est continue en x_0, $on\ a \lim_{x\longrightarrow x_0}[\frac{f^{(n)}(c)}{n!}-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}]=0$.

Donc $f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+(x-x_0)^n\varepsilon(x-x_0)$,
avec $\varepsilon(x-x_0)=[\frac{f^{(n)}(c)}{n!}-\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}]\longrightarrow 0,\ lorsque\ x\longrightarrow 0$.

Remarque: l'hypothèse f de classe C^n n'est pas nécessaire pour l'existence d'un DL d'ordre n.

Par exemple: Soit $f(x)=\begin{cases} x^3\sin(\frac{1}{x}),\ si\ x\neq 0\\ 0,\ si\ x=0\end{cases}$

Pour $x\neq 0$,on peut l'écrire $f(x)=x^2.x\sin(\frac{1}{x})$,
et comme $\lim_{x\to 0}x\sin(\frac{1}{x})=0$, car $|\sin(\frac{1}{x})|\leq 1$, on a:

$$f(x)=x^2\varepsilon(x),\text{avec } \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0$$

c'est le DL d'ordre 2 de f , au voisinage de 0. Pourtant f'' n'existe pas en 0.
En effet, pour $x\neq 0$, $f'(x)=3x^2\sin(\frac{1}{x})-x\cos(\frac{1}{x})$ et $f'(0)=\lim_{x\to 0}x^2\sin(\frac{1}{x})=0$,
mais $f''(0)$ n'existe pas, puisque $\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=3x\sin(\frac{1}{x})-\cos(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite, lorsque $x\longrightarrow 0$.

Propriété: Développements limités des fonctions paires et impaires

Soit f une fonction numérique définie au voisinage de 0 et qui admet le D.L

$$f(x)=P_n(x)+x^n\varepsilon(x), \forall x\in\mathcal{V}_0(0)\ ,\ et\ \lim_{x\to 0}\varepsilon(x)=0,$$

avec $P_n(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$
i) si f est paire alors le polynôme $P_n$est pair, ce qui entraîne $a_{2k+1}=0,\ pour\ 1\leq 2k+1\leq n$.
ii) si f est impaire alors le polynôme P_n est impair,ce qui entraîne $a_{2k}=0,\ pour\ 0\leq 2k\leq n$.

Démonstration:

i) Si f est paire alors $f(x)=f(-x), \forall x\in\mathcal{V}_0(0)$.
L'unicité du D.L entraîne alors: $P_n(x)=P_n(-x), \forall x\in\mathcal{V}_0(0)$.
Comme $P_n(-x)=a_0-a_1x+a_2x^2-a_3x^3+\cdots+(-1)^{n-1}a_{n-1}x^{n-1}+(-1)^na_nx^n$
on a: $0=P_n(x)-P_n(-x)=2a_1x+2a_3x^3+\cdots+2a_{2k+1}x^{2k+1}+\cdots\cdots$
$\Longrightarrow a_1=a_3=\cdots=a_{2k+1}=\cdots=0$

ii) Si f est impaire alors $a_0 = a_2 = \cdots = a_{2k} = \cdots = 0$.

En effet f impaire $\Longrightarrow f(x) = -f(-x), \forall x \in \mathcal{V}_0(0)$. Et l'unicité du D.L $\Longrightarrow P_n(x) = -P_n(-x), \forall x \in \mathcal{V}_0(0)$.

Comme $P_n(-x) = a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + \cdots + (-1)^{n-1}a_{n-1}x^{n-1} + (-1)^n a_n x^n$,

on a: $0 = P_n(x) + P_n(-x) = 2a_0 + 2a_2x^2 + \cdots + 2a_{2k}x^{2k} + \cdots\cdots$

$\Longrightarrow a_0 = a_2 = \cdots = a_{2k} = \cdots = 0$.

Exemples:

$\star$ Le D.L d'ordre 4 en 0 de $\cos(x)$ est $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)$.

$\star$ Le D.L d'ordre 4 en 0 de $\sin(x)$ est $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + x^4\varepsilon(x)$.

2.2 Opérations sur les développement limités

2.2.1 Somme

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon_1(x), \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0 \\ f(x) = Q_n(x) + x^n\varepsilon_2(x), \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} f(x) + g(x) = (P_n + Q_n)(x) + x^n\varepsilon(x) \\ avec \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0. \end{array}\right.$$

Remarque : Si f et g admettent un développement limité d'ordre n et m respectivement, au voisinage de x_0, fini ou non, alors $f + g$ admet un développement limité à l'ordre $Min(m, n)$, obtenu en ajoutant les deux développements limités de f et g

Démonstration :

Si $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + x^n\varepsilon_1(x), \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0$,

$g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + x^n\varepsilon_2(x), \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$,

alors $f(x) + g(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n + x^n(\varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x))$;

Si on pose $\varepsilon(x) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(x)$, on a $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x) + \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$.

Exemple:

Si $f(x) = 2 + x + \frac{x^4}{10} + x^4\varepsilon_1(x)$,avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0$,

et $g(x) = -2 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{9} + x^4\varepsilon_2(x)$,avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$,

alors $f(x) + g(x) = x + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{10} + x^4\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$,

2.2.2 Produit

Si $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + x^n\varepsilon_1(x),\ avec \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0$,

et $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + x^n\varepsilon_2(x),\ avec \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$,

alors $f(x).g(x) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i(b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-i}x^{n-i})x^i + x^n\varepsilon(x),\ avec \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

Démonstration :

$$\begin{aligned} f(x).g(x) &= (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n + x^n\varepsilon_1(x))(b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n + x^n\varepsilon_2(x)) \\ &= (a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n)(b_0 + b_1x + \ldots + b_nx^n + b_nx^n) + x^n\overline{\varepsilon}(x) \end{aligned}$$

avec $\overline{\varepsilon}(x) = (a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n).\varepsilon_2(x)+(b_0+b_1x+\ldots+b_nx^n).\varepsilon_1(x)+x^n\varepsilon_1(x), et \lim\limits_{x\to 0}\overline{\varepsilon}(x) = 0$.

$$\begin{aligned} \Longrightarrow f(x).g(x) &= \sum_{i=0}^{n} a_i(b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-i}x^{n-i})x^i + \sum_{i=1}^{n} a_i(b_{n-i+1}x + \ldots + b_nx^i)x^n + x^n\overline{\varepsilon}(x) \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i(b_0 + b_1x + \ldots + b_{n-i}x^{n-i})x^i + x^n\varepsilon(x) \end{aligned}$$

avec $\varepsilon(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i(b_{n-i+1}x + \ldots + b_n x^i) + \overline{\varepsilon}(x)$ et on a $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

Remarques :

1) La partie principale du DL de $f(x).g(x)$ est formée de tous les termes de $P_n(x).Q_n(x)$, de degré inférieur ou égal à n.

2) Si f et g admettent un développement limité respectivement d'ordre n et m , au voisinage de x_0 (x_0 fini ou non) alors $f.g$ admet un développement limité à l'ordre $Min(m,n)$, obtenu en multipliant les deux développements limités de f et g. Dans le calcul , on ne garde que les termes de degré inférieur ou égal à $Min(m,n)$.

Exemple:

Si $f(x) = 2 + x + \frac{x^4}{10} + x^4\varepsilon_1(x)$ et $g(x) = -2 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{9} + x^4\varepsilon_2(x)$, $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$, alors

$f(x).g(x) = -4 - 2x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{9}x^3 - \frac{14}{15}x^4 + x^4\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$.

2.2.3 Quotient

Si

- f et g admettent un développement limité d'ordre n, au voisinage de x_0, (x_0 fini ou non)
- $\lim\limits_{x\to 0} g(x) \neq 0$ (c'est à dire $b_0 \neq 0$)

alors $\frac{f}{g}$ admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0.

Pour déterminer la partie principale de $\frac{f}{g}$, on fait la division de P par Q,suivant les puissances croissantes de x, à l'ordre n.

Démonstration

Si $f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon_1(x), \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0$,

et $g(x) = Q_n(x) + x^n\varepsilon_2(x), \lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$,

on fait la division suivant les puissances croissantes de x,d'ordre n,de P_n par Q_n :

$P_n(x) = Q_n(x)S(x) + x^{n+1}R(x)$ *avec* R et S des polynômes et $\deg S \leq n$.

$\Longrightarrow (f(x) - x^n\varepsilon_1(x)) = (g(x) - x^n\varepsilon_2(x))S(x) + x^{n+1}R(x)$

$\Longrightarrow f(x) = g(x).S(x) + x^n\left(\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)S(x) + xR(x)\right)$.

Si on pose $\varepsilon_3(x) = \varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x)S(x) + xR(x)$,on a

$f(x) = g(x).S(x) + x^n\varepsilon_3(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_3(x) = 0$

$\Longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = S(x) + x^n\frac{\varepsilon_3(x)}{g(x)}$

Donc $\frac{f(x)}{g(x)} = S(x) + x^n\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon(x) = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\varepsilon_3(x)}{g(x)} = 0$.

Remarques :

i) Si g admet un D.L d'ordre n en 0 et que $\lim\limits_{x\to 0} g(x) \neq 0$ alors $\frac{1}{g}$ admet un D.L d'ordre n en 0.

ii) Pour calculer le DL d'ordre n de $\frac{f}{g}$, Il suffit de montrer que $\frac{1}{g}$ admet un développement limité à l'ordre n, puis de faire le produit par celui de f .

Exemples:

1) Si $f(x) = -2 + 3x + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{9} + x^4\varepsilon(x)$ et $g(x) = 2 + x + \frac{x^4}{10} + x^4\varepsilon(x)$

alors le DL d'ordre 4 de $\frac{f(x)}{g(x)}$,au voisinage de 0 :

$\frac{f(x)}{g(x)} = -1 + 2x - \frac{5}{6}x^2 + \frac{17}{36}x^3 - \frac{67}{360}x^4 + x^4\varepsilon(x)$.

2)$\star$ DL d'ordre 4 de $\frac{1}{\cos(x)}$, au voisinage de 0:

On a $\cos(0) = 1 \neq 0$

$\Longrightarrow \frac{1}{\cos(x)} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + x^4\varepsilon(x).$
La fonction $x \longrightarrow \frac{1}{\cos(x)}$ est paire $\Longrightarrow a_1 = a_3 = 0.$
$\cos(x).\frac{1}{\cos(x)} = 1 \Longleftrightarrow (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)).(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + x^4\varepsilon(x)) = 1$
$\Longrightarrow a_0 + (-\frac{a_0}{2} + a_2)x^2 + (\frac{a_0}{2} + \frac{a_2}{2} + a_4) + x^4\varepsilon(x) = 1$
$\Longrightarrow (a_0 = 1, -\frac{a_0}{2} + a_2 = 0 \; et \; \frac{a_0}{24} - \frac{a_2}{2} + a_4 = 0)$
$\Longrightarrow (a_0 = 1, \; a_2 = \frac{1}{2} \; et \; a_4 = -\frac{1}{24} + \frac{1}{4} = \frac{5}{24})$

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x)$$

$\star \; tgx = \sin(x)\frac{1}{\cos(x)} = (x - \frac{x^3}{6} + x^4\varepsilon_1(x))(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^4\varepsilon_2(x))$
$\Longrightarrow tg(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^4\varepsilon(x).$
$\star$Une autre manière de développer $\frac{1}{f}$, lorsque $f(0) \neq 0$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+x^4\varepsilon(x)} = [1 + (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x))]^{-1}$
$= 1 + (-1)(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)) + \frac{(-1).(-2)}{2!}(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x))^2 + \frac{(-1).(-2).(-3)}{3!}(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x))^3$
$= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} - x^4\varepsilon(x) + \frac{x^4}{4} + x^4\tilde{\varepsilon}(x), avec \; x^4\tilde{\varepsilon}(x) = \frac{(-1).(-2).(-3)}{3!}(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x))^3.$
$\Longrightarrow \frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} - (\frac{1}{24} - \frac{1}{4})x^4 + x^4\varepsilon_1(x)$
$\Longrightarrow \frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + x^4\varepsilon_1(x).$

Remarque: Dans le cas où $b_0 = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$ *, on peut opérer d'une manière analogue, mais on obtient un développement appelé développement limité généralisé.*

Par exemple: Si $f(x) = 1 + x + x^3 + x^3\varepsilon(x)$ et $g(x) = 2x + 3x^3 + x^3\varepsilon(x)$, alors
$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1+x+x^3+x^3\varepsilon(x)}{x+3x^3+x^3\varepsilon(x)} = \frac{1}{2x}\frac{1+x+x^3}{1+\frac{3}{2}x^2} + x^3\varepsilon(x) = \frac{1}{2x}(1 + x - \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{9}{4}x^4) + x^3\varepsilon(x).$

2.2.4 Composition:

Si

- f admet un développement limité d'ordre n, au voisinage de 0,
- g admet un développement limité d'ordre n, au voisinage de 0, et $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$,

alors

$f \circ g$ admet un développement limité d'ordre n, au voisinage de 0, obtenu en développant la composée des développements limités de f et g.

On substitue alors à x, dans la partie principale du DL de f en 0, la partie principale de g et on ne garde que les termes de degré inférieur ou égal à n.

Exemples :

1) En substituant x^2 à x dans le DL de $\frac{1}{1+x}$:
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x)$
on obtient
$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + x^{2n}\varepsilon(x).$

2) En substituant x^2 à x dans le DL de $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{x}{2} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{n!2^n}x^n + x^n\varepsilon(x),$
on obtient
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{1.3\ldots(2n-1)}{n!2^n}x^{2n} + x^{2n}\varepsilon(x).$

2) Calcul du DL d'ordre 3 de $e^{\sin(x)}$ au voisinage de 0:

$g(x) = \sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$ et $\sin(0) = 0$;

$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$.

donc

$e^{\sin(x)} = 1 + (x - \frac{x^3}{6}) + \frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{6})^2 + \frac{1}{6}(x - \frac{x^3}{6})^3 + x^3\varepsilon(x)$

et si on ne garde que les termes de degré inférieur ou égal à 3 on obtient

$e^{\sin(x)} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^3\varepsilon(x)$

3) Calcul du DL d'ordre 2 de $h(x) = e^{\cos(x)}$ en 0.

On a: $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ et $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$.

Comme $\cos(0) = 1 \neq 0$, si on pose $g(x) = \cos(x) - 1$, on a $g(0) = 0$.

Ainsi

$g(x) = -\frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ et $g(0) = 0$;

$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$

donc

$f \circ g(x) = e^{(\cos(x)-1)} = 1 + (-\frac{x^2}{2}) + \frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2})^2 + x^2\varepsilon(x)$

Comme on ne doit garder dans la partie principale que les termes de degré inférieur ou égal à 2:

$e^{(\cos(x)-1)} = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$

ainsi

$e^{\cos(x)} = (1 - x^2)e + x^2\varepsilon(x)$.

3 Applications

3.1 Calcul des D.L de fonctions élémentaires

Remarque : On note par $\varepsilon(x)$ toute fonction qui tend vers 0, quand $x \longrightarrow 0$.

Propriété :

Si $f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\varepsilon(x)$,
alors

$$f'(x) = f'(0) + xf''(0) + \frac{x^2}{2!}f^{(3)}(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + x^{n-1}\varepsilon(x)$$

et on constate que le polynôme principal de f' est la dérivée du polynôme principal de f.

c'est à dire si $f(x) = P_n(x) + x^n\varepsilon(x)$ et si f' existe alors $f'(x) = P_n'(x) + x^{n-1}\varepsilon(x)$.

Exemples :

1) Développement limité de $f(x) = \log(1 + x)$ au voisinage de 0.

$\frac{1}{1+x} = (1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x)$

$$\Longrightarrow \log(1 + x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x)$$

2) Développement limité de $f(x) = Arctg(x)$ à l'ordre 5 au voisinage de 0.

$f(x) = P_5(x) + x^5\varepsilon(x)$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = (1 + x^2)^{-1} = 1 - x^2 + x^4 + x^4\varepsilon(x)$

$\Longrightarrow P_5'(x) = 1 - x^2 + x^4$

$\Longrightarrow P_5(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$

$$\Longrightarrow Arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + x^5\varepsilon(x)$$

3) Développement limité de $f(x) = x\text{cotg }(x)$ à l'ordre 5 au voisinage de 0.

$f(x) = x\cot g(x) = \frac{x\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{4!} + x^5\varepsilon_1(x)}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^5\varepsilon_2(x)} = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45}x^4 - x^5\varepsilon(x)$

$$x\cot g(x) = 1 - \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{45}x^4 - x^5\varepsilon(x)$$
$$\cot g(x) = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - x^4\varepsilon(x)$$

4) $(Arc\sin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$
$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \frac{5}{16}x^6 + \frac{35}{128}x^8 + \frac{63}{256}x^{10} + x^{10}\varepsilon(x)$

$\Longrightarrow Arc\sin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + x^9\varepsilon(x).$

Voici les DL de quelques fonctions élémentaires:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)$$
$$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p}\varepsilon(x)$$
$$sh(x) = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+1}\varepsilon(x)$$
$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+1}\varepsilon(x)$$
$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p}\varepsilon(x)$$
$$tg(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + x^9\varepsilon(x)$$
$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x)$$
$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} + x^{n+1}\varepsilon(x)$$
$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \ldots + \frac{1.3....(2p-1)}{2.4.6.....(2p)}x^{2p} + x^{2p}\varepsilon(x)$$
$$Arc\sin(x) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1.3....(2p-1)}{2.4.6.....(2p)}\frac{x^{2p+1}}{2p+1} + x^{2p+1}\varepsilon(x)$$
$$Arc\cos(x) = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40}x^5 - \ldots - \frac{1.3....(2p-1)}{2.4.6.....(2p)}\frac{x^{2p+1}}{2p+1} + x^{2p+1}\varepsilon(x)$$
$$Arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^p\frac{x^{2p+1}}{2p+1} + x^{2p+1}\varepsilon(x)$$
$$Argth(x) = x + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{1}{2p+1}x^{2p+1} + x^{2p+1}\varepsilon(x)$$

3.2 Application au calcul de limites

1) Soit $f(x) = (1+\frac{1}{x})^x$, calcul de $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

On a :

$$\log(f(x)) = \log((1+\frac{1}{x})^x) = x\log(1+\frac{1}{x})$$

au voisinage de $+\infty$ on a:

$$\log(1+\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})$$
$$x\log(1+\frac{1}{x}) = 1 + \varepsilon(\frac{1}{x})$$

d'où

$$\lim_{x\to+\infty} x\log(1+\frac{1}{x}) = \lim_{x\to+\infty}[1+\frac{1}{x}\varepsilon(\frac{1}{x})] = 1$$
$$\lim_{x\to+\infty}\log(f(x)) = 1 \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = e$$

2) Calcul de $\underset{x\to 0}{lim}\log(\frac{\sin(x)}{x})$

Calculer le D.L d'ordre 2 au voisinage de 0 de $\log(\frac{\sin(x)}{x})$

Comme $\log(\frac{\sin(x)}{x}) = \log(1+(\frac{\sin(x)}{x}-1))$,

$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ et $\frac{\sin(x)}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + x^2\varepsilon(x)$

$\Longrightarrow \log(\frac{\sin(x)}{x}) = \log(1+(\frac{\sin(x)}{x}-1)) = (-\frac{x^2}{3!}) - \frac{1}{2}(-\frac{x^2}{3!})^2 + x^2\varepsilon(x) = -\frac{x^2}{6} + x^2\varepsilon(x)$

donc $\underset{x\to 0}{lim}\log(\frac{\sin(x)}{x}) = 0$

3) Soit $f(x) = (\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\log(x)})$. Calcul de $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

On pose $t = x-1$, de telle sorte que $t \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0$, lorsque $x \longrightarrow 1$.

On a: $f(x) = (\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\log(x)}) = (\frac{1}{t} - \frac{1}{\log(1+t)}) = \frac{\log(1+t)-t}{t\log(1+t)}$.

Remarque : Lors du calcul des DL, on choisit l'ordre n du DL le plus bas possible et tel que la partie principale du dénominateur ne soit pas nulle et on calcule tous les DL à cet ordre.

au voisinage de $t=0$, on a $\log(1+t) = t + t\varepsilon(t)$. Donc

$t\log(1+t) = t^2 + t^2\varepsilon(t)$.

Il faut calculer le DL du numérateur d'ordre 2:

$\log(1+t) - t = -\frac{t^2}{2} + t^2\varepsilon(t)$.

Ainsi

$\frac{\log(1+t)-t}{t\log(1+t)} = \frac{-\frac{t^2}{2}}{t^2} + t^2\varepsilon(t)$,

donc

$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\log(1+t)-t}{t\log(1+t)} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\log(x)}) = -\frac{1}{2}$.

4) Soit $f(x) = \frac{\sin(x)-tg(x)}{\sin(x)(1-\cos(x))}$.Calcul de $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Pour que la partie principale du dénominateur ne soit pas nulle, il suffit de calculer les DL d'ordre 3, au voisinage de 0

On a :

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$ et $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)$

$\Rightarrow 1-\cos(x) = \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)$.

Donc

$\sin(x)(1-\cos(x)) = (x-\frac{x^3}{6})(\frac{x^2}{2}) + x^3\varepsilon(x) = \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x)$.

Comme

$tg(x) = x + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$.

on a

$\sin(x) - tg(x) = (x - \frac{x^3}{6}) - (x + \frac{x^3}{3}) + x^3\varepsilon(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^3\varepsilon(x)$.

Donc

$f(x) = \frac{\sin(x) - tg(x)}{\sin(x)(1-\cos(x))} = \frac{-\frac{1}{2}x^3}{\frac{x^3}{2}} + x^3\varepsilon(x) = -1 + x^3\varepsilon(x)$

et $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-tg(x)}{\sin(x)(1-\cos(x))} = -1$.

3.3 Position de la courbe par rapport à sa tangente

Supposons qu'au voisinage du point x_0:

$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + (x - x_0)^2\varepsilon(x - x_0)$,avec $\lim_{x\longrightarrow x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$.

L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$,la courbe représentant f au point $(x_0, f(x_0))$ est

$$y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

(1) Si $f''(x_0) \neq 0$:

Au voisinage de x_0, $f(x) - [f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)]$ a le même signe que $f''(x_0)$.

Donc au voisinage du point x_0 :

- la courbe $\mathcal{C}_f$ est située au dessus de la tangente, si $f''(x_0) > 0$
- la courbe $\mathcal{C}_f$ est située en dessous de la tangente, si $f''(x_0) < 0$.

(2) Si $f''(x_0) = 0$ et au voisinage de x_0, on a le D.L de f suivant:

$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + (x - x_0)^k\varepsilon(x - x_0)$,avec $\lim_{x\longrightarrow x_0} \varepsilon(x - x_0) = 0$,

où k est un entier > 2 et $f^{(k)}(x_0) \neq 0$, alors au voisinage de x_0 :

$f(x) - [f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)]$ a le même signe que $f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$.

Dans ce cas:

si k est pair: c'est la même chose que pour $k = 2$, car $f(x) - [f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)]$ a le même signe que $f^{(k)}(x_0)$, au voisinage de x_0.

si k est impair: c'est un point d'inflexion et le signe de $f(x) - [f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)]$ est différent selon que x soit à droite ou à gauche de x_0.

Exemple:

$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + x^3\varepsilon(x)$

L'équation de la tangente en 0 est $y = x$.

Au voisinage de 0: $\sin(x) - x$ a le même signe que $-\frac{x^3}{6}$: $\begin{cases} > 0, \; si \; x < 0 \\ < 0, \; si \; x > 0 \end{cases}$

Donc pour x au voisinage de 0, la courbe représentant $sin(x)$, est située au dessus de la tangente, si $x < 0$ et en dessous de la tangente si $x > 0$.

3.4 Généralisation des développements Limités:

Développements Limités au voisinage de l'infini

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$), c'est à dire f définie sur $]A, +\infty[$, avec $A > 0$ (respectivement sur $]-\infty, B[$, avec $B < 0$).

Définition :

On dit que f admet un D.L d'ordre n au voisinage de de l'infini si elle est de la forme

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon(\frac{1}{x}) \; avec \; \lim_{x\longrightarrow\infty} \varepsilon(\frac{1}{x}) = 0$$

Remarque :

Si f admet un D.L en $\frac{1}{x}$ au voisinage de l'infini, alors f admet une limite finie lorsque $x \to \infty$.

Développements Limités généralisés

Soit f une fonction définie au voisinage de 0, sauf peut être en 0. Si la fonction $x \to x^p f(x)$ admet un D.L au voisinage de 0:

$$x^p f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + x^n \varepsilon(x)$$

alors

$$f(x) = \frac{a_0}{x^p} + \frac{a_1}{x^{p-1}} + \frac{a_2}{x^{p-2}} + \cdots + a_n x^{n-p} + x^{n-p}\varepsilon(x)$$

on dit alors que f admet un D.L généralisé au voisinage de 0.

Remarque: Les D.L au voisinage de l'infini sont utilisés pour l'étude des branches infinies des courbes.

Un D.L permet la détermination (éventuelle) des asymptotes, des directions asymptotiques et la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Asymptote:

Une condition nécessaire et suffisante poue que $(\mathcal{C})$ admette une asymptote à l'infini et que l'on puisse trouver a et b tels que: $\lim\limits_{x\to\infty} (\ f(x) - ax - b) = 0$.

Ce qui est équivalent à

$$f(x) = ax + b + \varepsilon(x), \text{avec } \lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$$

Exemple :

$$f(x) = \frac{x+2}{x}\sqrt{x^2-1}$$
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x+2}{x^2}\sqrt{x^2-1}$$

Pour avoir le D.L au voisinage de l'infini on fait le changement de variable $x = \frac{1}{X}$ $\frac{f(x)}{x} = \frac{X}{|X|}(1+2X)\sqrt{1-X^2} \Longrightarrow \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} (1+2X)\sqrt{1-X^2}, si\ X > 0 \\ -(1+2X)\sqrt{1-X^2}, si\ X < 0 \end{cases}$

$\sqrt{1-X^2} = 1 - \frac{1}{2}X^2 + X^2\varepsilon(X) \Longrightarrow \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} 1 + 2X - \frac{1}{2}X^2 + X^2\varepsilon_1(X), si\ X > 0 \\ -1 - 2X + \frac{1}{2}X^2 + X^2\varepsilon_2(X), si\ X < 0 \end{cases}$

avec $\lim\limits_{X\to 0}\varepsilon_1(X) = 0$ et $\lim\limits_{X\to 0}\varepsilon_2(X) = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 - \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon_1(\frac{1}{x}), si\ x > 0 \\ -x - 2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\varepsilon_2(\frac{1}{x}), si\ x < 0 \end{cases}$$

- Au voisinage de $+\infty$:

La droite $y = x + 2$ est une asymptote de la courbe $y = f(x)$.

Cette asymptote est au-dessus de la courbe, puisque la différence $f(x) - x - 2$ a le même signe que $-\frac{1}{2x}(< 0)$.

- Au voisinage de $-\infty$:

La droite $y = -x - 2$ est une asymptote de la courbe $y = f(x)$. Cette asymptote est au-dessus de la courbe, puisque la différence $f(x) - (-x - 2)$ a le même signe que $\frac{1}{2x}(< 0)$.

Direction asymptotique:

Supposons que f admet un D.L au voisinage de l'infini de la forme

$$f(x) = ax + b + \varepsilon(x)\ avec \lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$$

Le coefficient directeur de l'asymtote oblique est $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$.
Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait direction asymptotique est que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \ \in \mathbb{R}$$

Branche parabolique :

La courbe admet une branche parabolique si $\frac{f(x)}{x}$ admet une limite a finie, et $f(x) - ax$ a une limite infinie, lorsque $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a \ et \ \lim_{x\to\infty} f(x) - ax = \infty$$

On dit alors que la courbe admet une branche parabolique dans la direction $y = ax$.

Exemple :

$$\text{Si } \ f(x) = \sqrt{x} \ , \ \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = 0$$

mais

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 0.x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

On a une branche parabolique dans la direction de coefficient 0, c'est à dire une branche parabolique dans la direction de l'axe des coordonnées $y = 0$.

4 Développement limité des fonctions usuelles

$$\begin{array}{ll}
e^x & = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + (x - x_0)^n \varepsilon(x) \\
\sin(x) & = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{2p+1} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + (x - x_0)^{2p+1} \varepsilon(x) \\
\cos(x) & = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + (x - x_0)^{2p} \varepsilon(x) \\
(1+x)^\alpha & = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x) \\
tg(x) & = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + (x - x_0)^9 \varepsilon(x) \\
\frac{1}{1-x} & = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x) \\
(Arc\sin(x))' & = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \\
 & = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{8} x^4 + \frac{5}{16} x^6 + \frac{35}{128} x^8 + \frac{63}{256} x^{10} + \circ(x^{10}) \\
Arc\sin(x) & = x + \frac{1}{6} x^3 + \frac{3}{40} x^5 + \frac{5}{112} x^7 + \frac{35}{1152} x^9 + \circ(x^9)
\end{array}$$