

Université Mohammed V - Agdal
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique
Avenue Ibn Batouta, B.P. 1014
Rabat, Maroc

Filière DEUG :

Sciences Mathématiques et Informatique (SMI)
et
Sciences Mathématiques (SM)

Module Mathématiques I

NOTES de cours d'Analyse I

Chapitre III :
Fonctions réelles à une variable réelle.
Notion de Limite (ses variantes)
et Théorèmes d'Analyse

Par

Saïd EL HAJJI
Groupe d'Analyse Numérique et Optimisation
Email : elhajji@fsr.ac.ma

et

Samir HAKAM
Email : s-hakam@fsr.ac.ma

Année 2003-2004

Fonctions réelles à une variable réelle. Notion de Limite (ses variantes) et Théorèmes d'Analyse

Objectif ¹ :

Connaitre et interpréter :

La notion de limite (rappels)

La notion de continuité (rappels)

La notion de dérivée (rappels)

Approfondir les notions de fonctions continues et dérivables :

Théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème de Rolle

Théorème des Accroissement Finis).

Connaitre et utiliser les corollaires du Théorème des Accroissement Finis.

Connaitre et utiliser la règle de l'Hospital pour le calcul de limites

Plan :

I - Notions de limite et variantes

Rappels

Notion de Limite : Définitions et propriétés de Base

Notion de Continuité : Définitions et Théorème(s) des Valeurs Intermédiaires

Fonctions réciproques

II - Notion de Dérivabilité, Théorèmes de Rolle (ses variantes) et Applications

Définition

Opérations élémentaires

Différentielle

Théorème de Rolle

Théorème des Accroissements Finis

Règle de l'Hospital

Calcul de Limites

¹S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

Fonctions réelles à une variable réelle.

Notion de Limite (ses variantes)

et Théorèmes d'Analyse

I - Notions de limite et variantes ² :

1) - Rappels :

Soit D une partie de IR .

Définition :

On appelle fonction réelle d'une variable réelle, toute application f définie sur une partie D de IR à valeur dans IR . D est appelé domaine de définition de f et est noté D_f . $D_f = \{x \in IR : f(x) \text{ existe}\}$.

Exemples :

1) $f(x) = \sin(\frac{1}{x}), D_f = IR^* =]-\infty, +\infty[$

2) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1},$

$$D_f = \{x \in IR : x^2 - 1 \geq 0\} = \{x \in IR : x \leq -1 \text{ et } x \geq 1\} =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[.$$

Définition (Graphe d'une fonction) :

Dans un plan rapporté à un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (généralement orthonormé). Les points $M(x, f(x))$ avec $x \in D_f$ constituent la courbe représentative de f , noté C_f .

$$C_f = \{M(x, f(x)) : x \in D_f\}$$

On appelle graphe de f , l'ensemble des couples $(x, f(x))$ où $x \in D_f$.

Définition (Périodicité) :

Soit $f : D_f \longrightarrow IR$. f est dite périodique et de période T si

i) $\forall x \in D_f, (x + T) \in D_f$

ii) $f(x) = f(x + T)$

T est la plus petite période qui vérifie ii).

Remarque :

Si f est de période T alors $\forall n \in IN : (x + nT) \in D_f, f(x + nT) = f(x)$

Exemple :

Soit $f(x) = \sin(x)$.

Le domaine de définition de f est $D_f = IR$,

f est périodique et de période 2π .

Le domaine d'étude de f est $D_E = [-\pi, \pi]$ ou tout intervalle de longueur 2π .

Définition (Parité) :

Soit $f : D_f \longrightarrow IR$

²S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

- i) f est dite paire si $\forall x \in D_f, (-x) \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$
- ii) f est dite impaire si $\forall x \in D_f, (-x) \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

Si la fonction est paire ou impaire, son domaine d'étude est réduit de moitié.

Remarque : Dans la définition de la parité, on suppose que D_f admet 0 pour centre de symétrie

Définition (axe de symétrie) :

Soit $f : D_f \longrightarrow IR$.

i) On dit que la fonction f est symétrique par rapport à l'axe vertical $x = a$, si et seulement si :

$$\forall x \in D_f : (a - x) \in D_f, (a + x) \in D_f, \text{ on a } f(a - x) = f(a + x).$$

ii) On dit que la fonction f est symétrique par rapport au point $M(a, f(a))$, si et seulement si :

$$\forall x \in D_f : (a - x) \in D_f, (a + x) \in D_f, \text{ on a } f(a + x) + f(a - x) = 2f(a).$$

Remarque :

Si la fonction f est paire, impaire et/ou périodique et/ou possède un axe ou un point de symétrie, on peut grâce à ces éléments de symétrie, réduire le domaine de définition de f à un domaine plus petit.

Exemple :

Soit $f(x) = \sin(x)$. On a $D_f = IR$,

f est périodique et de période $2\pi \Rightarrow D_E = [-\pi, \pi]$.

f est impaire, donc le domaine d'étude de f se ramène à $D_E = [0, \pi]$

Définition (Fonctions bornées) :

Soit $f : D_f \longrightarrow IR$

i) f est dite majorée (resp. minorée) si l'image de D_f par f est une fonction majorée i.e. $f(D_f)$ est une partie majorée de IR (resp. minorée) de IR
c'est à dire

$$\exists M \in IR : \forall x \in D_f, f(x) \leq M \text{ (resp. } \exists m : \forall x \in D_f, f(x) \geq m).$$

ii) f est dite bornée si $f(D_f)$ est une partie bornée de IR
c'est à dire

$$\exists m \in IR \text{ et } M \in IR : \forall x \in D_f, m \leq f(x) \leq M.$$

Exemples :

1) $f(x) = \sin(x)$ f est bornée, $\forall x \in IR : -1 \leq f(x) \leq 1$

2) $f(x) = e^x$ est non bornée, mais elle est minorée par 0. $\forall x \in IR, 0 \leq e^x$.

Remarque :

L'image d'une partie bornée par une application n'est pas forcément bornée.

En effet si on prend :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

on a $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mais $f([0, 1])$ n'est pas bornée.

2) Notion de Limite : Définitions et propriétés de Base ³

Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de x_0 tout intervalle de la forme $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$ où $\varepsilon > 0$. Tout voisinage de x_0 est noté $\vartheta(x_0)$ ou ϑ_{x_0} ou $V(x_0)$ ou V_{x_0} ou V

2.1) Définitions et Notations :

Définition :

Soit f une fonction définie au voisinage du point x_0 , sauf peut être en x_0 . On dit que f admet une limite l lorsque x tend vers x_0 si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0; |x - x_0| < \eta_\varepsilon \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

On note $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ou $\lim_{x_0} f(x) = l$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ ou $\lim_{x_0} f(x) = l$

Remarque :

- i) $|x - x_0| < \eta_\varepsilon \iff x_0 - \eta_\varepsilon \leq x \leq x_0 + \eta_\varepsilon$ c'est à dire $x \in V(x_0)$.
- ii) $|f(x) - l| < \varepsilon \iff l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon$ c'est à dire $f(x) \in V(l)$.
- iii) Si f est définie en x_0 alors $\lim_{x_0} f(x) = f(x_0)$

Définition (Limite à gauche et limite à droite) :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On dit que f admet une limite à gauche l en x_0 si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0; x_0 - \eta_\varepsilon < x < x_0 \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

On note $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ ou $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l$ ou $\lim_{x_0^+} f(x) = l$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ ou $\lim_{x_0^+} f(x) = l$

On dit que f admet une limite à droite l en x_0 si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0; x_0 < x < x_0 + \eta_\varepsilon \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

On note $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$ ou $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x < x_0}} f(x) = l$ ou $\lim_{x_0^-} f(x) = l$ ou $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$ ou $\lim_{x_0^-} f(x) = l$

Propriété :

³S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

Si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$.

Preuve :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l \implies \forall \varepsilon > 0, \exists \eta_1 > 0; x_0 < x < x_0 + \eta_1 \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l \implies \forall \varepsilon > 0, \exists \eta_2 > 0; x_0 - \eta_2 < x < x_0 \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Soit $\eta = \sup(\eta_1, \eta_2)$ alors $x < x_0 < x_0 + \eta$ et $x_0 - \eta < x < x_0$

d'où

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \sup(\eta_1, \eta_2); x_0 - \eta < x < x_0 + \eta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Remarque :

1) Si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l_1$ et $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l_2$ avec $l_1 \neq l_2$ alors f n'admet pas de limite en x_0 .

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$$

Généralisation sur les limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon > 0, \forall x > A_\varepsilon \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists A_\varepsilon > 0, \forall x < -A_\varepsilon \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0, \exists \eta > 0; |x - x_0| < \eta \implies |f(x)| > A$$

etc ...

2.2) Propriétés et Théorèmes de base sur les limites ⁴

En général, les Propriétés et Théorèmes de base sont les même que pour les suites. Leur démonstration est omise mais ils sont à connaître par coeur.

Théorème 1 :

i) **Unicité :** Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ alors l est unique.

ii) Si f admet une limite l en x_0 alors f est bornée au voisinage de x_0

càd $\forall x \in V(x_0), l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon$.

Propriété (Opération sur les limites)

Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ et $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l'$ alors

$$i) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = l + l'$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x).g(x)] = l.l'$$

$$iii) \text{ si de plus, } l' \neq 0 \text{ et } g \neq 0 \text{ au } V(x_0), \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$$

Théorème 2

$$i) \left. \begin{array}{l} \text{si } f > 0 \quad \text{ou} \quad f \geq 0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \end{array} \right\} \implies l \geq 0$$

⁴S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

$$\text{ii) } \left. \begin{array}{l} \text{Si } f > g \quad \text{ou} \quad f \geq g \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l' \end{array} \right\} \Rightarrow l \geq l'$$

iii) **Théorème d'Encadrement :**

$$\left. \begin{array}{l} \text{Si } f < h < g \quad \text{ou} \quad f \leq h \leq g \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l' \end{array} \right\} \Rightarrow l \leq \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) \leq l'$$

Théorème 3 :

- i) Si g est continue et $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = g(l)$.
- ii) Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$ et $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow x_0} g \circ f(x) = l$.
- iii) Si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0$ et $\lim_{x \rightarrow y_0} g(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow y_0} g \circ f(x) = l$ si $\text{Im}(f) \subset D_g$.

Remarque :

1) On calcule les limites à partir des limites des fonctions usuelles, des théorèmes sur les limites mais aussi après transformation algébrique (on dit par "astuces").

2) On reviendra en détails sur le calcul des limites à la fin de ce chapitre mais aussi au chapitre suivant.

Exemples⁵ :

- 1) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (par définition de la dérivée de $\sin(x)$ au point $x = 0$).
- $g(x) = \frac{\log(1+2x)}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+2x)}{x} = 2$ (par définition de la dérivée de $\log(1+x)$ au point $x = 0$).

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} [f(x) + g(x)] = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 0} [f(x)g(x)] = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{2}$$

$$2) f(x) = \frac{\log(1+x^2)}{x^2} > 0 \text{ au voisinage de } 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{x^2} \geq 0$$

$$3) f(x) = \frac{\log(1+x^2)}{x^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{x^2} = 1, \text{ (on pose } X = x^2) \\ g(x) = \frac{\log(1+2x^2)}{x^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+2x^2)}{x^2} = 2 \text{ et } f(x) \leq g(x) \text{ au voisinage de } 0 \\ \text{donc } 1 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^2)}{x^2} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+2x^2)}{x^2} = 2$$

Propriété caractéristiques de la limite d'une fonction

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0; |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

$\iff$ pour tout voisinage $\vartheta(l)$ de l , il existe un voisinage $\vartheta(x_0)$ de x_0 tel que :

$$\forall x \in \vartheta(x_0) - \{x_0\} \text{ on a : } f(x) \in \vartheta(l)$$

Propriété (lien entre suite et limite)

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \text{pour toute suite } (x_n) \text{ qui tend vers } x_0 \text{ on a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l$$

Preuve :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0; |x - x_0| < \eta_\varepsilon \implies |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x_0$ pour ce même η_ε , $\exists N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n > N$ on a $|x_n - x_0| < \eta_\varepsilon$

donc

⁵S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^* : \forall n > N \Rightarrow |f(x_n) - l| \leq \epsilon \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l.$$

Remarque :

Cette propriété sert plutôt à montrer que la limite n'existe pas en un point et plus tard qu'une fonction n'est pas continue en un point.

Exemple :

Si $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ n'existe pas, en effet pour

$$x_n = \frac{1}{2n\pi} \rightarrow 0 \text{ on a : } f(x_n) = \sin(2n\pi) = 0$$

$$y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}} \rightarrow 0, \text{ on a : } f(y_n) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$$

2.3) Formes indéterminées ⁶ :

Définition :

Dans le calcul des limites, on appelle Forme Indéterminée (on note F.I.), toute situation qui conduit à un cas où les théorèmes portant sur les opérations sur les limites ne permettent pas de conclure. Les formes indéterminées les plus courantes sont :

$$\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0 \times \infty, -\infty + \infty, 1^\infty, 0^0, 0^\infty, \infty^0, \text{ etc}$$

Remarque :

Le résultat de l'étude d'une F.I. dépend des fonctions.

Exemple :

Si $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x$ alors $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

On dit que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$ est une forme indéterminée de la forme $\frac{0}{0}$. Car cette limite ne peut être déterminée directement d'où le nom de F.I.

Elle l'est par définition de la dérivée et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

On reviendra à la fin de ce chapitre mais aussi au chapitre suivant, sur deux techniques de bases pour " lever les indéterminations " et donc calculer ces limites.

3 - Continuité : Définitions et Théorème(s) des Valeurs Intermédiaires .

3.1) Définitions et Notations :

Définition :

Soient f une fonction réelle définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.

i) On dit f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

$$\iff \forall \epsilon > 0, \exists \eta_\epsilon > 0; |x - x_0| < \eta_\epsilon \implies |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$$

ii) On dit f est continue à droite en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

iii) On dit f est continue à gauche en x_0 si et seulement si $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

iv) On dit f est continue dans l'intervalle $[a, b]$ si elle est continue en tout point x de $]a, b[$, et est continue à droite de a et à gauche de b .

⁶S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

Remarque :

Contrairement à ce qui peut se passer pour les limites, si f est continue à droite et à gauche en x_0 alors elle est continue en x_0 .

Théorème (Opération sur les fonctions continues)

Soient f et g deux fonctions continues en x_0 , alors :

- i) $f + g$ et $f \times g$ sont continues en x_0 .
- ii) Si $g(x) \neq 0$ au voisinage de x_0 et $g(x_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en x_0 .
- iii) Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0 .

Exemples : (fonctions continues)

1) Les Fonctions polynômes

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, les fonctions $a_p x^p$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

2) Les Fonctions trigonométriques sont continues dans leur domaine de définition respectif.

Cas de la Fonction Sinus : $f(x) = \sin(x)$. Pour tout x et $x_0 \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sin(x) - \sin(x_0) = 2 \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \cos\left(\frac{x+x_0}{2}\right)$$

Or pour tout $u \in \mathbb{R}$, $|\sin(u)| \leq |u|$ d'où

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| \leq 2 \left| \sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right) \right| \times 1 \leq |x - x_0|$$

donc $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta = \varepsilon; |x - x_0| < \eta \implies |\sin(x) - \sin(x_0)| \leq |x - x_0| \leq \varepsilon$.

Ainsi la fonction $\sin(x)$ est continue dans $\mathbb{R}$.

2) Les Fonctions élémentaires sont continues dans leur domaine de définition respectif.

Exemples : e^x est continue dans $\mathbb{R}$, $\log(x)$ est continue dans $\mathbb{R}_+^*$, etc...

3.2) Théorème(s) des Valeurs Intermédiaires ⁷.

Le théorème des Valeurs Intermédiaires, noté V.I., s'écrit sous plusieurs formes. On dit qu'il admet plusieurs formulations. Ces formes et/ou formulations reposent toutes sur les postulats suivants dans la démonstration est hors programme.

Postulat 1 : Une fonction continue sur $[a, b]$ est bornée dans cet intervalle.

Postulat 2 : Si une fonction est continue sur $[a, b]$, alors elle atteint un maximum M et un minimum m sur l'intervalle fermé $[a, b]$.

Théorème 1 des Valeurs Intermédiaires (1^{ère} forme) :

Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, alors

- i) $f([a, b]) = [m, M]$

⁷S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

et de plus

ii) il existe $x_0 \in [a, b]$ et $x_1 \in [a, b] : f(x_0) = m$ et $f(x_1) = M$.

Théorème 2 :

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$. L'image de l'intervalle fermé borné $[a, b]$ par la fonction continue f est un intervalle fermé borné $[m, M]$

c'est à dire pour tout $a \leq x \leq b$ on a $m \leq f(x) \leq M$

donc f varie entre un minimum $m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$ est un maximum $M = \sup_{x \in [a, b]} f(x)$;
 $m = f(c)$ et $M = f(b)$

Conclusion :

Si f est une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, alors le minimum m et le maximum M de f sont atteint par f sur $[a, b]$ c'est à dire

$$\exists x_0 \in [a, b] \text{ telque } f(x_0) = m \text{ et } \exists y_0 \in [a, b] \text{ telque } f(y_0) = M$$

On appelle oscillation de la fonction continue f sur $[a, b]$, la difference $M - m$.

Propriété :

$$\left. \begin{array}{l} x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x_0 \\ f \text{ continue en } x_0 \end{array} \right\} \implies f(x_n) \longrightarrow f(x_0)$$

c'est à dire si f est continue en x_0 et la suite $(x_n)_n$ converge vers x_0 alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = f(\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n) = f(x_0)$

Théorème 3 (dit de Théorème de Bolzano) ⁸ :

Si f est continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ et si le produit $f(a).f(b) < 0$, alors il existe au moins un point $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$

Preuve du Th de Bolzano :

On a $\frac{a+b}{2} \in [a, b]$

i) Si $f(\frac{a+b}{2}) = 0$ c'est fini, c existe et $c = \frac{a+b}{2}$

ii) Si $f(\frac{a+b}{2}) \neq 0$ $\left\{ \begin{array}{ll} \text{si } f(a).f(\frac{a+b}{2}) > 0 & \text{on pose } a_1 = \frac{a+b}{2} \text{ et } b_1 = b \\ \text{si } f(\frac{a+b}{2}).f(b) > 0 & \text{on pose } a_1 = a \text{ et } b_1 = \frac{a+b}{2} \end{array} \right.$

On remarque que dans les deux cas on a : $f(a_1).f(b_1) < 0$, en effet

$$\left. \begin{array}{l} f(a).f(\frac{a+b}{2}) > 0 \\ f(a).f(b) < 0 \end{array} \right\} \implies f(\frac{a+b}{2}).f(b) < 0$$

$$\left. \begin{array}{l} f(\frac{a+b}{2}).f(b) > 0 \\ f(a).f(b) < 0 \end{array} \right\} \implies f(\frac{a+b}{2}).f(a) < 0$$

Comme f est continue sur $[a, b] \implies f$ est continue sur $[a_1, b_1]$ car $([a_1, b_1] \subset [a, b])$.

On a donc $\left\{ \begin{array}{l} f(a_1).f(b_1) < 0 \\ b_1 - a_1 = \frac{b-a}{2} \end{array} \right.$

⁸S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

* Si $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = 0$ on prend $c = \frac{a_1+b_1}{2}$

** Si $f(\frac{a_1+b_1}{2}) \neq 0 \implies \begin{cases} f(\frac{a_1+b_1}{2}).f(a_1) > 0 & \text{on pose } a_2 = \frac{a_1+b_1}{2} \text{ et } b_2 = b_1 \\ f(\frac{a_1+b_1}{2}).f(b_1) > 0 & \text{on pose } a_2 = a_1 \text{ et } b_2 = \frac{a_1+b_1}{2} \end{cases}$

Dans les deux cas, on a encore : $f(a_2).f(b_2) < 0$ et $b_2 - a_2 = \frac{b_1-a_1}{2} = \frac{b-a}{2^2}$

En iterant ce procédé plusieurs fois, on obtient une suite de segment (dit emboîtés)

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_{n-1}, b_{n-1}] \supset [a_n, b_n] \cdots$$

avec

$$f(a_n).f(b_n) < 0 \text{ et } b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}.$$

De plus,

$(a_n)_n$ une suite croissante,

$(b_n)_n$ une suite décroissante

$$a_n \leq b_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n - a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{2^n} = 0.$$

Donc les suites $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont deux suites adjacentes.

Le théorème des segments emboîtés nous donne l'existence de l tel que :

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n] = \{l\}$$

et

$$\text{on a } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = l \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = l.$$

f étant continue $\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(l)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(b_n) = f(l)$

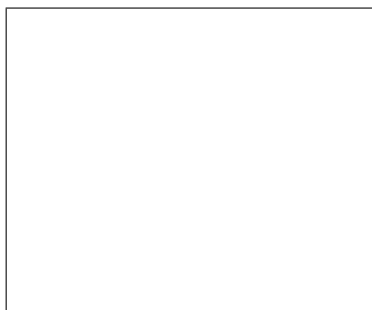
$\implies \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n).f(b_n) = f(l)^2 \geq 0$ or $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n).f(b_n) = f(l)^2 \leq 0$ d'où

$\implies f(l)^2 = 0 \implies f(l) = 0.$

Remarques :

1) Dans le Théorème des V.I., le point c n'est pas unique.

En effet pour $f(x) = \sin(x)$ dans $[0, 4\pi]$, on a :



$f(x) = \sin(x)$ dans $[0, 4\pi]$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{2}\right) < 0 ,$$

et

$$\sin(\pi) = 0, \sin(2\pi) = 0 \text{ et } \sin(3\pi) = 0.$$

2) Sous cette forme, le théorème des V.I. sert à localiser (encadrer) et à calculer une approximation d'une solution de l'équation $f(x) = 0$.

Exemple :

Soit l'équation $f(x) = x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$.

On a f est continue dans IR , $f(0) = -2$ et $f(1) = 3$ donc $f(0) \cdot f(1) < 0$.

Donc d'après le Th des V.I., il existe $c \in]0, 1[: f(c) = 0$.

Si on pose $\alpha_1 = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$, on a $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} < 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f(1) < 0$

Donc d'après le Th des V.I., il existe $c \in]\frac{1}{2}, 1[: f(c) = 0$.

Si on pose $\alpha_2 = \frac{\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{3}{4}$, on a $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{79}{64} > 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(\frac{3}{4}\right) < 0$.

Donc d'après le Th des V.I., il existe $c \in]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[: f(c) = 0$.

c est donc une approximation d'une solution dans $]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$ de $f(x) = 0$ avec une précision de 25% car $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0.25$

Théorème 4 :

Soient f une fonction définie et continue sur $[a, b]$ et β un nombre réel strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$ càd $f(a) < \beta < f(b)$ ou $f(b) < \beta < f(a)$.

Alors il existe au moins un point $\alpha \in]a, b[$ telque $f(\alpha) = \beta$.

Remarque :

Le théorème des V.I. doit son nom à cette version.

Preuve :

Soit g la fonction définie par $g(x) = f(x) - \beta$

g est une fonction continue sur $[a, b]$ et on a :

$$g(a) = f(a) - \beta, \quad g(b) = f(b) - \beta$$

$$g(a) \cdot g(b) = (f(a) - \beta) \cdot (f(b) - \beta)$$

comme β est strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$ on a $g(a) \cdot g(b) \leq 0$.

Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un nombre α compris entre a et b tel que :

$$g(\alpha) = 0 \implies f(\alpha) = \beta \text{ donc } \exists \alpha \in [a, b] \text{ telque } f(\alpha) = \beta.$$

Corollaire :

Si f est continue sur $[a, b]$. alors

$$1) \forall \beta \in [m, M] \exists \alpha \in [a, b] \text{ telque } f(\alpha) = \beta$$

2) f est surjective

Exemples :

$$1) \text{ Soit } f : x \in [-1, +1] \longmapsto |x| \in IR$$

On a f est continue dans $[-1, 1]$ et $f([-1, 1]) = [0, 1]$.

2) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \in]0, 1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On a f n'est pas continue en 0 et $f([0, 1]) = \{0\} \cup [1, +\infty[$.

Ainsi l'image de $[0, 1]$ par f n'est pas un intervalle car f n'est pas continue dans $[0, 1]$.

3) Soit $f : [-1, +1] \rightarrow \{0, 1\}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

On a $f([-1, +1]) = \{0, 1\}$ n'est pas un intervalle car f n'est pas continue dans $[-1, +1]$.

4) Fonctions Réciproques (ou inverses) ⁹

4.1) Rappels :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , on dit que :

f est strictement croissante $\iff x < y \implies f(x) < f(y)$

f est strictement décroissante $\iff x < y \implies f(x) > f(y)$

Remarques :

Si f est une fonction strictement croissante de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ alors

$$\forall x \in [a, b], a \leq x \leq b \implies f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

d'où $f(a)$ est le minimum ($f(a) = m$) et $f(b)$ est le maximum ($f(b) = M$).

Donc $[f(a), f(b)] = [m, M] = f[a, b]$.

De même si f est strictement décroissante de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, on a $[f(b), f(a)] = [m, M] = f[a, b]$.

Théorème :

f est une fonction continue et strictement croissante (resp. décroissante) sur un intervalle $[a, b]$,

alors f est une bijection de $[a, b]$ vers $[f(a), f(b)]$ (resp. $[f(b), f(a)]$).

Preuve :

Si f est une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a, b]$ alors, d'après le théorème des valeurs intermédiaires,

$$f([a, b]) = [f(a), f(b)],$$

$$\forall \beta \in [f(a), f(b)] \implies \exists \alpha \in [a, b] \text{ tel que } f(\alpha) = \beta$$

$$\implies f \text{ est surjective de } [a, b] \text{ dans } [f(a), f(b)]$$

et, de plus, puisque f est strictement croissante sur l'intervalle $[a, b]$, $\forall x, y \in [a, b]$,

$$x \neq y \implies \begin{cases} x < y \implies f(x) < f(y) \\ x > y \implies f(x) > f(y) \end{cases}$$

⁹S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

Donc, dans les deux cas, on a $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. i.e. f est donc injective dans $[a, b]$.

Conséquence :

Si f est une fonction continue strictement croissante (resp. strictement décroissante) de $[a, b] \longrightarrow [m, M]$

alors, f admet une bijection réciproque notée f^{-1} avec $f^{-1} : [m, M] \longrightarrow [a, b]$.

Théorème ¹⁰ :

Si f est une fonction continue et strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur un intervalle $[a, b]$, alors f admet une fonction réciproque f^{-1} continue et strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $[f(a), f(b)]$ (resp. $[f(b), f(a)]$) vers $[a, b]$.

Preuve :

Montrons que si f est une fonction strictement croissante sur $[a, b]$ alors f^{-1} l'est sur $[f(a), f(b)]$.

Soit $x, y \in [f(a), f(b)]$, a-t-on, $x < y \stackrel{?}{\Rightarrow} f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$

Démonstration par l'absurde.

Si pour tout $x, y \in [f(a), f(b)]$, on a $f^{-1}(x) \geq f^{-1}(y)$ alors (f est une fonction strictement croissante sur $[a, b]$) $f(f^{-1}(x)) \geq f(f^{-1}(y))$ i.e. $x \geq y$ ce qui contredit l'hypothèse $x < y$. Donc f^{-1} est strictement croissante.

Montrons que si f est une fonction continue sur $[a, b]$ alors f^{-1} l'est sur $[f(a), f(b)]$.

Soit $y_0 \in [f(a), f(b)]$, montrons que f^{-1} est continue en y_0 . Il faut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ telque } |y - y_0| < \eta \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)|$$

$y_0 \in [f(a), f(b)] \Rightarrow \exists x_0 \in [a, b] \text{ tel que } x_0 = f^{-1}(y_0)$.

Posons $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$ et $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$

f étant strictement croissante nous donne

Pour tout $x_0 \in]a, b[$ et $\forall \varepsilon > 0$, on a : $x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon$

Comme f étant strictement croissante dans $[a, b]$,

$x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon \Rightarrow f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon)$ i.e. $y_1 < y_0 < y_2$

D'autre part, $|y - y_0| < \eta \Leftrightarrow -\eta < y - y_0 < \eta \Leftrightarrow y_0 - \eta < y < y_0 + \eta$

Pour $\eta = \min \{y_0 - y_1, y_2 - y_0\}$, $|y - y_0| < \eta \Rightarrow y_0 + \eta < y_2$ et $y_1 < y_0 - \eta$

D'où : $y_1 < y_0 - \eta < y < y_0 + \eta < y_2$

$\Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_0 - \eta) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0 + \eta) < f^{-1}(y_2)$

$\Rightarrow x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y_0 - \eta) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0 + \eta) < x_0 + \varepsilon$

Or $x_0 = f^{-1}(y_0)$ d'où

$f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon \Rightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$.

Remarques :

i) Si $f : I \rightarrow J$ est une bijection et si $y \in J$ ne pas confondre $f^{-1}(y)$ avec $\frac{1}{f(y)}$.

ii) Si $f : I \rightarrow J$ est une bijection alors

¹⁰S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

$$* \forall x \in I, f^{-1} \circ f(x) = x$$

$$* \forall y \in J, f \circ f^{-1}(y) = y$$

* La notation $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = I$, où I la fonction identité, est une notation abusive. Donc à utiliser avec modération.

Graphes d'une fonction réciproque :

Dans un repère orthonormé le graphe de la fonction réciproque de f , f^{-1} , est symétrique par rapport à la première bissectrice (droite $y = x$) au graphe de la fonction f .

Théorème :

Si f admet pour dérivée $f'(x_0) \neq 0$ au point x_0 alors la fonction réciproque admet pour dérivée au point $x_0 = f^{-1}(y_0)$, $(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$.

Voir la preuve de ce théorème dans le chapitre sur les fonctions dérivables.

Exemple :

Si $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = x^2$ alors $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ est la fonction réciproque de $f(x) = x^2$.

Pour $y_0 = f(x_0)$

$$f'(x_0) = 2x_0 \implies (f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{2\sqrt{y_0}}.$$

4.2) Exemples de fonctions réciproques ¹¹.

1) La fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^x \in \mathbb{R}^+$ est une fonction continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$. La fonction réciproque est par édfinition la fonction $\log$ définie de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.

2) La fonction réciproque de la fonction $\sin$

La restriction à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ de la fonction $y = \sin(x)$ est une fonction continue et strictement croissante.

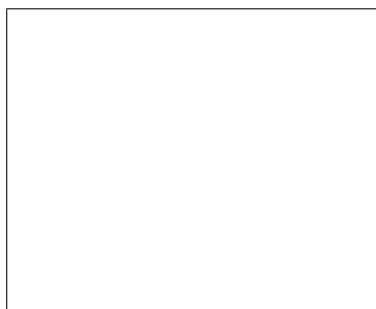
Elle admet donc une fonction réciproque continue et strictement croissante, noté Arcsin

$$\begin{aligned} \sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] &\longrightarrow [-1, 1] \\ \text{Arcsin} : [-1, 1] &\longrightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{aligned}$$

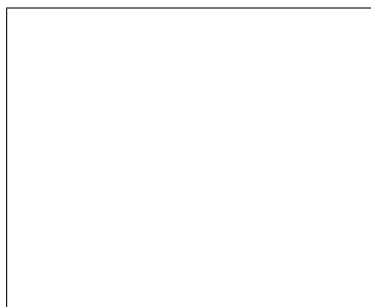
$\text{Arcsin}(x)$ est l'arc dont le sinus est x . C'est la fonction réciproque de la fonction $\sin$ lorsque celle ci est définie dans de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$. Elle est dite détermination principale.

$$\begin{aligned} x = \text{Arcsin}(y) &\iff y = \sin(x) \\ -1 \leq y \leq 1 &\iff -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

¹¹S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM



$\sin(x)$ dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$



$\text{Arcsin}(x)$ dans $[-1, 1]$

Propriété :

La fonction *Arcsin* est :

une fonction impaire

et $\forall y \in]-1, 1[, \text{Arcsin}(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$.

Preuve :

Parité :

$$\left. \begin{array}{l} x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \implies y = \sin(x) \\ -x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \implies -y = \sin(-x) \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} x = \arcsin(y) \\ -x = \arcsin(-y) \end{array}$$

d'où $\forall y \in]-1, 1[, \text{Arcsin}(y) = -\text{Arcsin}(-y)$.

Dérivée :

$$y' = \frac{1}{(\sin(y))'} = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3) La fonction réciproque de la fonction cos

La restriction à $[0, \pi]$ de la fonction $y = \cos(x)$ est une fonction continue strictement décroissante. Elle admet donc une fonction réciproque continue strictement décroissante, noté *Arccos*

$$\begin{array}{l} \cos : [0, \pi] \longrightarrow [-1, 1] \\ \text{Arc cos} : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi] \\ x = \text{Arc cos}(y) \iff y = \cos(x) \\ -1 \leq y \leq 1 \iff 0 \leq x \leq \pi \end{array}$$



$\cos(x)$ dans $[0, \pi]$



$\text{Arc cos}(x)$ dans $[-1, 1]$

Dérivée

$$y' = \frac{1}{(\cos(y))'} = \frac{1}{-\sin(y)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exemples ¹² :

1) Montrer que dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, $\text{Arc sin}(\sin(x)) = \pi - x$

Soit $f(x) = \text{Arc sin}(\sin(x))$

On a :

$$D_f = IR$$

$f(x)$ est periodique et de période 2π d'où l'étude sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

$$\text{si } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \implies \text{Arc sin}(\sin(x)) = x$$

$$\text{si } x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \implies -x \in [-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}] \implies \pi - x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sin(\pi - x) \implies \text{Arc sin}(\sin(x)) = \text{Arc sin}(\sin(\pi - x)) = \pi - x \\ &\implies \text{Arc sin}(\sin(x)) = \pi - x. \end{aligned}$$

2) Montrer que pour tout $x \in IR$, $\text{Arc cos}(x) + \text{Arc sin}(x) = \frac{\pi}{2}$.

Soit $g(x) = \text{Arc cos}(\cos(x))$

On a :

$$D_g = IR$$

g est une fonction paire $g(-x) = g(x)$.

g est periodique et de periode 2π d'où étude sur $[-\pi, \pi]$.

$$\forall x \in [-1, 1], \text{Arc sin}(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

$$\implies \forall x \in [-1, 1], \frac{\pi}{2} - \arcsin(x) \in [0, \pi]$$

$$\implies \forall x \in [-1, 1], \cos(\frac{\pi}{2} - \text{Arc sin}(x)) = \sin(\text{Arc sin}(x)) = x$$

$$\implies \forall x \in [-1, 1], \text{Arc cos}(\cos(\frac{\pi}{2} - \text{Arc sin}(x))) = \frac{\pi}{2} - \text{Arc sin}(x) = \text{Arc cos}(x)$$

$$\implies \forall x \in [-1, 1], \text{Arc cos}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arc sin}(x).$$

4) La fonction réciproque de $tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$,

La restriction à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ de la fonction $y = tg(x)$ est une fonction continue et strictement croissante de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ adns IR . Elle admet donc une fonction réciproque continue et strictement croissante de IR dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, noté $\text{Arctg}(x)$

¹²S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

$$\begin{aligned}
& tg :] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [\longrightarrow] - \infty, +\infty [\\
& Arctg(x) :] - \infty, +\infty [\longrightarrow] - \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [\\
& \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} tg(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} tg(x) = +\infty \\
& \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} tg(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} tg(x) = +\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x = Arctg(y) \\
-\infty \leq y \leq +\infty \quad (y \in IR) & \iff y = tg(x) \\
& -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Propriétés :

- 1) $y = Arctg(x)$ est une fonction impaire
- 2) et $Arctg(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
- 3) $Arctg(x) + Arctg(\frac{1}{x}) = \varepsilon \frac{\pi}{2} \begin{cases} \varepsilon = 1 \text{ si } x > 0 \\ \varepsilon = -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$

Preuve :

- 1) parité : $-y = -tg(-x)$ avec $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \implies Arctg(-x) = -y$
- 2) Dérivée : $y' = \frac{1}{tg'(y)} = \frac{1}{1+tg^2(y)} = \frac{1}{1+x^2}$
- 3)

$$\begin{aligned}
& x > 0 \implies \frac{1}{x} > 0 \implies Arctg(\frac{1}{x}) \in]0, \frac{\pi}{2}[\text{ et } tg(x) \in]0, \frac{\pi}{2}[\\
\implies & \begin{cases} \frac{\pi}{2} - Arctg(\frac{1}{x}) \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ tg(Arctg(x)) = x \\ tg(\frac{\pi}{2} - Arctg(\frac{1}{x})) = \cot g(Arctg(\frac{1}{x})) = \frac{1}{tg(Arctg(\frac{1}{x}))} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \end{cases}
\end{aligned}$$

d'où

$$tg(\frac{\pi}{2} - Arctg(\frac{1}{x})) = tg(Arctg(x)) = x \implies \frac{\pi}{2} - Arctg(\frac{1}{x}) = Arctg(x) \text{ (car tg est bijective)}$$

donc

$$Arctg(x) + Arctg(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2} \text{ si } x > 0.$$

Si $x < 0$ alors $-x > 0$

$$\begin{aligned}
& Arctg(-x) + Arctg(-\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2} \\
\implies & -Arctg(x) - Arctg(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2} \text{ car Arctg est impaire} \\
\implies & Arctg(x) + Arctg(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Exercices :

Ex 1 : Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$\begin{aligned}
& \text{a) } f(x) = \frac{x^2 + 4}{x^3 + x^2 + 2x} \quad , \quad \text{b) } g(x) = \sqrt{x(x-1)} \\
& \text{c) } f(x) = \frac{1}{1-|x|} \quad , \quad \text{d) } g(x) = \sqrt{6-|x-2|}
\end{aligned}$$

Ex 2 : Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)^2 - 1}{x} \quad , \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 + 2x - 3} \quad , \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6} \\ \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{9+x}}{x} \quad , \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2(x)}{1 + \cos(x)} \quad , \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\cos(x) \sin(x)} \end{aligned}$$

Ex 3 : Montrer que les fonctions $\frac{|x|}{x}$ et $\cos(\frac{1}{x})$ n'ont pas de limites lorsque x tend vers 0.

Ex 4 : Soit la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{2x} & \text{si } x < 0 \\ (x+c)^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Trouver le nombre c telle que la limite de f quand x tend vers 0 existe. quelle est dans ce cas cette limite.

Ex 5 : Montrer en utilisant la définition que

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4x + 7) = 3$$

Ex 6 : Pour la fonction dont le graphe est ci dessous trouver les limites si elles existent :

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \end{aligned}$$

Ex 7 : Comment définir $f(a)$ pour que la fonction f soit continue en a :

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad , \quad a = 1 \\ \text{b) } f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 1 \\ \sqrt{x+3} & x > 1 \end{cases} \quad a = 1 \\ \text{c) } f(x) = \frac{\cos^2(x) - 1}{\sin(x)} \quad , \quad a = 0 \end{aligned}$$

Ex 8 : Montrer que les équations suivantes admettent aux moins une solution réelle.

$$\begin{aligned} \text{a) } \frac{1}{2} \cos(x) - \frac{1}{(x+1)^2} = 0 \\ \text{b) } x^3 - 3x^2 + 15x - 7 = 0 \\ \text{c) } 1 + \sin(x) - x^2 = 0 \end{aligned}$$

Ex 9 : a) Montrer que si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe alors la limite est unique.

b) Montrer que si $f(x) \geq g(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \geq l$ (si cette limite existe)

Ex 10 : a) Soit la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ x - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Etudier le continuité de la fonction f .

b) même question pour la fonction

$$f(x) = \begin{cases} \exp(\frac{1}{x^2 - a^2}) & \text{si } |x| < a \\ 0 & \text{si } |x| \geq a \end{cases}$$

$a \in \mathbb{R}_+$

II - Dérivabilité et Théorèmes de Base associés ¹³ :

1) Définitions et Notations :

Définition :

Soit f une fonction définie au voisinage de $x_0 \in I$.

On dit que f est dérivable en x_0 , si le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite réelle lorsque $x \rightarrow x_0$. On écrit alors :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$f'(x_0)$ est appelée le nombre dérivée de f en x_0 ou la dérivée de f en x_0 .

Remarques :

i) Si on pose $x = x_0 + h$ alors $x \rightarrow x_0 \Leftrightarrow h \rightarrow 0$ et $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

ii) Si f est dérivable au point x_0 alors : $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \epsilon(h)$, avec $\epsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ en effet

on a $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \Rightarrow \epsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$

et si $\epsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

Propriété :

Si f est dérivable en x_0 alors f est alors f continue en x_0 .

Preuve :

Si f est dérivable en x_0 , alors

$$f(x_0 + h) - f(x) = h[f'(x_0) + \epsilon(h)] \text{ avec } \epsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x)] = \lim_{h \rightarrow 0} h[f'(x_0) + \epsilon(h)] = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x) \Rightarrow f \text{ est continue en } x_0$$

Remarque :

La réciproque de la propriété précédente est fausse.

En effet, la fonction $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais elle n'est pas dérivable au point 0

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ +1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

¹³S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$$

donc $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ n'admet pas de limite lorsque $x \rightarrow 0$

Interprétation géométrique ¹⁴ :

Soit $M_0 |_{f(x_0)}^{x_0}$ et $M |_{f(x)}^x$ deux points de la courbe représentative :

on a : $x - x_0 = \overline{M_0H}$ et $f(x) - f(x_0) = y - y_0 = \overline{MH}$

La fonction $g(x) = \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{\overline{MH}}{\overline{M_0H}}$ représente le coefficient directeur de la droite M_0M , $g(x)$ est la pente de la droite M_0M .

On dit que la droite M_0M de pente $g(x)$ tend vers une droite-limite de pente $f'(x_0)$.
C'est la tangente à la courbe au point M_0 .

Posons

$$x - x_0 = \Delta x : \text{ accroissement de la variable}$$

$$f(x) - f(x_0) = \Delta f(x) : \text{ accroissement de la fonction}$$

Il vient :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Equation de la tangente à la courbe au point $M_0 |_{f(x_0)}^{x_0}$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Définition : Dérivée à droite et dérivée à gauche

i) On dit que f est dérivable à gauche au point x_0 si

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ existe}$$

on note $f'(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ou $f'_g(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

ii) De même, on dit que f est dérivable à droite au point x_0 si :

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

iii) On dit que f est dérivable dans $[a, b]$ si f est dérivable pour tout point $x \in]a, b[$, f est dérivable à gauche au point b et si f est dérivable à droite de a .

Remarques :

i) si f est dérivable à droite et à gauche et si $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$ alors f est dérivable en x_0 .

On a : $f'(x_0^-) = f'(x_0^+) = f'(x_0)$

¹⁴S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

ii) f peut être dérivable à gauche et à droite de x_0 , sans l'être en x_0 en effet :
 Soit $f(x) = |x|$, on a $f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ et $f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$
 donc $f'(0^-) \neq f'(0^+) \Rightarrow f$ n'est pas dérivable en 0.

2) Opérations sur les dérivées ¹⁵ :

i) Opérations élémentaires :

Soient u, v des fonctions dérivables sur I

$(u + v)$ est dérivable sur I et on a $(u + v)' = u' + v'$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda u$ est dérivable sur I et on a $(\lambda u)' = \lambda u'$

(uv) est dérivable sur I et on a $(uv)' = u'v + v'u$

$\frac{u}{v}$, avec $v \neq 0$ sur I , est dérivable sur I et on a $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

ii) Dérivée logarithmique :

Soit f une fonction dérivable et non nulle sur I ,

On appelle dérivée logarithmique de f la fonction :

$$\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Dérivée logarithmique d'un produit de deux fonction :

On considère deux fonctions dérivables $u \neq 0$ et $v \neq 0$

$$\frac{(uv)'}{uv} = \frac{u'v + v'u}{uv} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$$

Dérivée logarithmique d'un quotient de deux fonctions :

$$\frac{\left(\frac{u}{v}\right)'}{\frac{u}{v}} = \frac{u'}{v} - \frac{v'}{u}$$

iii) Dérivée d'une fonction composée :

Soit f et g :

$$f : I \longrightarrow J$$

$$g : K \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ avec } J \subset K$$

Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et si g est dérivable en $y_0 = f(x_0) \in J$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a :

$$(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)] \times f'(x_0).$$

Preuve :

On a :

$$(g \circ f)(x_0 + h) - (g \circ f)(x_0) = g[f(x_0 + h)] - g[f(x_0)]$$

¹⁵S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

et f étant dérivable en x_0 , on a :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h[f'(x_0) + \epsilon(h)]$$

Donc

$$(g \circ f)(x_0 + h) - (g \circ f)(x_0) = g[f(x_0) + h[f'(x_0) + \epsilon(h)]] - g[f(x_0)]$$

puisque $h \longrightarrow 0 \Rightarrow k = h[f'(x_0) + \epsilon(h)] \longrightarrow 0$ et comme g dérivable en $f(x_0)$:

$$g[f(x_0) + k] = g[f(x_0)] + k[g'(f(x_0)) + \epsilon_2(k)]$$

avec $\epsilon_2(k) \longrightarrow 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x_0 + h) - (g \circ f)(x_0) &= g[f(x_0)] + k[g'(f(x_0)) + \epsilon_2(k)] - g[f(x_0)] \\ &= k[g'(f(x_0)) + \epsilon_2(k)] \\ &= h[f'(x_0) + \epsilon(h)][g'(f(x_0)) + \epsilon_2(k)] \\ &= hf'(x_0).g'(f(x_0)) + h\epsilon_3(h) \end{aligned}$$

$\epsilon_3(h) \longrightarrow 0 \Rightarrow$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g \circ f(x_0 + h) - g \circ f(x_0)}{h} = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$$

iii) Dérivée d'une fonction réciproque :

Soit f une fonction définie continue et strictement monotone sur $[a, b]$ et g la fonction réciproque de f .

Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, alors

i) g est dérivable en $y_0 = f(x_0)$

ii) et on a : $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ i.e. $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$ et $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Preuve :

$$x_0 = g(y_0) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$$

$$x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x)$$

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

$$g'(y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

iv) Dérivées successives :

Définition :

Soit f une fonction dérivable sur I , $f' : x \mapsto f'(x)$

Si f' est dérivable, f'' dérivée de f' s'appelle la dérivée seconde de f .

D'une façon générale, la dérivée $n^{\text{ème}}$ de f dite dérivée d'ordre n , sera définie par la formule de recurrence :

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})', \forall n \geq 0 \text{ avec } f^{(0)} = f.$$

Exemples :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\sin^n(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \\ f'(x) &= \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \\ f''(x) &= -\sin x = \sin(x + \frac{2\pi}{2}) \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= \sin(x + \frac{n\pi}{2}) \end{aligned}$$

2) Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^h$, avec $h \in \mathbb{N}$ alors,

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f^{(n)}(x) = h(h-1)(h-2) \cdots (h-n+1)x^{h-n}$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^h, h \in \mathbb{N} \\ f'(x) &= hx^{h-1} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= h(h-1)(h-2) \cdots (h-n+1)x^{h-n} \end{aligned}$$

Si $n = h \longrightarrow f^{(h)}(x) = h!$ et $f^{(p)}(x) \equiv 0, \forall p > h$.

3) **pour tout** $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$.

iv) Formule de Leibniz :

Soient u et v deux fonctions n fois dérivables sur I

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + \cdots + u.v^{(n)}$$

on écrit :

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$$

Propriété ¹⁶ :

i) Si f est dérivable et impaire $\Rightarrow f'$ est paire.

En effet

$$\begin{aligned} (-x) = -f(x) &\Rightarrow (f(-x))' = -(f(x))' \\ &\Rightarrow (f(-x))' \times -1 = -(f(x))' \Rightarrow (f(-x))' = (f(x))'. \end{aligned}$$

ii) Si f est dérivable et paire $\Rightarrow f'$ est impaire.

En effet

$$\begin{aligned} f(-x) = f(x) &\Rightarrow (f(-x))' = (f(x))' \\ &\Rightarrow -(f(-x))' = f(x)' \end{aligned}$$

v) Changement de variable :

Soit f une fonction dérivable sur $[a, b]$. et φ une fonction dérivable sur $[\alpha, \beta]$. On pose $x = \varphi(t)$ avec $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ et $[\varphi(\alpha), \varphi(\beta)] \subset [a, b]$

$F(t) = f(\varphi(t))$ est alors dérivable sur $[\alpha, \beta]$, d'après le théorème de la dérivée d'une fonction composée :

¹⁶S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

$$F'(t) = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f'(x) \cdot \varphi'(t).$$

$F(t)$ est donc différentiable sur $[\alpha, \beta]$ et admet pour différentielle :

$$dF(t) = f'(x) \cdot \varphi'(t) dt$$

On dit que $dF(t)$ est la différentielle de y par rapport à t .

3) Différentielle ¹⁷ :

Définition :

Soit f une fonction dérivable en x_0 , on appelle différentielle de f en x_0 , l'application linéaire définie par :

$$df_{x_0} : h \longrightarrow f'(x_0) \times h$$

Exemple :

Si $f : x \in IR \mapsto x \Rightarrow \forall x_0 \in IR, f'(x_0) = 1 \Rightarrow dx_{x_0} : h \mapsto h$.

Pour tout f on a $df_{x_0} = f'(x_0).dx$

et pour tout x on a $df = f'(x).dx \Rightarrow f'(x) = \frac{df}{dx}$

Interpretation géométrique :

Soit $M_0 \mid_{f(x_0)}^{x_0}$ et $M \mid_{f(x_0+dx)}^{x_0+dx}$, $P \in$ la tangente $P \mid_{f(x_0+dx)}^{x_0+dx}$, $H \mid_{f(x_0)}^{x_0+dx}$, dans le triangle M_0HP on a :

$$\frac{\overline{HP}}{\overline{M_0H}} = f'(x_0) \Rightarrow \overline{HP} = f'(x_0)\overline{M_0H} = f'(x_0)dx = df_{x_0}$$

Remarque :

i) $\overline{HP} = f'(x_0)dx = df_{x_0}$

ii) $\overline{HM} = \Delta y$ et lorsque $x \rightarrow x_0 \quad \Delta y \rightarrow df_{x_0}$

iii) l'accroissement Δy de la fonction est : $\Delta y = f(x_0 + dx) - f(x_0) = \overline{HM}$

iv) Ne pas confondre Δy et dy . En effet, d'après la définition de la dérivée :

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = f'(x_0) + \epsilon(x - x_0)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{x_0 + dx - x_0} = f'(x_0) + \epsilon(dx)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{dx} = f'(x_0) + \epsilon(dx) \Rightarrow \Delta y = dx(f'(x_0) + \epsilon(dx))$$

$$\Rightarrow \Delta y = dy + dx \cdot \epsilon(dx)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{\epsilon(dx)}{f'(x_0)}$$

¹⁷S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

si $dx \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\Delta y}{dy} \rightarrow 1 \Rightarrow \Delta y \rightarrow dy$.

Opération sur les différentielles :

Si la fonction f est dérivable dans I , elle admet une différentielle pour tout $x \in I$ et $df = f'(x)dx$

i) $d(u + v) = du + dv$

ii) $d(u.v) = v.du + u.dv$

iii) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u.dv}{v^2}$

Exemple :

1) $d(x^2) = d(x.x) = x.dx + x.dx = 2x dx$

2) $d(x \arccos x) = \arccos x . dx - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left(\arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$
donc $(x \arccos x)' = \arccos x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

4) Théorème de Rolle (variantes) et Application ¹⁸ :

Théorème de Rolle :

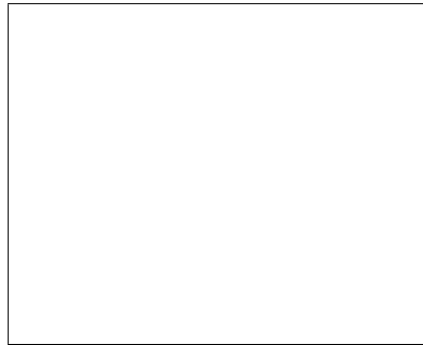
Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ vérifiant $f(a) = f(b)$.

Alors il existe au moins une valeur $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarques :

i) Si $f'(c) = 0$, la tangente à la courbe au point $M(c, f(c))$ est horizontale.

ii) Le théorème de Rolle affirme qu'il existe au moins un point $M(c, f(c))$ de la courbe distinct des points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ en lequel la tangente à la courbe est horizontale.



$$f(x) = \sin(x) + 1 \text{ dans } [\pi, 3\pi]$$

iii) La condition $f(a) = f(b)$ est suffisante mais pas nécessaire.

Exemple : Soit $f(x) : x \in [-1, 1] \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$. On a : $f(-1) \neq f(1)$ mais $f'(0) = 0$

Preuve du théorème

i) Si f est une fonction constante alors $f'(x) = 0 \quad \forall x \in]a, b[$ alors $\forall x \in]a, b[, x$ répond à la question.

¹⁸S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

ii) Si f n'est pas constante sur $]a, b[$, f étant continue alors $f([a, b]) = [m, M]$ avec

$$M = \sup_{x \in [a, b]} f(x), \quad m = \inf_{x \in [a, b]} f(x)$$

puisque $f(a) = f(b)$ et $m \neq M$ alors l'une des valeurs m ou M est atteinte sur l'intervalle ouvert $]a, b[$, supposons qu'il s'agit de M alors il existe au moins (théorème des valeurs intermédiaires) $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = M$

Soit $x \in]a, b[$ considérons le rapport $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$

$$\text{si } x > c \quad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c^+) \leq 0$$

$$\text{si } x < c \quad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c^-) \geq 0$$

f étant dérivable sur $]a, b[$ et $c \in]a, b[$ alors $f'(c^+) = f'(c^-) = f'(c)$ comme :

$$\left. \begin{array}{l} f'(c) \geq 0 \\ f'(c) \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(c) = 0$$

Généralisation : Extension du théorème de Rolle

Soit f une fonction continue et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$ vérifiant

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty \text{ (ou } -\infty)$$

Alors il existe au moins une valeur $c \in]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = 0$$

Théorème des accroissements finis (on note Th des A.F.)¹⁹ :

Soit f une fonction définie, continue sur un $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$

Alors il existe au moins une valeur $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) \text{ avec } a < c < b$$

C'est la formule des accroissements finis

Remarque :

1) Le Théorème des accroissements finis est aussi dit Théorème de Lagrange ou Théorème de la moyenne.

2) La formule $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$ avec $a < c < b$ est appelée Formule des accroissements finis.

Interprétation géométrique :

¹⁹S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

Soit $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ deux points du plan, on a :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \text{ pente de } AB$$

Le théorème des accroissements finis affirme l'existence d'au moins un point $M(c, f(c))$ de la courbe C_f distinct de $A(a, f(a))$ et de $B(b, f(b))$ en lequel la tangente à la courbe est parallèle à la pente AB .

Preuve de la formule des accroissements finis

Hypothèse : f Continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Soit la fonction

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$$

φ est définie, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$

Le Théorème de Rolle appliqué à $\varphi \Rightarrow \exists c \in]a, b[$ tel que : $\varphi'(c) = 0$

On a $\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ donc $\varphi'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$
 $\Rightarrow f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$

Autre forme de la formule des accroissements finis

On a $c \in]a, b[$ i.e. $a < c < b \Rightarrow 0 < c - a < b - a$

$\Rightarrow 0 < \frac{c - a}{b - a} < 1 \Rightarrow$ on peut trouver $\theta \in]0, 1[$ tel que

$$\frac{c - a}{b - a} = \theta \Rightarrow c = a + \theta(b - a)$$

Si on pose $b - a = h \Rightarrow c = a + \theta h$ et la formule des accroissements finis s'écrit

$$f(a + h) = f(a) + hf'(a + \theta h) \text{ avec } 0 < \theta < 1$$

Forme générale de la formule des accroissements finis ²⁰ :

Soit f et g deux fonction vérifiant les hypothèse du théorème des accroissements finis sur $[a, b]$ et g' non nulle sur $]a, b[$.

Alors il existe au moins une valeur $c \in]a, b[$ tel que :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Remarque : $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow g'(c)[f(b) - f(a)] - gf'(c)[g(b) - g(a)] = 0$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} f(b) - f(a) & f'(c) \\ g(b) - g(a) & g'(c) \end{pmatrix} = 0$$

²⁰S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

Preuve :

On a : $g(b) \neq g(a)$ (sinon théorème de Rolle $\Rightarrow \exists c \in]a, b[$ tel que : $g'(c) = 0$ contradiction avec g' non nulle sur $]a, b[$).

Soit $\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x) - g(a)]$

φ est définie, continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ et $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$

Donc d'après le théorème de Rolle $\Rightarrow \exists c \in]a, b[$ tel que : $\varphi'(c) = 0$.

On a : $\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$ donc $\varphi'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Exemple :

1) Montrer que si $0 < a < b$ alors $\frac{b-a}{1+b^2} < \text{Arctg}(b) - \text{Arctg}(a) < \frac{b-a}{1+a^2}$

2) En deduire que :

$$\frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} < \text{Arctg}\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6}$$

1) On applique le théorème des accroissements finis pour la fonction :

$f(x) = \text{Arctg}(x)$ dans $[a, b]$

$\exists c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \text{Arctg}(b) - \text{Arctg}(a) = (b - a)\frac{1}{1+c^2}, c \in]a, b[$

$c \in]a, b[\Rightarrow 0 < a < c < b \Rightarrow a^2 < c^2 < b^2 \Rightarrow 1 + a^2 < 1 + c^2, 1 + b^2 > 1 + c^2$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+a^2} &> \frac{1}{1+c^2}, \frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+c^2} \\ \Rightarrow \frac{b-a}{1+b^2} &< \text{Arctg}(b) - \text{Arctg}(a) < \frac{b-a}{1+a^2} \end{aligned}$$

2) On pose

$$\begin{aligned} b = \frac{4}{3}, a = 1 &\Rightarrow \text{Arctg}(a) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \\ \frac{\pi}{4} + \frac{\frac{4}{3}-1}{1+(\frac{4}{3})^2} &< \text{Arctg}\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{\pi}{4} + \frac{\frac{4}{3}-1}{2} \\ \frac{\pi}{4} + \frac{3}{25} &< \text{Arctg}\left(\frac{4}{3}\right) < \frac{\pi}{4} + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Corollaire :

i) Pour qu'une fonction f soit constante sur un intervalle I , il faut et il suffit qu'elle ait une dérivée nulle sur I .

ii) Pour qu'une fonction f dérivable sur un intervalle I , soit croissante (resp décroissante) sur I il faut et il suffit que $f' \geq 0$ (resp $f' \leq 0$) sur I .

iii) Soit f une fonction définie, continue, dérivable sur un intervalle I si $f' > 0$ (resp $f' < 0$) sur I alors f est strictement croissante (resp décroissante).

Remarque : La réciproque de iii) est fausse.

En effet soit $f : x \in [-1, 1] \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$.

On a $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$ f est strictement croissante malgré que $f'(0) = 0$.

Preuve

i) $f = cte \Rightarrow f' = 0$ sur I .

si $f' = 0$ sur $I \Rightarrow f$ cte sur I ?

$(x_1, x_2) \in I^2$, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$?

$x_1 < x_2$ et on considère $[x_1, x_2]$, f définie, continue sur $[x_1, x_2]$ dérivable sur $]x_1, x_2[$ donc d'après le théorème accroissements finis, $\exists$ au moins une valeur $c \in]x_1, x_2[$ tel que :

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

ii) f croissante sur $I \Leftrightarrow x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow$

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0 \Rightarrow \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x_1) \geq 0$$

Réciproque : $f' \geq 0 \Rightarrow f$ croissante sur I

$(x_1, x_2) \in I^2$, $x_1 \neq x_2$. On prend $x_1 < x_2$ et on considère $[x_1, x_2]$, on a f définie, continue sur $[x_1, x_2]$ dérivable sur $]x_1, x_2[$, donc d'après le théorème des accroissements finis, au moins une valeur $c \in]x_1, x_2[$ tel que :

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c)$$

Or $f'(c) \geq 0$ $x_2 - x_1 > 0$, donc $(x_2 - x_1)f'(c) \geq 0 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ et f est croissante sur I .

Théorème de l'Hospital (Règle de l'Hospital) ²¹ :

Si f et g sont deux fonctions définies, continues, et dérivables au voisinage d'un point a , sauf peut être a et si f' et g' n'ont pas de zéro commun au voisinage de a alors

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = l \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty &\Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \infty \\ \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \text{n'existe pas} &\Rightarrow \text{on ne peut pas conclure} \end{aligned}$$

Remarque : Le règle de l'Hospital est due à Bernoulli.

Preuve :

On applique le théorème des accroissements finis généralisé sur l'intervalle $[a, x]$, il existe au moins $c \in]a, x[$ tel que : $\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ puisque $c \in]a, x[$ si $x \rightarrow a$ alors $c \rightarrow a$ et

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemple : Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.

On a une forme indéterminé de la forme $\frac{0}{0}$.

En effet

$$f(x) = \sin x - x \Rightarrow f(0) = 0$$

²¹S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

$$g(x) = x^3 \Rightarrow g(0) = 0$$

$$\frac{f(x) - f(0)}{g(x) - g(0)} = \frac{\sin x - x}{x^3}$$

$$f'(x) = \cos x - 1 \text{ et } g'(x) = 3x^2 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2}$$

Appliquons une deuxième fois la règle de l'hospital :

$$f'(x) = \cos x - 1 \Rightarrow f'(0) = 0$$

$$g'(x) = 3x^2 \Rightarrow g'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\sin x \text{ et } g''(x) = -6x.$$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{-6} = -\frac{1}{6} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{-6x} = -\frac{1}{6} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = -\frac{1}{6} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}.$$

Remarque : Dans la mesure du possible, éviter d'écrire :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{6} = -\frac{1}{6}.$$

Attention ²² :

Avant d'appliquer la règle de l'Hospital, il faut vérifier toujours les hypothèses.

On reviendra en détails dans le prochain chapitre sur les avantages et inconvénients de la règle de l'Hospital dans du calcul de limites.

La règle de l'Hospital permet de résoudre un très grand nombre de Formes Indéterminées (toutes celles de la forme $\frac{0}{0}, \frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ et toutes celles qui s'y ramènent). Mais elle a quelques inconvénients :

1 - Avant de l'appliquer, il faut savoir si l'on est dans des cas d'application de cette règle ou de ses généralisations.

2 - Il faut calculer des dérivées de fonctions

3 - Son utilisation demande parfois des astuces dans la façon d'écrire le quotient et il peut être nécessaire de transformer ce quotient avant de lui appliquer cette règle.

4 - Elle ne marche toujours pas

L'étude de $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin(\frac{1}{x})$ ne se fait pas par la règle de l'Hospital.

Cependant, $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin(x) \leq 1$ donc $\forall x \in \mathbb{R}^*, -x^2 \leq x^2 \sin(\frac{1}{x}) \leq x^2$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin(\frac{1}{x}) = 0$.

²²S. EL HAJJI et S. HAKAM SMI & SM

EX 1 : Calculer les limites suivantes :

- 1) Quand $x \longrightarrow \pm\infty$ de $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x + 2}{x+3}$
- 2) Quand $x \longrightarrow \pm\infty$ de $g(x) = \sqrt{x^2+x+1} - a.x$ a un paramètre réel fixé.
- 3) Quand $x \longrightarrow 1\infty$ de $h(x) = \frac{x^{1/3} - 1}{x - 1}$
- 4) Quand $x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ de $U(x) = \frac{1}{\cos(x)} - \operatorname{tg}(x)$
- 5) Quand $x \longrightarrow a$ de $V(x) = (a^2 - x^2)\operatorname{tg}(\frac{\pi x}{2.a})$

EX 2 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. La définition de la limite de $\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = L$ **est supposée connue** dans les 16 cas potentiels; L et x_0 pouvant prendre indépendamment l'un de l'autre une valeur finie, $\pm\infty$ ou ∞

a) Etablir l'équivalence suivante :

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = L \iff \begin{cases} \text{Pour toute suite } \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ convergente vers } x_0, \\ \text{la suite } \{f(x_n)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ est convergente vers } L \end{cases}$$

On se bornera au cas $(x_0, L) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

b) Montrer que la fonction $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite lorsque $x \longrightarrow 0$.

EX 3 : $a \in \mathbb{R}$, on considère la fonction de la variable réelle x définie par :

$$f : x \longrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} \sqrt{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Comment choisir a pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$?

On suppose $a = 0$, montrer que f est strictement monotone et déterminer sa fonction réciproque f^{-1} .

Ex 4 : Sur le segment $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, on considère la fonction f définie par

$$f : x \longrightarrow f(x) = \begin{cases} \sin(x) + \frac{\sqrt{1 - \cos^2(x)}}{\sin(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ \sqrt{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Cette fonction est-elle continue pour $x = 0$?

Ex 5 : Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g : x \longrightarrow g(x) = \begin{cases} x^p \sin(\frac{1}{x^q}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- 1) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.
- 2) Montrer que pour $p \geq 2$, g possède une dérivée en tout point de $\mathbb{R}$. en est-il de même pour $p = 1$?
- 3) Qu'elle relation doit-il y avoir entre p ($p > 2$) et q pour que la dérivée de g soit continue sur $\mathbb{R}$?

Ex 6 : $k \in \mathbb{R}_+^*$. Soit f une fonction de la variable réelle à valeurs réelles définie sur l'intervalle $[a, b]$ tel que $0 < a < b$ et vérifiant la propriété :

$$x \neq x' \quad (x, x') \in [a, b] \times [a, b] \implies |f(x) - f(x')| < k|x^3 - x'^3|$$

- 1) Montrer que f est continue (même uniformément continue) sur $[a, b]$.
- 2) Montrer que l'on a $|f(x) - f(x')| < 3kb^2|x - x'|$ et conclure que f est uniformément continue car $3kb^2$ -lipschitzienne sur $[a, b]$.
- 3) On définit la fonction Φ sur $[a, b]$ par $\Phi(x) = f(x) - kx^3$. Montrer que Φ est strictement monotone.
- 4) On suppose que $\forall x \in [a, b], ka^3 \leq f(x) \leq kb^3$.
 - a) En déduire qu'il existe un nombre unique $\theta \in [a, b]$ tel que $\Phi(\theta) = 0$.
 - b) On prend $x_0 = c \in [a, b]$. Vérifier que la relation $x_{n+1} = \left(\frac{1}{k}f(x)\right)^{1/3}$ définit une suite de points de $[a, b]$. Montrer que la suite $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_n = |x_n^3 - \theta^3|$ est décroissante. en déduire qu'elle est convergente.

Ex 7 : Soit n un entier naturel $n > 2$ et f_n la fonction polynomiale suivante

$$f_n : x \in [0, 1] \longrightarrow f_n(x) = x^n - 5x + 1 \in \mathbb{R}$$

Montrer que f_n admet une racine unique notée a_n dans $[0, 1]$.

Etudier la suite $\{a_n\}_{n > 2}$ (monotonie, convergence, etc ...)

Dans les deux exercices suivants, se rappellera de la propriété suivante de $\mathbb{R}$ vue dans le cours : «**Tout intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ avec $a < b$ contient une infinité de nombres rationnels et une infinité de nombres irrationnels.**»

de laquelle, on peut déduire sans difficulté que :

«**Tout nombre réel x est limite d'une suite de rationnels $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et d'une suite d'irrationnels $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$** »

Ex 8 : Fonction caractéristique de $\mathbb{Q}$

$$\text{Soit } f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Montrer que f est partout discontinue.

Ex 9 : Soit f la fonction de la variable réelle x à valeur dans $\mathbb{R}$

$$f : x \in \mathbb{R} \longrightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \text{ est non nul irréductible } q > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \text{ est irrationnel.} \end{cases}$$

Montrer que f est continue en tout point irrationnel et discontinue ailleurs.

EX 10 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

f est-elle continue ? Dérivable ? De classe C^1 ?

EX 11 : Soit f une fonction dont la courbe représentative passe par le point $(1, \sqrt{3})$ et admet une tangente au point d'abscisse 1. On suppose que cette tangente passe par le point $(2, 2\sqrt{3})$.

a) Déterminer $f'(1)$.

b) On suppose que f admet une fonction réciproque f^{-1} noté g , déterminer alors $g(\sqrt{3})$.

EX 12 : Soit la fonction définie par : $f(x) = x^3 - 3a^2x + b$ où a et b sont des constantes réelles avec $a > 0$.

a) En utilisant le théorème de Rolle et en raisonnant par l'absurde, montrer que f s'annule au plus une fois sur l'intervalle $[-a, a]$.

b) Déterminer les valeurs de b pour lesquelles f s'annule.

Ex 13 :

a) En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $f(x) = \log(x)$ sur l'intervalle $[n, n+1]$ où n est un entier naturel vérifiant $n > 0$, montrer que

$$\frac{1}{n+1} < \log(n+1) - \log(n) < \frac{1}{n}$$

b) On définit la suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ de nombres réels en posant

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log(n)$$

Montrer que la suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement monotone. En déduire qu'elle est convergente et que si $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$, on a $0 \leq \gamma < 1$ (γ s'appelle la constante d'Euler-Mascheroni, on ignore encore si elle est rationnelle ou non).

Ex 14 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ pour $x > 1$.

1) Montrer que $f(x) - 2 = (x - 1) \left(1 + \frac{1}{c}\right)^c \log(1 + c) - \log(c) - \frac{1}{1 + c}$ pour un certain c vérifiant $1 < c < x$.

2) Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction $\log$ pour montrer que $\log(1 + y) - \log(y) \geq \frac{1}{1 + y}$ pour $y > 0$. En déduire que $f(x) \geq 2$ pour tout $x \geq 1$.

3) On définit la suite $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ par $v_n = \frac{n!}{n^n}$ pour $n \geq 1$.

a) Utiliser le raisonnement par récurrence pour montrer $v_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ pour tout $n \geq 1$ (On remarquera d'après 2) que $f(n) \geq 2$ pour tout $n \geq 1$).

b) Etudier la monotonie de la suite $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ et conclure si elle est convergente ou divergente.

c) Calculer la limite de cette suite en justifiant votre réponse.

Ex 15 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longrightarrow \log(\log(k))$ et $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \log(k)}$.

En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction f sur l'intervalle $[k, k + 1]$, où k est un entier strictement supérieur à 1, montrer que la suite $\{S_n\}_{n > 1}$ est divergente.

Ex 16 : Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + t}}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n^2}\right) - 1$.

1) Vérifier que f' est décroissante et continue sur $\mathbb{R}^+$.

2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : \frac{n + 1}{2n} f'(0) \leq S_n \leq \frac{n + 1}{2n} f'(1)$. (indication : On appliquera le théorème des accroissements finis.)

3) En déduire que la suite $\{S_n\}_{n \geq 1}$ converge et calculer sa limite.

Ex 17 : Soit f une fonction réelle définie sur $[a, b]$. on dit que f est lipschitzienne s'il existe un réel k tel que : $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$ où x et y sont des éléments quelconques de $[a, b]$.

Soit f une fonction dérivable et lipschitzienne sur $[a, b]$. Montrer que f' est bornée sur $[a, b]$.

Ex 18 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie de la façon suivante :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \sin\left(\frac{\pi}{\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}\right) & \text{si } x \neq 0 \text{ et } x \neq \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ et } x = \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

1) Déterminer l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^+$ où f est continue.

2) Montrer que f est dérivable en 0 et en tout points $x \neq \frac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{h \rightarrow 0, h \neq 0} \frac{\left(\frac{1}{n} + h\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{\frac{1}{n} + h}\right)}{h} = (-1)^{n+1} \pi$$

4) En déduire que f n'est pas dérivable aux points $x = \frac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Saïd EL HAJJI

Université Mohammed V - Agdal

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et Informatique

Groupe d'Analyse Numérique et Optimisation

Avenue Ibn Batouta, B.P. 1014

Rabat, Maroc

Tel et fax +(37)775471

Email : elhajji@fsr.ac.ma

Page web : [http ://www.fsr.ac.ma/LMC](http://www.fsr.ac.ma/LMC)