Université Mohammed V - Agdal
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique
Groupe d'Analyse Numérique et Optimisation
Avenue Ibn Batouta, B.P. 1014
Rabat, Maroc
Tel et fax +(37)775471
Pages web : http://www.fsr.ac.ma/ANO/

Filières :
SMI - SM et SMP - SMC
Module : M_6

NOTES de cours d'Analyse II

EQUATIONS DIFFERENTIELLES:

PAR

Ali ALAMI-IDRISSI **Saïd EL HAJJI** **et Samir HAKAM**

Groupe d'Analyse Numérique et Optimisation

Année 2005-2006

I- Equations différentielles du premier ordre

(1) Définition

Soit $f : (u,v) \to f(u,v)$ une application réelle de deux variables réelles définies sur un ensemble D de IR^2.

Soit : $\varphi : x \to \varphi(x)$ une fonction réelle définie et dérivable sur un intervalle $[t_o, t_1]$ dont l'image par l'application $x \to (x, \varphi(x))$ est contenue dans D.

On dit que la fonction φ est solution de l'équation différentielle du premier ordre suivante (on dit aussi intégrale de l'équation) si elle vérifie sur l'intervalle $[t_o, t_1]$ l'égalité :

$$(1) \qquad \varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

L'équation (1) est dite linéaire si f est de la formesuivante :

$$f(u,v) = v.A(u) + B(v),$$ où A et B sont des fonctions réelles.

Exemple :

Soit l'équation : $y' = f(x)$, f étant une fonction continue sur un intervalle de IR , alors la solution de l'équation est donnée par :

$$y(x) = \int_a^x f(t)dt + c$$

A) **Equations linéaires** :

Une équation différentielle du premier ordre linéaire est de la forme suivante :

$$y' + a(x)y = b(x) \qquad (1)$$

où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert I.

L'équation sans second membre associée à (1) est l'équation :

$$y' + a(x)y = 0 \qquad (2)$$

a/ Résolution de l'équation sans second membre :

Soit y une solution non nulle de l'équation (2), alors on a:

$$\frac{y''}{y} = -a(x)$$

$$Log|y| = -\int a(t)dt + cte, \text{ soit } A(x) = \int a(t)dt$$

donc $$y = ke^{-A(x)} \text{ , où } k \in IR$$

Théorème : Soit I un intervalle ouvert de IR, a: $I \rightarrow IR$ une fonction continue, A: $I \rightarrow IR$ une primitive de a.L'ensemble des solutions de l'équation différentielle :

$$y' + a(x)y = 0 \qquad (2)$$

est l'ensemble des fonctions de la forme :

$$\varphi(x) = Ke^{-A(x)} \quad où \quad K \in IR.$$

Preuve : Soit φ: $I \rightarrow IR$ dérivable, posons:

$$k(x) = \varphi(x)\, e^{A(x)} \text{ , on a :}$$

$$k'(x) = \left[\varphi'(x) + A'(x)\ \varphi(x)\right]e^{A(x)} = \left[\varphi'(x) + a(x)\ \varphi(x)\right]e^{A(x)}$$

φ est solution de (2) $\Leftrightarrow k'(x) = 0, x \in I \Leftrightarrow k(x) = cte = k$
$\Leftrightarrow \varphi(x) = k\ e^{-A(x)}$

Exemple :

$$y' + x^3y = 0$$
$$\varphi(x) = Ke^{-\frac{x^4}{4}}, K \in IR$$

Exercices : Résoudre les équations :

$$y' - 2xy = 0 \text{ , } y' + y\ cosx = 0 \text{ , } y'\sqrt{1-x^2} = y$$

Equations différentielles du peremier ordre à coefficients constants sans second membre:

$$y' + ay = 0$$, a constante réelle.Alors on a:
$$y = Ke^{-ax}, K \in IR$$

b/ Résolution de l'équation avec second membre

Théorème : Soit I un intervalle ouvert de IR, $a : I \rightarrow IR$ et $b: I \rightarrow IR$ deux fonctions continues et φ_1 une solution de l'équation :
(1) $y' + a(x)y = b(x)$.
Pour qu'une fonction dérivable $\varphi: I \rightarrow IR$ soit solution de (1) il faut et il suffit que $\varphi - \varphi_1$ soit solution de l'équation sans second membre associée à (1).

Preuve : On a : $\varphi'_1(x) + a(x)\varphi_1(x) = b(x)$, $\forall x \in I$
φ est solution de (1)
$$\varphi'(x) + a(x)\varphi(x) = b(x)$$
par suite :
$$\varphi'(x) - \varphi'_1(x) + a(x)[\varphi(x) - \varphi_1(x)] = 0$$

Commentaire : On dit que la solution générale de (1) est égale à la somme d'une solution particulière de (1) et de la solution générale de (2).

Résolution de (1) par la méthode de la variation de la constante :
On peut procéder de la façon suivante pour la recherche de la solution générale de l'équation (1):

On cherche la solution sous la forme:
$y = k(x)e^{-A(x)}$, où A est une primitive de a.

$$y' = k'(x)e^{-A(x)} - k(x)a(x)e^{-A(x)} = (k'(x) - k(x)a(x))e^{-A(x)}$$

$(1) \Leftrightarrow$

$$(k' - ka)(x)e^{-A(x)} + a(x)k(x)e^{-A(x)} = b(x)$$

$\Leftrightarrow$

$$k'(x) = b(x)e^{A(x)}$$

$$k(x) = \int b(t)e^{A(t)}\,dt$$

Par conséquent la solution générale de (1) est :

$$y = e^{-A(x)}\int e^{A(t)}b(t)dt$$

Exemples :

(i) $y' + y = 3x^2 + x - 4 \qquad (1)$

Méthode de la recherche d'une solution particulière :

La solution générale de l'équation sans second membre est :

$$y = Ke^{-x}, K \in IR$$

Cherchons une solution de (1) sous la forme :

$$y_1(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$$

après calcul on trouve $\alpha = 3,\ \beta = -5, \gamma = 1$

La solution générale de (1) est

$$y = 3x^2 - 5x + 1 + Ke^{-x},\ \ K \in IR$$

Méthode de la variation de la constante

Posons $y = ke^{-x} \rightarrow y' = k'e^{-x} - ke^{-x} = (k'-k)e^{-x}$

$$(k'-k)e^{-x} + ke^{-x} = 3x^2 + x - 4$$

$$k'e^{-x} = 3x^2 + x - 4$$

$$k' = (3x^2 + x - 4)e^{x}$$

$$k(x) = (3x^2 + 5x + 1)e^{x} + K,\ \ K \in IR$$

(ii) $y' - \frac{3}{x} y = x$, on prend $I = \;]-\infty, 0[$ ou $]0 + \infty[$

Méthode de la recherche d'une solution particulière :

L'équation sans second membre a pour solution

$$y = Ke^{\int \frac{3}{t} dt} = K\, e^{3 \log x} = Kx^3, \quad K \in IR$$

cherchons y_1 sous la forme λx^2, on obtient:

$$2\lambda x - \frac{3\lambda x^2}{x} = x \iff \lambda = -1$$

ce qui donne la solution:

$$y = -x^2 + K\, x^3, K \in IR.$$

Méthode de la variation de la constante

On pose $y = kx^3 \longrightarrow y' = k'\, x^3 + 3k\, x^2 \rightarrow k'\, x^3 + 3k\, x^2 - 3k$

$x^2 = x \rightarrow k' = \frac{1}{x^2} \rightarrow k = -\frac{1}{x} + c, c \in IR \rightarrow y = -x^2 + cx^3, \quad c \in IR$

c/ Problème de Cauchy

Théorème: Soit I un intervalle ouvert de IR, $a : I \longrightarrow IR$ et $b : I \longrightarrow IR$ deux fonctions continues, $x_o \in I$ et $y_o \in IR$. Il existe une fonction et une seule telle que :

$$\begin{cases} \forall x \in I \;,\; \varphi'(x) + a(x)\varphi(x) = b(x) \quad (1) \\ \varphi(x_o) = y_o \end{cases}$$

Commentaire :

On dit que l'équation (1) admet une solution unique vérifiant la condition initiale $\varphi(x_o) = y_o$.

Preuve :

Posons $A(x) = \int_{x_o}^{x} a(t)dt$

La solution générale de (1) s'écrit :

$$\varphi(x) = Ke^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_{x_o}^{x} e^{-A(t)} b(t) dt$$

$$\varphi(x_o) = y_o \quad \Leftrightarrow \quad K = y_o$$

Exemple: $xy' + 2y = 4x^2 \quad , \quad y(1) = 2$
La solution générale de l'équation est :

$$y = x^2 + \frac{c}{x^2} \ , \ c \in IR$$

La solution qui convient correspond à $c = 1$.

B) Equations remarquables du premier ordre

a/ Equations à variables séparées

Ce sont les équations qui peuvent se mettre sous la forme :

$$f(y)y' = g(x)$$

c.a.d

$$f(y)\,\frac{dy}{dx} = g(x)$$

$$f(y)dy = g(x)dx$$

Si F (respectivement G) est une primitive de f (respectivement g) on obtient par intégration de la relation ci-dessus nous obtenons :

$$F(y) = G(x) + cte$$

Exemple :

$$y' - (1 - \frac{2}{x^2})y = 0$$

$$\frac{dy}{y} = (1 - \frac{2}{x^2})dx$$

$$\ln|y| = x + \frac{2}{x} + cte$$

$$y = Ke^{x+\frac{2}{x}}, K \in IR.$$

b/ Equations homogènes

Ce sont les équations de la forme : $y' = f(\frac{y}{x})$

On pose : $t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = tx \Rightarrow y' = t'x + x$

$$t'x + t = f(t)$$

$$\frac{dt}{f(t)-t} = \frac{dx}{x}$$

Exemple: Intégrer $\quad xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$

Pour $x > 0$, oa :

$$y' - \frac{y}{x} = \sqrt{1 + (\frac{y}{x})^2}\ ,\quad t = \frac{y}{x}$$

$$t'x + t = t + \sqrt{1+t^2}$$

$$t'x = \sqrt{1+t^2}$$

$$\ln(t + \sqrt{1+t^2}) = \ln x + cte$$

$$t + \sqrt{1+t^2} = Kx$$

$$\frac{y}{2} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = Kx$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = Kx^2 - y$$

$$x^2 + y^2 = K^2x^4 + y^2 - 2Kx^2y$$

$$y = \frac{(K^2x^2)}{2K},\ K \in IR^*$$

Pour $x < 0$ on obtient l'équation différentielle (à résoudre en exercice):

$$y' - \frac{y}{x} = -\sqrt{1 + (\frac{y}{x})^2}$$

c/ Equations de Bernoulli

Ce sont les équations de la forme :

$y' + a(x)y = b(x)y^{\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{Z}$ a et b sont des fonctions réelles

Si $\alpha = 0$, l'équation est linéaire

Si $\alpha = 1$, l'équation linéaire homogène

Sinon on pose $u = y^{1-\alpha}$, on obtient une équation linéaire en u.

Exercices : Intégrer les équations suivantes:

$y' = 3\frac{y}{x} - y^3x^5$, $xy' + 3y = x^2y^2$

d/ Equations de Ricatti:

Ce sont les équations de la forme :

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

où a, b, c sont des fonctions réelles définies sur un intervalle. Ces équations se ramènent à une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$ si l'on connait une solution particulière y_1 , et ce en faisant le changement de la fonction inconnue $y = y_1 + z$, nous obtenons l'équation différentielle suivante:

$$z' = a(x)z^2 + [2a(x)y_1 + b(x)]z$$

Exemple : Résoudre l'équation $y' = \frac{y^2}{x} - (2 + \frac{1}{x})y + x + 2$
en prenant $y_1 = x$ comme solution particulière.

4) Problème de Cauchy:

Théorème (admis)

Soit f une fonction définie et continue sur un rectangle $]a, b[\times]c, d[$ ayant une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$ continue sur le même rectangle.

Alors pour tout couple $(x_o, y_o) \in]a, b[\times]c, d[$, il existe $h > 0$ tel que $]xo - h, x_o + h[\subset]a, b[$ et une solution Ψ unique de l'équation :

(1) $y' = f(x),\ x \in]x_o - h, x_o + h[$ et $y(x_o) = y_o$.

II- Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.

(1) Equations sans second membre.

On appelle équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre toute équation différentielle de la forme:

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (1)$$

où $a, b, c \in IR$,avec a non nul et y la fonction inconnue .

Le polynôme $P(r) = ar^2 + br + c$ s'appelle le polynôme caractéristique associé à (1).

Notons S l'ensemble des solutions de (1).

Proposition 1:

S est un espace vectoriel sur IR.

Preuve : Soit y et z 2 solutions de (1), $\alpha,\beta \in IR$, alors $\alpha y + \beta z$ est solution de (1) car on a:

$a(\alpha y + \beta z)'' + b(\alpha y + \beta z)' + c(\alpha y + \beta z) = \alpha a y'' + \alpha b y' + \alpha c + \beta a z'' + \beta b z' + \beta c z = 0$

Proposition 2

Soit $r \in \mathbb{C}$, alors la fonction $z: x \rightarrow e^{rx}$ est solution de (1) si et seulement si r est une racine du polynôme caractéristique P.

Preuve :

$$z'(x) = r\, e^{rx}, \quad z''(x) = r^2 e^{rx}$$

$$ar^2 e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \Leftrightarrow ar^2 + br + c = 0$$

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$, on a la proposition suivante:

Proposition 3:

On suppose $\Delta \neq 0$. Soit r_1 et r_2 les racines distinctes du polynôme caractéristique, les deux solutions $z_1 : x \rightarrow e^{r_1 x}$ et $z_2 : x \rightarrow e^{r_2 x}$ sont linéairement indépendantes.

Preuve :

Soient λ et $\mu \in IR$ tels que : $\lambda z_1 + \mu z_2 = 0$

c.a.d

$$\lambda z_1(x) + \mu z_2(x) = 0 \quad , \quad \forall\, x \in IR$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda z'_1(x) + \mu z'_2(x) = 0 \quad , \quad \forall\, x \in IR$$

Le déterminant du système est :

$$\begin{vmatrix} z_1(x) & z_2(x) \\ z'_1(x) & z'_2(x) \end{vmatrix} = z_1(x)\, z'_2(x) - z'_1(x)\, z_2(x)$$

$$= r_2 e^{(r_1+r_2)x} - r_1 e^{(r_1+r_2)x} = (r_2 - r_1) e^{(r_1+r_2)x} \neq 0$$

ce qui implique que $\lambda = \mu = 0$

Proposition 4:

Soit $r \in IR$ et $z_{1,r}$ la fonction $x \rightarrow xe^{rx}$. La fonction $z_{1,r}$ est solution de (1) si et seulement si

r est la racine double du polynôme caractéristique P.

Preuve: $z_{1,r}(x) = xe^{rx} \rightarrow z'_{1,r}(x) = e^{rx} + rx\, e^{rx}$

$$= (1+rx)e^{rx}$$

$$z''_{1,r}(x) = re^{rx} + r(1+rx)e^{rx} - (r^2x, 2r)e^{rx}$$

(1) $[a(r^2x+2r) + b(1+rx) + cx]e^{rx} = 0$

$\Leftrightarrow$

$$(ar^2+br+c)x + 2ar + b = 0, \qquad \forall\, x \in IR$$

$\Leftrightarrow$

$$ar^2+br+c = 0 \text{ et } r = -\tfrac{b}{2a}$$

Proposition 5:

On suppose $\Delta = 0$. Soit r la racine double du polynôme caractéristique P. Les solutions
$z_r : x \rightarrow e^{rx}$ et $z_{1,r} : x \rightarrow xe^{rx}$ sont linéairement indépendantes .

Preuve :En procédant de façon analogue que pour la preuve de la proposition 3, nous obtenonsque le déterminant du système est :

$$\begin{vmatrix} z_r(x) & z_{1,r}(x) \\ z'_r(x) & z'_{1,r}(x) \end{vmatrix} = (1+rx)e^{2rx} - rxe^{2rx} = e^{2rx} \neq 0$$

non nul, d'où l'indépendance linéaire des deux solutions.

Théorème :

Soit $a \in IR^*$, $b, c \in IR$, S l'ensemble des solutions de l'équation différentielle :

(1) $ay'' + by' + cy = 0$

Alors on a les résultats suivants :

(i) S est un espace vectoriel de dimension deux sur IR.

(ii) Si $\Delta > 0$, les racines r_1, r_2 de P sont réelles , et l'on a :

$$S = \{y \,/\, y(x) = k_1e^{r_1x} + k_2e^{r_2x}, \ \forall x \in IR, \ k_1, k_2 \in IR\}$$

(iii) Si $\Delta > 0 = 0$, soit r la racine double de P, alors on a:

$$S = \{y \,/\, y(x) = (k_1 + k_2x)e^{rx}, \ \forall x \in IR, \ k_1, k_2 \in IR\}$$

(iv) Si $\Delta < 0$, notons $r_1 = -\frac{b}{2a} + i\omega$ et $r_2 = -\frac{b}{2a} - i\omega$, (avec $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$), les deux racines complexes du polynôme P, alors on a:

$$S = \left\{ y \,/\, y(x) = (k_1 \cos \omega x + k_2 \sin \omega x) e^{-\frac{b}{2a}x}, \quad \forall x \in IR, \quad k_1, k_2 \in IR \right\}$$

Preuve :

(i) Supposons $\Delta \neq 0$, et soient r_1 et r_2 les racines de P, soit z une solution de (1). Soient k_1 et k_2 deux fonctions solutions du système :

$$k_1(x) z_{r_1}(x) + k_2(x) z_{r_2}(x) = z(x) \quad , \quad \forall x$$

$$k_1(x) z'_{r_1}(x) + k_2(x) z'_{r_2}(x) = z'(x)$$

On obtient :

$$k_1(x) = \frac{(z\, z'_{r_2} - z' z_{r_2})(x)}{(z_{r_1} z_{r_2} z'_{r_1})(x)}$$

$$k_2(x) = \frac{(z\, z'_{r_2} - z' z_{r_1})(x)}{(z_{r_1} z'_{r_2} - z_{r_2} z'_{r_1})(x)}$$

On calcule $k'_1(x)$ et $k'_2(x)$, et on utilise le fait que z, z_{r_1} et z_{r_2} sont solutions de (1), ce qui donne:

$k'_1(x) = k'_2(x) = 0$ d'où $k_1(x) = k_1$ et $k_2(x) = k_2$ donc $z(x) = k_1 z_{r_1}(x) + k_2 z_{r_2}(x)$, donc $\{z_{r_1}, z_{r_2}\}$ base de S. Même démarche si $\Delta = 0$, en considérant z_r et $z_{1,r}$, où r est la racine double du polynôme caractéristique P .

Théorème (problème de Cauchy) :

Etant donné un nombre réel x_o et deux nombres complexes y_o et z_o, il existe une solution et une seule y de l'équation $ay'' + by' + cy = 0$ telle que $y(x_o) = y_o$ et $y'(x_o) = z_o$.

Preuve:

1er cas: $\Delta \neq 0$, il s'agit de trouver deux constantes réelles k_1 et k_2 telles que:

$$\begin{cases} k_1 e^{r_1 x_o} + k_2 e^{r_2 x_o} = y_o \\ k_1 r_1 e^{r_1 x_o} + k_2 r_2 e^{r_2 x_o} = z_o \end{cases}$$

Le système est de Cramer d'après la proposition 3.

$2^{ème}$ cas: $\Delta = 0$, on est conduit à étudier le système

$$\begin{cases} k_1 e^{r_1 x_o} + k_2 e^{r_2 x_o} = y_o \\ k_1 r_1 e^{r_1 x_o} + k_2 r_2 e^{r_2 x_o} = z_o \end{cases}$$

Le système étant de Cramer d'après la proposition 5 , la solution existe et elle est unique.

(2) **Equations avec second membre**

Soit $a \in IR^*$, $b \in IR$, nous nous proposons de résoudre l'équation différentielle :

$$ay'' + by' + cy = g(x) \qquad (2)$$

On appelle équation sans second membre (ou équation homogène) associée à (2) l'équation

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (1)$$

Notons S_g l'ensemble des slutions de (2) ; on suppose que g est choisie de telle façon que
S_g soit non vide.

Soit S l'ensemble des solutions de (2) ; on suppose que g est choisie de telle façon que S_g soit non vide.

Soit S l'ensemble des solutions de (1).

Théorème 1: Etant donné une solution particulière φ_1 de (2), pour que φ soit solution de (2), il faut et il suffit que $\varphi - \varphi_1$ soit solution de (1).

$$S_g = \varphi_1 + S \Leftrightarrow \forall \varphi \in S_g \ , \exists \psi \in S \ : \varphi = \varphi_1 + \psi$$

Corollaire : **Problème de Cauchy**

Etant donné trois nombres réels x_o, y_o et z_o , il existe une solution et une seule y de (2) telle que :

$$y(x_o) = y_o \quad \text{et} \quad y'(x_o) = z_o$$

Preuve :

Soit φ_1 une solution particulière de (2)

On cherche φ sous la forme : $\varphi = \varphi_1 + \psi$

$$y_o = \varphi(x_o) = \varphi_1(x_o) + \psi(x_o) \text{ et } z_o = \psi(x_o) = \varphi'_1(x_o) + \psi'(x_o)$$

$$\begin{cases} \psi(x_o) = y_o - \varphi_1(x_o) \\ \psi'(x_o) = z_o - \varphi'_1(x_o) \end{cases}$$ La solution est unique d'après le théorème de Cauchy

Remarque : Principe de superposition

Si y_k est solution de l'équation :

$$ay'' + by' + cy = f_k \,,\quad 1 \le k \le n, \quad n \text{ entier fixé}$$

et si $f = \sum_{k=1}^{n} f_k$, alors $y = \sum_{k=1}^{n} y_k$ est solution de l'équation :

$$ay'' + by' + cy = f$$

(3)Recherche d'une solution particulière pour les équations à seconds membres remarquables :

a) $ay'' + by' + cy = P_n(x)$, où P_n est une fonction plynôme de degé n.Cherchons une solution particulière notée y_0 de l'équation ci-dessus. Trois cas sont possibles :

(i) Si $c \neq 0$, on prend : $y_o(x) = Q_n(x),\ deg\ Q_n = n$
(ii) Si $c = 0$ et $b \neq 0$, $y_o(x) = Q_{n+}1(x),\ deg\ Q_{n+1} = n+1$
(iii) Si $c = b = 0$ $y_o(x) = Q_{n+2}(x),\ deg\ Q_{n+2} = n+2$

Les coefficients du polynôme Q_m sont déterminés par identifications.

b) $ay'' + by' + cy = De^{\lambda t}$, où D et λ sont des constantes réelles.
Trois cas sont possibles :
(i) Si λ n'est pas racine du polynôme caractéristique , on prend:

$$y_o(x) = \frac{D}{a\lambda^2 + b\lambda + c}\, e^{\lambda x}$$

(ii) Si λ est une racine simple du polynôme caractéristique, on prend:

$$y_o(x) = \frac{D}{2a\lambda+b}\, xe^{\lambda x}$$

(iii) Si λ est racine double du polynôme caractéristique, on prend :

$$y_o(x) = \frac{D}{2a}\, x^2 e^{\lambda x}$$

Exercices : Intégrer les équations: $y'' + 4y' = x^2 - 2x$

$$y'' - 6y' + 9y = 5\, e^{3x}$$

c) $ay'' + by' + cy = P_n(x)e^{\lambda x}$, Pn de degré n, λ constante réelle.
Trois cas sont possibles :

(i) Si λ n'est pas racine du polynôme caractéristique, on prend:

$$y_o(x) = Q_n(x)\, e^{\lambda x} \quad \deg Q_n = n$$

(ii) Si λ est une racine simple du polynôme caractéristique,on prend :

$y_o(x) = Q_{n+1}(x)\, e^{\lambda x}$ avec $\deg Q_{n+1} = n + 1$

(iii) Si λ est racine double du polynôme caractéristique ,on prend :

$y_o(x) = Q_{n+2}(x)\, e^{\lambda x}$ avec $\deg Q_{n+2} = n + 2$

Les coefficients du polynôme Q_m sont déterminés par identifications.

d) $ay'' + by' + cy = e^{\lambda x}.\,(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$, A et B étant des constantes réelles.
Deux cas sont possibles :

(i) Si $\lambda + i\,\omega$ n'est pas racine du polynôme caractéristique, on prend comme solution particulière:

$$y_o(x) = e^{\lambda x}\,(C\cos\omega x + D\sin\omega x)$$

(ii) Si $\lambda + i\omega$ est une racine du polynôme caractéristique ,on prend comme solution particulière:

$y_o(x) = xe^{\lambda x} \ (C\cos\omega x + D\sin\omega x)$

Les constantes réelles C et D sont déterminées par identifications en utilisant le fait que les fonctions $x \to e^{\lambda x}\cos\omega x$ et $x \to e^{\lambda x}\sin\omega x$ sont liéairement indépendantes .

Exercices

$$y''-4y = x^2 - 2x; \quad y''+4y = e^x sin^2 x;$$
$$y''+3y = cos^3 x; y'' + y' - 2y = e^x + 3e^{2x}; y'' - 2y' + 2y = \sin x + \cos x . e^x + x^2$$

4) Méthode de la variation de la constante :

Soit à résoudre l'équation:

(2) $\quad ay'' + by' + cy = f \qquad a \in IR^*, f$ étant une fonction continue.Discutons suivant le discriminant Δ :

1er cas: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$:

Soit r_1 et r_2 les racines distinctes de l'équation : $ar^2 + br + c = 0$

La solution générale de l'équation homogène associée à l'équation (2) est de la forme :

$$y(x) = k_1 e^{r_1 x} + k_2 e^{r_2 x} \ , \ k_1, k_2 \in IR$$

On cherche alors la solution de (2) en considérant :

$y(x) = k_1(x)e^{r_1 x} + k_2(x)e^{r_2 x}$, $\quad$ on a :

$$y'(x) = (k_1 r_1 + k'_1)e^{r_1 x} + (k_2 r_2 + k'_2)e^{r_2 x}$$

$$y''(x) = (k_1 r_1^2 + k'_1 r_1)e^{r_1 x} + (k_2 r_2^2 + k'_2 r_2)e^{r_2 x} + (\ k'_1(x)e^{r_1 x} + k'_2(x)e^{r_2 x})'$$

Nous imposons la condition : $k'_1(x)e^{r_1 x} + k'_2(x)e^{r_2 x} = 0$

$$ay'' + ay' + cy = \underbrace{(ar_1^2 + br_1 + c)}_{=0} \ k_1 e^{r_1 x} +$$

$$+\underbrace{(ar_2^2+br_2+c)}_{=0}\ k_2e^{r_2x}+$$

$$+a(k'_1r_1e^{r_1x}+k'_2r_2e^{r_2x})=f(x)$$

$\Leftrightarrow$

$$a(k'_1(x)r_1e^{r_1x}+k'_2(x)r_2e^{r_2x})=f(x)$$

La fonction $y=k_1e^{r_1x}+k_2e^{r_2x}$ sera solution de (2) si k_1 et k_2 vérifient le système :

$$\begin{cases} e^{r_1x}k'_1(x)+e^{r_2x}k'_2(x) = 0 \\ r_1e^{r_1x}k'_1(x)+r_2e^{r_2x}k'_2(x) = \frac{1}{a}f(x) \end{cases}$$

$$k'_1(x) = \frac{1}{a(r_1-r_2)}e^{-r_1x}\ f(x)$$

$$k'_2(x) = \frac{1}{a(r_1-r_2)}e^{-r_2x}\ f(x)$$

La solution générale de (2) s'obtient de la façon :

$$y(x) = k_1(x)e^{r_1x}+k_2(x)e^{r_2x}+K_1\ e^{r_1x}+K_2e^{r_2x}$$

$$y(x) = (k_1(x)+K_1)e^{r_1x}+(k_2(x)+K_2)e^{r_2x}\ ,K_1,K_2\in IR$$

Finalement la solution générale est la suivante :

$$y(x) = \frac{1}{a(r_1-r_2)}\left\{e^{r_1x}\int_\alpha^x e^{-r_1x}f(t)dt - e^{r_2x}\int_\alpha^x e^{-r_2x}f(t)dt\right\}+K_1e^{r_1x}+K_2e^{r_2x}$$

2ème cas : $\Delta<0$

La solution générale de l'équation homogène associée à (2) peut s'écrire :

$$y(x) = (k_1\cos\omega x+k_2\sin\omega x)e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x} \qquad \text{où} \quad \omega=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

On cherche la solution de (2) sous la forme :

$$y(x) = (k_1(x)\cos\omega x + k_2(x)\sin\omega x)e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x}$$

En procédant de façon analogue au cas précédent ,on obtient le système :

$$\begin{cases} (\cos\omega x)k'_1(x) + (\sin\omega x)k'_2(x) = 0 \\ -(\sin\omega x)k'_1(x) + (\cos\omega x)k'_2(x) = \frac{1}{a\omega}f(x)e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x} \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} k'_1(x) = -\frac{1}{a\omega}f(x)e^{+\left(\frac{b}{2a}\right)x}\sin\omega x \\ k'_2(x) = \frac{1}{a\omega}f(x)e^{+\left(\frac{b}{2a}\right)x}\cos\omega x \end{cases}$$

La solution générale de (2) est donnée par la formule suivante :

$$y(x) = -\frac{1}{a\omega}\,(\cos\omega x))e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x}\int_{\alpha}^{x}(\sin\omega t)e^{\left(\frac{b}{2a}\right)t}f(t)dt +$$

$$+\frac{1}{a\omega}\,(\sin\omega x)e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x}\int_{\alpha}^{x}(\cos\omega t)e^{\left(\frac{b}{2a}\right)t}f(t)dt + (K_1\cos\omega x + K_2\sin\omega x)e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x}, K_1, K_2 \in IR.$$

3ème cas: $\Delta = 0$, la solution générale de (2) est donnée par :

$$y(x) = \frac{1}{a}e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x}\left\{\int_{\alpha}^{x} e^{\left(\frac{b}{2a}\right)t}f(t)dt - \int_{\alpha}^{x} t\, e^{\left(\frac{b}{2a}\right)t}f(t)dt\right\} + (K_1 + K_2x)e^{-\left(\frac{b}{2a}\right)x}, K_1, K_2 \in IR.$$

Remarque :La résolution de l'équation (2) peut s'effectuer de la façon suivante:

Premier cas: $\Delta \geq 0.$

Soit r une racine du polynôme caractéristique.On cherche une solution de (2) sous la forme $y(x) = z(x)e^{rx}$. Nous obtenons une équation différentielle en z :

$az'' + (2ar + b)z' = f(x)e^{-rx}$

En posant $u = z'$, nous avons une équation différentielle linéaire en u :

$au' + (2ar + b)u = f(x)e^{-rx}$

La résolution de l'équation ci-dessus permettra la détermination de z.

Deuxième cas: $\Delta < 0.$

Soit $\alpha + i\beta$ une racine du polynôme caractéristique.Cherchons une solution de (2) sous la forme $y(x) = z(x)e^{\alpha x}.\cos(\beta x)$. L'équation obtenue est la suivante:

$z''e^{\alpha x}\cos(\beta x) - 2\beta z'e^{\alpha x}\sin(\beta x) = f(x)$

En posant $u = z'$, nous avons une équation différentielle linéaire en u :

$u'e^{\alpha x}\cos(\beta x) - 2\beta ue^{\alpha x}\sin(\beta x) = f(x)$

La résolution de l'équation ci-dessus permettra de déterminer la fonction u et d'en déduire z ensuite.

III- Equations linéaires du second ordre :

Une équation différentielle linéaire du second ordre est de la forme :

$$(1) \qquad y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$$

où p, q et g sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert $I =]\alpha, \beta[$

(1) Equations sans second membre :

L'équation homgène associée à (1) s'écrit :

$$(2) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Soit S l'ensemble des solutions de (2), ona le résultat suivant:

Théorème :

(i) Soient $y_1, y_2 \in S$, alors y_1 et y_2 sont linéairement indépendants si et seulement si

$W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ pour un $x \in I$, avec $W(y_1, y_2)(x) = y_1(x).y_2'(x) - y_2(x).y_1'(x)$.

(ii)Soient y_1 et $y_2 \in S$ vérifiant la condition (i), alors:

$$S = \{y / \ y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \ \ c_1, c_2 \in IR\}$$

Méthode de la réduction de l'ordre :

Soit y_1 une solution de l'équation (2)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

On cherche la solution sous la forme :

$$y = v.\, y_1$$

En effectuant les calculs, on obtient l'équation :

$$(3) \qquad v'' + (p + 2\,\tfrac{y_1'}{y_1})v' = 0$$

En posant $w = v'$, on obtient une équation différentielle linéaire du premier ordre.

(2) **Equations avec second membre**

On reprend l'équation initiale:

(1) $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$

Théorème :

Soit y_p une solution particulière de (1): y_1 et y_2 deux solutions linéairement indépendantes de (2), alors la solution générale de (1) s'écrit :

$$y = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2$$

Méthode de la réduction :

Partant d'une solution particulière y_1 de (2) , on cherche la solution de (1) sous la forme $y = y_1.v$, nous obtenons l'équation différentielle suivante qui peut se transformer en une équation linéaire du premier ordre en posant $w = v'$:

$y_1 v'' + 2(y'_1 + p y_1)v' = g$

Remarque :

a) L'espace vectoriel des solutions de l'équation :

(*) $y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$, a,b continues est de dimention ≤ 2.

Il existe au plus une solution telle que: $y(x_o) = y_o$, $y'(x_o) = z_o$

b) Deux solutions y_1 et y_2 de l'équation (*) sont linéairement indépendantes si et seulement si le déterminant $\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y'_1(x) & y'_2(x) \end{vmatrix}$ est différent de 0 pour tout x.

Ali ALAMI-IDRISSI Saïd EL HAJJI et Samir HAKAM

Université Mohammed V - Agdal

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et Informatique

Groupe d'Analyse Numérique et Optimisation

Avenue Ibn Batouta, B.P. 1014

Rabat, Maroc

Tel et fax +(37)775471

Pages web :

http://www.fsr.ac.ma/ANO/

Email : alidal@fsr.ac.ma elhajji@fsr.ac.ma s-hakam@fsr.ac.ma

http://www.fsr.ac.ma/ANO/elhajji/