Université Mohammed V - Agdal
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique
Avenue Ibn Batouta, B.P. 1014
Rabat, Maroc

Filière DEUG :

Sciences Mathématiques et Informatique (SMI)
et
Sciences Mathématiques (SM)

Module Mathématiques I

NOTES DE COURS D'ANALYSE I

Chapitre II : Fonctions réelles à une variable réelle

Par

Saïd EL HAJJI
Email : elhajji@fsr.ac.ma

&

Touria GHEMIRES
Email ghemires:@fsr.ac.ma

Groupe d'Analyse Numérique et Optimisation
Page web : http://www.fsr.ac.ma/ANO/

Année 2005-2006

TABLE DES MATIERES

Chapitre 1

Fonctions réelles à une variable réelle et théorèmes de base

On suppose $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle d'une variable réelle et de domaine de définition $D_f \subset \mathbb{R}$.

On rappelle que $f(D_f) = \{y \in \mathbb{R}, \exists x \in D_f \; avec \; y = f(x)\}$est l'image de D_f par f.

1.1 Rappels

Définition (Graphe d'une fonction): On appelle graphe de f, l'ensemble des couples $(x, f(x))$ où $x \in D_f$.

Dans un plan rapporté à un repère $(o, \vec{i}, \vec{j})$ (généralement orthonormé). Les points $M(x, f(x))$ avec $x \in D_f$ constituent la courbe représentative de f, noté $C_f = \{M(x, f(x)) : x \in D_f\}$.

Définition (Périodicité):

f est dite périodique s'il existe $T > 0$ tel que:

$i) \forall x \in D_f, (x + T) \in D_f$

$ii) f(x) = f(x + T)$

On dit que T est une période de f.

Remarque :

Si f est de période T alors $\forall n \in \mathbb{N} : (x + nT) \in D_f, \; f(x + nT) = f(x)$

Définition (Parité) : *On suppose que D_f admet 0 pour centre de symétrie*

i) f est dite paire si $\forall x \in D_f.$, $(-x) \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$

ii) f est dite impaire si $\forall x \in D_f.$, $(-x) \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

Définition (axe de symétrie):

i) On dit que la fonction f est symétrique par rapport à l'axe vertical $x = a$, si:

$$\forall x \in D_f, \; (a - x) \in D_f, (a + x) \in D_f, \text{ et } f(a - x) = f(a + x).$$

ii) On dit que la fonction f est symétrique par rapport au point $M\,(a, f(a))$, si:

$$\forall x \in D_f, \; (a - x) \in D_f, (a + x) \in D_f \text{ et } f(a + x) + f(a - x) = 2f(a).$$

Remarque :

Si la fonction f est paire, impaire, périodique ou possède un axe ou un point de symétrie, on peut réduire le domaine de définition de f à un domaine plus petit.

[1]S. EL HAJJI et T. GHEMIRES

Exemple :

Soit $f(x) = \sin(x)$. On a $D_f = \mathbb{R}$,

f est périodique et de période $2\pi \Rightarrow D_E = [-\pi, \pi]$.

f est impaire, donc le domaine d'étude de f se ramène à $D_E = [0, \pi]$

Définition (Fonctions bornées) :

i) f est dite majorée (resp. minorée) si$f(D_f)$ est une partie majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$

ii) f est dite bornée si $f(D_f)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$

Exemples:

1) $f(x) = \sin(x)$; f est bornée car $\forall x \in \mathbb{R} : -1 \leq f(x) \leq 1$

2) $f(x) = e^x$ est non bornée, mais elle est minorée par 0 : $.car\ \forall\ x \in \mathbb{R}, 0 \leq e^x$.

Remarque:

L'image d'une partie bornée par une application n'est pas forcément bornée.

En effet si on prend : $f(x) = \frac{1}{x}$,si $x \in]0, 1]$

on a $f :]0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mais $f(]0, 1])$ n'est pas bornée.

1.2 Limites

1.2.1 Définition et propriétés

Pour $x_0 \in \mathbb{R}$, un intervalle ouvert de la forme $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$, où $\alpha > 0$,est appelé voisinage de x_0.Un voisinage de x_0 sera noté $\mathcal{V}(x_0)$. Dans toute la suite on suppose queD_f contient un voisinage de x_0, sauf éventuellement x_0(c'est à dire: $\mathcal{V}(x_0) \backslash \{x_0\} \subset D_f$).

Définition.

On dit que f possède une limite l au point x_0,si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta_\varepsilon > 0; \forall x \in \mathcal{V}(x_0) \backslash \{x_0\}, |x - x_0| < \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

On écrit alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ ou $f(x) \underset{x \to x_0}{\to} l$.

Remarque: D'après la définition on a:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow (\forall \mathcal{V}(l)$ voisinage de l, $\exists \mathcal{V}(x_0)$ voisinagede x_0 tel que:$x \in \mathcal{V}(x_0) \backslash \{x_0\} \Longrightarrow f(x) \in \mathcal{V}(l))$

Théorème 1: (Unicité de la limite): S'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$, alors l est unique.

Démonstration:

Supposons que $l_1 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ et $l_2 = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ avec $l_1 \neq l_2$.

Soit ε tel que: $0 < \varepsilon < \frac{|l_1 - l_2|}{2}$; d'après la défiunition de la limite $\exists \eta_\varepsilon > 0$ tel que:

$\forall x \in \mathcal{V}(x_0) \setminus \{x_0\}, |x - x_0| < \eta_\varepsilon \Longrightarrow (|f(x) - l_1| < \varepsilon$ et $|f(x) - l_2| < \varepsilon)$

$\Longrightarrow |l_1 - l_2| \leq |l_1 - f(x)| + |f(x) - l_2| < 2\varepsilon = |l_1 - l_2|$; d'où la contradiction et alors $l_1 = l_2$.

Proposition 1

Si f admet une limite l en x_0 alors f est bornée au voisinage de x_0

Proposition 2 (lien entre suite et limite)On a l'équivalence suivante:

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = l}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\text{pour toute suite}(u_n)_n \subset \mathcal{V}(x_0) \backslash \{x_0\} \text{qui converge vers } x_0, \text{on a : } \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = l}$$

Démonstration:

$\Rightarrow$) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\eta_\varepsilon > 0; \forall x \in \mathcal{V}(x_0)\backslash\{x_0\}, |x - x_0| < \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$ et $\eta_\varepsilon > 0 \Longrightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|u_n - x_0| < \eta_\varepsilon$.

Donc on a: $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$,$\forall n \geq N, |f(u_n) - l| < \epsilon$

ce qui est équivalent à $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = l$.

$\Longleftarrow$)Supposons que pour toute suite $(u_n)_n$: ($\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0. \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = l$).

Si f ne possède pas la limite l au point x_0, on aura:

$\exists\varepsilon > 0$,tel que$\forall\eta > 0, \exists x \in \mathcal{V}(x_0)\backslash\{x_0\}, |x - x_0| < \eta$ et $|f(x) - l| > \varepsilon$.

Donc pour tout entier $n, \exists u_n \in \mathcal{V}(x_0)\backslash\{x_0\}, |u_n - x_0| < \frac{1}{n+1}$ et $|f(u_n) - l| > \varepsilon$.

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$ et $(f(u_n))_n$ne converge pas vers l. Ce qui est absurde et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = l$.

Exemple :

Si $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ n'existe pas. En effet pour

$x_n = \frac{1}{2n\pi} \to 0$ on a : $f(x_n) = \sin(2n\pi) = 0$

$y_n = \frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}} \to 0$, on a : $f(y_n) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1$

Proposition 3(Opération sur les limites)

Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l'$ alors

1) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = l + l'$

2) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) - g(x)] = l - l'$

3) $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |l|$

4) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x).g(x)] = l.l'$

5) si de plus, $l' \neq 0$ et $g \neq 0$ dans $V(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l'}$

6) $(f \geq g) \Longrightarrow (l \geq l')$

7) $(f \leq h \leq g) \Longrightarrow (l \leq \lim\limits_{x\to x_0} h(x) \leq l')$.

Exemple :

$f(x) = \frac{(x^2+1)^2+2x^2}{x^4} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$

Comme $0 \leq \left|x\cos\frac{1}{x}\right| \leq |x|$ et $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$, on a $\lim\limits_{x\to 0}(x\cos\frac{1}{x}) = 0$.

$g(x) = 3 + x\cos\frac{1}{x} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 3 + \lim\limits_{x\to x_0}(x\cos\frac{1}{x}) = 3$

donc $\lim\limits_{x\to 0}[f(x) + g(x)] = 4$, $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)g(x)] = 3$, $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{3}$

1.2.2 Limites à droite et limites à gauche

Définition

1) On dit que f admet une limite à droite l au point x_0 si:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta_\varepsilon > 0, \forall x \in \mathcal{V}(x_0), x_0 < x < x_0 + \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

On note $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = l$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x) = l$

2) On dit que f admet une limite à gauche l au point x_0 si:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta_\varepsilon > 0, \forall x \in \mathcal{V}(x_0), x_0 - \eta_\varepsilon < x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

On note $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=l$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)=l$

Proposition 4 On a l'équivalence suivante:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=l}$$
$$\Updownarrow$$
$$\boxed{f \text{ possède une limite à droite et une à gauche au point } x_0 \text{et } \lim_{x\to x_0^+} f(x)=l=\lim_{x\to x_0^-} f(x)}$$

Démonstration:

$\Leftarrow$) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=l \Longrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\eta_{1,\varepsilon}>0$ tel que $\forall x\in\mathcal{V}(x_0), x_0<x<x_0+\eta_{1,\varepsilon} \Longrightarrow |f(x)-l|\leq \varepsilon$

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=l \Longrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\eta_{2,\varepsilon}>0$ tel que $\forall x\in\mathcal{V}(x_0), x_0-\eta_{2,\varepsilon}<x<x_0 \Longrightarrow |f(x)-l|\leq\varepsilon$

On pose $\eta=\min(\eta_{1,\varepsilon},\eta_{2,\varepsilon})$ alors $\forall x\in\mathcal{V}(x_0)\backslash x_0, |x-x_0|<\eta_\varepsilon$,on a

$$\begin{cases} x_0-\eta<x<x_0 \Longrightarrow x_0-\eta_{2,\varepsilon}<x<x_0 \Longrightarrow |f(x)-l|\leq\varepsilon \\ \qquad\qquad\qquad\qquad ou \\ x_0<x<x_0+\eta \Longrightarrow x_0<x<x_0+\eta_{1,\varepsilon} \Longrightarrow |f(x)-l|\leq\varepsilon \end{cases}$$

d'où

$$\forall\varepsilon>0, \exists\eta_\varepsilon>0; \forall x\in\mathcal{V}(x_0)\backslash x_0,, x_0-\eta_\varepsilon<x<x_0+\eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x)-l|\leq\varepsilon$$

$\Rightarrow$) facile à vérifier, en utilisant les définitions.

Remarque :

1) Si $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=l_1$ *et* $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=l_2$ *avec* $l_1\neq l_2$ *alors* f *n'admet pas de limite en* x_0.

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=l$

1.2.3 Limites à l'infini et limites infinies

Définition:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Longleftrightarrow \forall A>0, \exists\eta>0; \forall x\in\mathcal{V}(x_0)\backslash x_0, |x-x_0|<\eta \Longrightarrow |f(x)|>A$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Longleftrightarrow \forall A>0, \exists\eta>0; \forall x\in\mathcal{V}(x_0)\backslash x_0, |x-x_0|<\eta \Longrightarrow f(x)<-A$

Définition

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists A_\varepsilon>0, x>A_\varepsilon \Longrightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists A_\varepsilon>0, x<-A_\varepsilon \Longrightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$

Exemples

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+2x+1}{x^4}=+\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{x}\cos x)=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{1}{x}\cos x)=0$.

Formes indéterminées:

Définition :

Dans le calcul des limites, on appelle forme indéterminée toute situation qui conduit à un cas où les théorèmes portant sur les opérations sur les limites ne permettent pas de conclure. Les formes indéterminées les plus courantes sont :

$$\tfrac{0}{0}, \tfrac{\pm\infty}{\pm\infty}, 0\times\infty, -\infty+\infty, 1^\infty, 0^0, 0^\infty, \infty^0, \text{ etc } ....$$

Exemple :

Si $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x$ alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$.

On dit que $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}$ est une forme indéterminée de la forme $\frac{0}{0}$.

1.3 Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

1.3.1 Définitions et Notations:

Soit f une fonction réelle définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in D$.

Définition :

(i) On dit que f est continue au point x_0, si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

(ii) Si f n'est pas continue au point x_0, on dit que f est discontinue au point x_0.

(iii) f est continue sur D si elle est continue en chaque point de D.

Remarque: On rappelle que:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Longleftrightarrow (\forall\varepsilon > 0, \exists\eta_\varepsilon > 0; \forall x \in D, |x - x_0| < \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$

Proposition: On a l'équivalence suivante:

$$\boxed{f \text{ continue au point } x_0}$$
$$\Updownarrow$$
$$\boxed{\text{Pour toute suite}(u_n)_n \text{ d'éléments de } D \text{ qui converge vers } x_0,\ \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(x_0).}$$

Démonstration: 1) Supposons f continue au point x_0 :

$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta_\varepsilon > 0$, tel que: $\forall x \in D, |x - x_0| < \eta_\varepsilon \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$, pour $\eta_\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |u_n - x_0| < \eta_\varepsilon$.

Ce qui implique $|f(u_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ et alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(x_0)$.

2) Réciproquement, si on suppose que f est discontinue au point x_0,on a:

$\exists\varepsilon > 0, \forall\eta > 0; \exists x \in D, |x - x_0| < \eta$ et $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$.

En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}, \exists u_n \in D, |u_n - x_0| < \frac{1}{n+1}$ et $|f(u_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$

La suite$(u_n)_n$ converge vers x_0 et la suite $(f(u_n))_n$ ne converge pas vers $f(x_0)$.

Exemple:

1) $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 1 \quad\quad \text{si } x = 0 \end{cases}$

f est discontinue en 0, car $\lim\limits_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0 \neq f(1)$.

2) Mais la fonction $x \to e^{-\frac{1}{x^2}}$ peut être prolongée par continuité. Ainsi la fonction $g(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \text{si } x \in \mathbb{R}^* \\ 0 \quad\quad \text{si } x = 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Définition:

On dit f est continue à droite (resp. à gauche) au point x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$(resp. $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$)

Remarque: f est continue dans l'intervalle $[a, b]$ si elle est continue en tout point x de $]a, b[$, à droite de a et à gauche de b.

Proposition (Opération sur les fonctions continues)

1) Soient f et g deux fonctions continues au point x_0, alors:

i) $|f|$, $f+g$, $f-g$ et $f\times g$ sont continues en x_0.

ii) Si $g(x)\neq 0$ au voisinage de x_0 et $g(x_0)\neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.

2) Si f est continue au point x_0 est g est continue au point $f(x_0)$, alors $g\circ f$ est continue au point x_0.

Exemples defonctions continues:

1) Les fonctions polynômes

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

Pour tout $p\in\mathbb{N}$, la fonction $x\rightarrow a_px^p$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Les fonctions trigonométriques sont continues sur leur domaine de définition respectif.
Cas de la fonction sinus : $f(x)=\sin(x)$.

Pour tout x et $x_0\in\mathbb{R}$, on a :

$$\sin(x)-\sin(x_0) = 2\sin(\tfrac{x-x_0}{2})\cos(\tfrac{x+x_0}{2})$$

Or pour tout $u\in\mathbb{R}$, $|\sin(u)|\leq|u|$ d'où

$$|\sin(x)-\sin(x_0)| \leq 2|\sin(\tfrac{x-x_0}{2})|\times 1 \leq |x-x_0|$$

donc $\forall\varepsilon>0, \exists\eta=\varepsilon; |x-x_0|<\eta \Longrightarrow |\sin(x)-\sin(x_0)|\leq|x-x_0|\leq\varepsilon$.
Ainsi la fonction $\sin(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2) Les fonctions élémentaires sont continues sur leur domaine de définition respectif.
par exemple: la fonction: $x\rightarrow e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $x\rightarrow\ln(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

1.3.2 Théorème des valeurs intermédiaires .

On admet la propriété suivante des fonctions continues sur un intervalle borné et fermé:

Théorème 1:

Soit f une fonction réelle définie et continue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$

(1) f est bornée

(2) f atteint ses bornes:

Si on pose $m=\inf f([a,b])$ et $M=\sup f([a,b])$, il existe x_0 et $x_1\in[a,b]$: $f(x_0)=m$ et $f(x_1)=M$

Remarque:

Soit $f:[0,1]\rightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & \text{si } x\in]0,1]\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$

f n'est pas continue en 0 et $f([0,1])=\{0\}\cup[1,+\infty[$.

Ainsi l'image de $[0,1]$ par f n'est pas bornée. Dans ce cas f n'est pas continue sur $[0,1]$.

Théorème 2 (théorème des valeurs intermédiaires)**:**

Soit f une fonction définie et continue sur $[a,b]$ et y un nombre réel strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (c'est à dire.$f(a)<y<f(b)$ ou $f(b)<y<f(a)$).

Alors il existe au moins un point $c\in]a,b[$ telque $f(c)=y$.

Démonstration

Supposons par exemple $f(a)<y<f(b)$, et soit
$E=\{x\in[a,b];\ f(x)<y\}$

$a \in E \Longrightarrow E \neq \varnothing$. De plus E est majoré par b, Donc E admet une borne supérieure notée c.

Comme c est un majorant de E et $a \in E$ on a $c \geq a$.
Comme c est le plus petit majorant de E on a $c \leq b$.
Donc $c \in [a, b]$. On va montrer que $f(c) = y$.
- Supposons $f(c) < y$, alors $c < b$.Posons alors $\alpha = y - f(c) > 0$:
puisque f est continue en c, on a: $\exists c' \in]c, b[$ tel que $f(c') - f(c) < \alpha$.
Ce qui entaîne $f(c') < \alpha + f(c) = y$ et alors $c' \in E$ et $c' > c$.
Donc c n'est pas un majorant de E; ce qui est absurde.
- Supposons $f(c) > y$, alors $c > a$.Posons alors $\beta = f(c) - y > 0$:
puisque f est continue en c, on a: $\exists c" \in]a, c[$ tel que:$\forall x \in]c", c[, f(x) - f(c) > -\beta$.
Ce qui entraîne $f(x) > f(c) - \beta = y, \forall x \in]c", c[$ et alors $c"$majore E et $c" < c$.
Donc c n'est pas le plus petit majorant de E; ce qui est absurde.
conclusion: $f(c) = y$.

Remarque: On peut résumer les propriétés des deux théorèmes précédents:
"L'image par une fonction continue d'un intervalle fermé borné est un intervalle fermé borné".

Exemple:
Soit $f : x \in [-1, +1] \longmapsto |x| \in \mathbb{R}$
f est continue sur $[-1, 1]$ et $f([-1, 1]) = [0, 1]$.

Corollaire:
Si f est une fonction définie et continue sur $[a, b]$,et si $f(a)f(b) < 0$,alors $\exists c \in]a, b[$ telque $f(c) = 0$.

Remarque:
Dans le théorème des valeurs intermédiaires, le point c n'est pas nécessairement unique.
En effet pour $f(x) = \sin(x)$ *dans* $[0, 4\pi]$,on a:

$$\sin(\tfrac{\pi}{2}).\sin(\tfrac{7\pi}{2}) < 0 \ ,$$

et

$$\sin(\pi) = 0, \sin(2\pi) = 0 \ et \ \sin(3\pi) = 0.$$

Remarque:
Soit $f : [-1, +1] \longrightarrow \{0, 1\}$ définie par $f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \neq 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases}$
On a $f([-1, +1]) = \{0, 1\}$ n'est pas un intervalle car f n'est pas continue sur $[-1, +1]$.

Exemple :
Soit l'équation $f(x) = 0$, *où* $f(x) = x^3 + x^2 + 3x - 2$.
f est continue sur $\mathbb{R}$, $f(0) = -2$ et $f(1) = 3$ donc $f(0) < 0 < f(1)$.
Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in]0, 1[: f(c) = 0$.

Remarque: Une des applications du théorème des valeurs intermédiaires: le calcul approché d'une racine. En reprenant l'exemple précédent:
- Si on pose $\alpha_1 = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$, on a $f(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8} < 0 \Rightarrow f(\frac{1}{2})f(1) < 0$.
Donc il existe $c \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[: f(c) = 0$.
- Si on pose $\alpha_2 = \frac{\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{3}{4}$, on a $f(\frac{3}{4}) = \frac{79}{64} > 0 \Rightarrow f(\frac{1}{2})f(\frac{3}{4}) < 0$.
Donc il existe $c \in \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[: f(c) = 0$.
Donc n'importe quelle valeur dans $\left]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[$est une approximation de l'une des racines de f, qui se trouve dans cet intervalle, avec une précision de 25% car $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0.25$

1.4 Dérivées et théorème des accroissements finis

1.4.1 Définitions et Notations:

On considère I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Définition : Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie au voisinage de $x_0 \in I$.

On dit que f est dérivable en x_0, si le rapport $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite dans $\mathbb{R}$, lorsque $x \longrightarrow x_0$.

On écrit alors:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$f'(x_0)$ est appelée la dérivée de f au point x_0 .

Exemple:

Si $f(x) = x^2, \forall x \in \mathbb{R}$. $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x^2-x_0^2}{x-x_0} = x + x_0$et alors $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 2x_0$

Remarques*:*

i) Si on pose $x = x_0 + h$ *alors* $x \longrightarrow x_0 \Leftrightarrow h \longrightarrow 0$ *et* $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

ii) Si f *est dérivable au point* x_0,et si *on pose* $\varepsilon(h) = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)$, on a: $\varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$

car $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \Rightarrow \varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$;

et alors on peut écrire: $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$

Propriété :

Si f est dérivable au point x_0 alors f est continue au point x_0.

Démonstration:

Si f est dérivable au point x_0, alors

$$f(x_0 + h) - f(x) = h[f'(x_0) + \varepsilon(h)] \text{ avec } \varepsilon(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$$

$\Longrightarrow$

$$\lim_{h \to 0}[f(x_0 + h) - f(x)] = \lim_{h \to 0} h[f'(x_0) + \varepsilon(h)] = 0$$

$\Longrightarrow$

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x) \Rightarrow f \text{ est continue au point } x_0$$

Remarque :

La réciproque de la propriété précédente est fausse.

En effet, la fonction $f(x) = |x|$ *est continue en* 0 mais elle *n'est pas dérivable au point* 0

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 \text{ si } x < 0 \\ +1 \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -1$$

et

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 1$$

donc $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$ *n'admet pas de limite lorsque* $x \to 0$

Interprétation géométrique :

Soit $M_0 \left|^{x_0}_{f(x_0)}\right.$ et $M \left|^{x}_{f(x)}\right.$ deux points de la courbe représentative de f:

on a : $x - x_0 = \overline{M_0H}$ et $f(x) - f(x_0) = y - y_0 = \overline{MH}$

La fonction $g(x) = \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{\overline{MH}}{\overline{M_0H}}$ représente le coefficient directeur de la droite M_0M, $g(x)$ est la pente de la droite M_0M.

On dit que la droite M_0M de pente $g(x)$ tend vers une droite-limite de pente $f^{'}(x_0)$. C'est la tangente à la courbe au point M_0.

Posons $x - x_0 = \Delta x$:accroissement de la variable,

$f(x) - f(x_0) = \Delta f(x)$:accroissement de la fonction.

Il vient : $f^{'}(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Equation de la tangente à la courbe au point $M_0 \left|^{x_0}_{f(x_0)}\right.$:

$$y - f(x_0) = f^{'}(x_0)(x - x_0)$$

Définition : Dérivée à droite et dérivée à gauche

i) On dit que f est dérivable à gauche (respectivement à droite) au point x_0 si

$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \text{ (respectivement } \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\text{) existe;}$$

on note $f_g^{'}(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$(respectivement $f_d^{'}(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$).

ii) On dit que f est dérivable dans $[a, b]$ si f est dérivable en tout point $x \in]a, b[$, dérivable à gauche au point b et dérivable à droite au point a.

Remarques :

i) si f est dérivable à droite et à gauche au point x_0 et si $f_g^{'}(x_0) = f_d^{'}(x_0)$ alors f est dérivable en x_0.

et on a : $f_g^{'}(x_0) = f_d^{'}(x_0) = f^{'}(x_0)$.

ii) f peut être dérivable à gauche et à droite au point x_0, sans être dérivable en x_0:

Soit $f(x) = |x|$, on a $f_g^{'}(0) = \lim\limits_{x\to x_0^-} \frac{|x|}{x} = -1$ et $f_d^{'}(0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} \frac{|x|}{x} = 1$

donc $f_g^{'}(0) \neq f_d^{'}(0) \Rightarrow f$ *n'est pas dérivable au point* 0.

1.4.2 Opérations sur les dérivées :

1) Opérations élémentaires :

Soient u, v des fonctions dérivables sur I

(i) $(u + v)$ est dérivable sur I et on a $(u + v)^{'} = u^{'} + v^{'}$

(ii)$\forall\lambda \in \mathbb{R}, \lambda u$ est dérivable sur I et on a $(\lambda u)^{'} = \lambda u^{'}$

(iii) (uv) est dérivable sur I et on a $(uv)^{'} = u^{'}v + v^{'}u$

(iv) Si $v \neq 0$ sur I, alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et on a: $\left(\frac{u}{v}\right)^{'} = \frac{u^{'}v-v^{'}u}{v^2}$

2) Dérivée logarithmique :

Soit f une fonction dérivable et non nulle sur I,

On appelle dérivée logarithmique de f la fonction :

$$\frac{f^{'}(x)}{f(x)}.$$

Dérivée logarithmique d'un produit de deux fonction:

On considère deux fonctions dérivables $u \neq 0$ et $v \neq 0$

$$\frac{(uv)'}{uv} = \frac{u'v + v'u}{uv} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$$

Dérivée logarithmique d'un quotient de deux fonctions :

$$\frac{(\frac{u}{v})'}{\frac{u}{v}} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}$$

3) Dérivée d'une fonction composée :

Soit f et g deux fonctions telles que: $f : I \longrightarrow J$ et $g : K \longrightarrow \mathbb{R}$, avec $J \subset K$

Si f est dérivable en $x_0 \in I$ et si g est dérivable en $y_0 = f(x_0) \in J$, alors $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a :

$$(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)] \times f'(x_0).$$

Démonstration:

On a :

$$(g \circ f)(x_0 + h) - (g \circ f)(x_0) = g[f(x_0 + h)] - g[f(x_0)]$$

et f étant dérivable en x_0 , on a:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h[f'(x_0) + \varepsilon(h)]$$

Donc

$$(g \circ f)(x_0 + h) - (g \circ f)(x_0) = g[f(x_0) + h[f'(x_0) + \varepsilon(h)]] - g[f(x_0)]$$

puisque $h \longrightarrow 0 \Rightarrow k = h[f'(x_0) + \epsilon(h)] \longrightarrow 0$ et comme g dérivable en $f(x_0)$:

$$g[f(x_0) + k] = g[f(x_0)] + k[g'[f(x_0)] + \varepsilon_2(k)]$$

avec $\varepsilon_2(k) \longrightarrow 0 \Rightarrow$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x_0 + h) - (g \circ f)(x_0) &= g[f(x_0)] + k[g'[f(x_0)] + \varepsilon_2(k)] - g[f(x_0)] \\ &= k[g'[f(x_0)] + \varepsilon_2(k)] \\ &= h[f'(x_0) + \epsilon(h)][(g'f(x_0)] + \varepsilon_2(k))] \\ &= hf'(x_0).g'f(x_0) + h\varepsilon_3(h)\end{aligned}$$

$\varepsilon_3(h) \longrightarrow 0 \Rightarrow$

$$\lim_{h \to 0} \frac{g \circ f(x_0 + h) - g \circ f(x_0)}{h} = g'[f(x_0)] \times f'(x_0)$$

4) Dérivée d'une fonction réciproque :

Soit f une fonction définie continue sur $[a, b]$. On suppose que sa fonction réciproque $g = f^{-1}$ existe.

Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$, alors

i) g est dérivable en $y_0 = f(x_0)$

ii) et on a : $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ i.e. $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$ et $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0))}$.

Démonstration :

$x_0 = g(y_0) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$

$x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x)$

$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$

$g'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{\lim \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0))}$

1.4.3 Théorème de Rolle et applications:

Théorème de Rolle:

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$, dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ et vérifiant $f(a) = f(b)$.

Alors il existe au moins une valeur $c \in]a,b[$ telle que $f^{'}(c) = 0$.

Démonstration

i) Si f est une fonction constante alors $f^{'}(x) = 0, \forall x \in]a,b[$ alors tout $x \in]a,b[$, x vérifie la proposition.

ii) Si f n'est pas constante sur $]a,b[$, f étant continue alors $f([a,b]) = [m,M]$ avec

$$M = \sup_{x\in[a,b]} f(x),\ m = \inf_{x\in[a,b]} f(x) \ \text{ et } m \neq M$$

puisque $f(a) = f(b)$ et $m \neq M$ alors l'une des deux valeurs m ou M est l'image par f d'un point de l'intervalle ouvert $]a,b[$. Supposons qu'il s'agit de M; il existe alors au moins un point $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = M$

Pour $x \in]a,b[$, considérons le rapport $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$

$$Si x > c,\ \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \Rightarrow \lim_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f^{'}(c^+) \leq 0$$

$$\text{Si} x < c,\ \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \Rightarrow \lim_{x\to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f^{'}(c^-) \geq 0$$

f étant dérivable au point $c \in]a,b[$, alors $f^{'}(c^+) = f^{'}(c^-) = f^{'}(c)$ et

$$\left.\begin{array}{lll} f^{'}(c) & \geq & 0 \\ f^{'}(c) & \leq & 0 \end{array}\right\} \Rightarrow\ f^{'}(c) = 0$$

Généralisation: Extension du théorème de Rolle

Soit f une fonction continue et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ vérifiant

$$\lim_{x\to a^+} f(a) = \lim_{x\to b^-} f(b) = +\infty\ (ou - \infty)$$

Alors il existe au moins une valeur $c \in]a,b[$ tel que:

$$f^{'}(c) = 0$$

Remarques :

i) Si $f'(c) = 0$, la tangente à la courbe au point $M(c, f(c))$ est horizontale.

ii) *Le théorème de Rolle affirme qu'il existe au moins un point $M(c, f(c))$ de la courbe distinct des points $A(a, f(a))$ et $B(b, f(b))$ en lequel la tangente à la courbe est horizontale.*

iii) L*a condition $f(a) = f(b)$ est suffisante mais pas nécessaire.*

Exemple: Soit $f(x) : x \in [-1,1] \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$. On a : $f(-1) \neq f(1)$ mais $f^{'}(0) = 0$

1.4.4 Théorème des accroissements finis:

Théorème:

Soit f une fonction définie,continue sur un $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$

Alors il existe au moins une valeur $c\in]a,b[$ tel que :

$$f(b)-f(a)=(b-a)f^{'}(c) \text{ avec } a<c<b$$

Démonstration

Pour tout $x\in[a,b]$, on pose:

$$\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$$

Comme f est supposée continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, on a φ est définie, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. De plus $\varphi(a)=\varphi(b)=0$.

D'après le théorème de Rolle appliqué à φ: $\exists c\in]a,b[$ tel que: $\varphi^{'}(c)=0$

Comme $\varphi^{'}(x)=f^{'}(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, on a: $\varphi^{'}(c)=0\Rightarrow f^{'}(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$\Rightarrow\ f(b)-f(a)=(b-a)f^{'}(c)$.

Interprétation géométrique:

Soit $A(a,f(a))$ *et* $B(b,f(b))$ deux points du plan, on a :

$$f^{'}(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \text{ pente de } AB$$

Le théorème des accroissements finis affirme l'existence d'au moins un point $M(c,f(c))$ de la courbe C_f distinct de $A(a,f(a))$ et de $B(b,f(b))$ pour lequel la tangente à la courbe est parallèle à la pente AB.

Autre forme de la formule des accroissements finis

$c\in]a,b[\iff .a<c<b\iff\ 0<c-a<b-a$

$\Rightarrow 0<\frac{c-a}{b-a}<1\ \Rightarrow$ on peut trouver $\theta\in]0,1[$ tel que

$$\frac{c-a}{b-a}=\theta\Rightarrow c=a+\theta(b-a)$$

Si on pose $b-a=h\Rightarrow c=a+\theta h$ et la formule des accroissements finis s'écrit

$$f(a+h)=f(a)+hf^{'}(a+\theta h) \text{ avec } 0<\theta<1$$

Théorème: Forme générale de la formule des accroissements finis

Soit f et g deux fonction vérifiant les hypothése du théorème des accroissements finis sur $[a,b]$ et $g^{'}$ non nulle sur $]a,b[$.

Alors il existe au moins une valeur $c\in]a,b[$ tel que:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f^{'}(c)}{g^{'}(c)}$$

Démonstration:

On a : $g(b)\neq g(a)$, sinon d'après le théorème de Rolle, $\exists c\in]a,b[$ tel que: $g^{'}(c)=0$ (en contradiction avec $g^{'}$ non nulle sur $]a,b[$).

Soit $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}[g(x)-g(a)]$

φ est définie, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et $\varphi(a)=\varphi(b)=0$

Donc d'après le théorème de Rolle *il existe* $c \in]a,b[$ tel que : $\varphi^{'}(c) = 0$.
Comme $\varphi^{'}(x) = f^{'}(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} g^{'}(x)$ on a
$\varphi^{'}(c) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{f^{'}(c)}{g^{'}(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Exemple d'application du théorème des accroissements finis

1) Montrer que pour $0 < a < b$, on a les inégalités: $\frac{b-a}{1+b^2} < Arctg(b) - Arctg(a) < \frac{b-a}{1+a^2}$.

On applique le théorème des accroissements finis pour la fonction : $f(x) = Arctg(x)$ dans $[a,b]$:

$$\exists c \in]a,b[\text{ tel que } f(b) - f(a) = (b-a) f^{'}(c)$$

$f^{'}(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow Arctg(b) - Arctg(a) = (b-a)\frac{1}{1+c^2}, c \in]a,b[$
$c \in]a,b[\Rightarrow 0 < a < c < b \Rightarrow a^2 < c^2 < b^2 \Rightarrow 1 + a^2 < 1 + c^2$ et $1 + b^2 > 1 + c^2$.
Donc $\frac{1}{1+a^2} > \frac{1}{1+c^2}$ et $\frac{1}{1+b^2} < \frac{1}{1+c^2}$

$$\Rightarrow \frac{b-a}{1+b^2} < Arctg(b) - Arctg(a) < \frac{b-a}{1+a^2}$$

2) En déduire que :

$$\frac{\Pi}{4} + \frac{3}{25} < Arctg(\tfrac{4}{3}) < \frac{\Pi}{4} + \frac{1}{6}$$

On pose $b = \frac{4}{3}$ et $a = 1 \Rightarrow Arctg(a) = \frac{\Pi}{4}$
$\Longrightarrow \quad \frac{\Pi}{4} + \frac{\frac{4}{3}-1}{1+(\frac{4}{3})^2} < Arctg(\frac{4}{3}) < \frac{\Pi}{4} + \frac{\frac{4}{3}-1}{2}$
$\Longrightarrow$

$$\frac{\Pi}{4} + \frac{3}{25} < Arctg(\tfrac{4}{3}) < \frac{\Pi}{4} + \frac{1}{6}$$

Corollaire :

i) Pour qu'une fonction f soit constante sur un intervalle I, il faut et il suffit qu'elle ait une dérivée nulle sur I.

ii) Pour qu'une fonction f dérivable sur un intervalle I, soit croissante (resp décroissante) sur I il faut et il suffit que $f^{'} \geq 0$ (resp $f^{'} \leq 0$) sur I.

iii) Soit f une fonction définie, continue, dérivable sur un intervalle I si $f^{'} > 0$ (resp $f^{'} < 0$) sur I alors f est strictement croissante (resp décroissante).

Remarque : La réciproque de iii) est fausse.
En effet soit $f \;: x \in [-1,1] \mapsto x^3 \in \mathbb{R}$.
On a $f^{'}(x) = 3x^2$, $f^{'}(0) = 0$ *mais* f *est strictement croissante.*

Démonstration:

i) $f = cte \;\Rightarrow\; f^{'} = 0$ sur I.
$f^{'} = 0$ sur $I \Rightarrow\; f$ cte sur I ?
Soit $(x_1, x_2) \in I^2,\; x_1 \neq x_2$ Supposons $x_1 < x_2$. La restriction de f à $[x_1, x_2]$ est définie et continue sur $[x_1, x_2]$; elle est dérivable sur $]x_1, x_2[$. Donc d'après le théorème accroissements finis, il existe au moins une valeur $c \in]x_1, x_2[$ telle que:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f^{'}(c) \;\Rightarrow\; f(x_1) = f(x_2)$$

ii) f croissante sur $I \Leftrightarrow (\;\forall x_1, x_2 \in I,\; x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2))$.
Donc $x_1 < x_2 \Longrightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0 \;\Rightarrow f^{'}(x_1) = \lim\limits_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \geq 0$
Réciproquement :($f^{'} \geq 0 \;\Rightarrow\; f$ croissante sur I)
$(x_1, x_2) \in I^2$, $x_1 \neq x_2$. Supposons $x_1 < x_2$. eLa restriction de f à $[x_1, x_2]$ est définie et continue sur $[x_1, x_2]$; elle est dérivable sur $]x_1, x_2[$. Donc d'après le théorème accroissements finis, il existe au moins une valeur $c \in]x_1, x_2[$ telle que:

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f^{'}(c)$$

Or $f^{'}(c) \geq 0$ et $x_2 - x_1 > 0$, $\Longrightarrow (x_2 - x_1)f^{'}(c) \geq 0 \ \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ et f est croissante sur I.

1.5 Dérivées d'ordre supérieur et règle de l'Hospital

1.5.1 Dérivées d'ordre supérieur

Définition :

Soit f une fonction derivable sur $I, f^{'} : x \in I \mapsto f^{'}(x)$

Si $f^{'}$ est derivable, $f^{''}$ dérivée de $f^{'}$ s'appelle la dérivée seconde de f.

D'une façon générale, la dérivée $n^{ème}$ de f , appelée aussi dérivée d'ordre n, sera définie par la formule de recurrence :

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})^{\prime}, \forall n \geq 1 \text{ avec } f^{(0)} = f.$$

Exemples :

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\sin^n(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \sin x \\ f^{'}(x) & = & \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}) \\ f^{''}(x) & = & \sin x = \sin(x + \frac{2\pi}{2}) \\ \vdots & & \\ f^{(n)}(x) & = & \sin(x + \frac{n\pi}{2}) \end{array}$$

2) Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^p$, avec $p \in \mathbb{N}^*$ alors,

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f^{(n)}(x) = p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)x^{p-n}$

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & x^p, \ p \in \mathbb{N}^* \\ f^{'}(x) & = & px^{p-1} \\ \vdots & & \\ f^{(n)}(x) & = & p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)x^{p-n} \end{array}$$

Si $n = p \longrightarrow f^{(p)}(x) = p!$ et $f^{(r)}(x) \equiv 0, \forall r > p$.

3) pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\cos^{(n)}(x) = \cos(x + \frac{n\pi}{2})$.

Formule de Leibnitz:

Soient u et v deux fonctions n fois dérivables sur I

$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v^{\prime} + \cdots + u.v^{(n)}$

on écrit :

$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$

1.5.2 Règle de l'Hospital

Théorème (Règle de l'Hospital)**:**

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$, et si $f^{'}(x) \neq 0$ et $g^{'}(x) \neq 0$ pour $a < x < b$, alors

(1) $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l \Rightarrow \lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=l$

(2) $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\infty$

Démonstration:

On applique le théorème des accroissements finis généralisé sur l'intervalle $[a,x]$, il existe au moins $c\in]a,x[$ tel que : $\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Puisque $c\in]a,x[$, si $x\longrightarrow a^+$ alors $c\to a^+$ et $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim\limits_{c\to a^+}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Comme conséquence immédiate on a le corollaire suivant:

Corollaire: Soit $x_0\in[a,b]$, f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $[a,b]\backslash\{x_0\}$. On suppose que $f'(x)\neq 0$ et $g'(x)\neq 0$ pour tout $x\in]a,b[\backslash\{x_0\}$, On a alors:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=l$

(2) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\infty$

Exemple: 1) Calcul de $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$.

On a une forme indéterminé de la forme $\frac{0}{0}$.

$f'(x)=\cos x$ et $g'(x)=1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

2)Calcul de $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$.

On a une forme indéterminé de la forme $\frac{0}{0}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$$

En effet

$$f(x)=\sin x-x\Rightarrow f(0)=0$$

$$g(x)=x^3\Rightarrow g(0)=0$$

$$\frac{f(x)-f(0)}{g(x)-g(0)}=\frac{\sin x-x}{x^3}$$

$f'(x)=\cos x-1$ et $g'(x)=3x^2 \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}$$

Appliquons une deuxiéme fois la régle de l'hospital:

$$f'(x)=\cos x-1\Rightarrow f'(0)=0$$

$$g'(x)=3x^2\Rightarrow g'(0)=0$$

$f"(x)=-\sin x$ et $g"(x)=-6x$.

On a :

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6}=-\frac{1}{6}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{6x}=-\frac{1}{6}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=-\frac{1}{6}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=-\frac{1}{6}.$$

Attention :
Avant d'appliquer la règle de l'Hospital, il faut vérifier toujours les hypothèses.

La règle de l'Hospital permet de résoudre un très grand nombre de formes indéterminées (toutes celles de la forme $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ et toutes celles qui s'y ramènent). Mais elle a quelques inconvénients :

1 - Avant de l'appliquer, il faut savoir si l'on est dans des cas d'application de cette règle ou de ses généralisations.

2 - Il faut calculer des dérivées de fonctions

3 - Son utilisation demande parfois des astuces dans la façon d'écrire le quotient et il peut être nécessaire de transformer ce quotient avant de lui appliquer cette règle.

4 - Elle ne marche pas toujours:
L'étude de $\lim\limits_{x\to 0} x^2 \sin(\frac{1}{x})$ ne se fait pas par la règle de l'Hospital.

1.6 Formule de Taylor

1.6.1 Formules de Taylor et Mac-Laurin.

Définition : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

i) On dit que f est continûment dérivable sur I si elle est dérivable et sa dérivée f' est continue sur I.

ii) On dit que f est n fois continûment dérivable sur I si elle est dérivable n fois et que ses dérivées f', f'', $\cdots$, $f^{(n-1)}$, $f^{(n)}$ sont continues sur I, $(n \in \mathbb{N})$. On dit alors que la fonction f est de classe C^n.

Si f est un polynôme de degré n c'est à dire:

$$f(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0.$$

On a : $f(0) = a_0$.
Or $f'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + ...2a_2 x + a_1 \Rightarrow f'(0) = a_1$.
De même

$$f''(x) = n(n-1)a_n x^{n-2} + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + ... + 2a_2 \Rightarrow f''(0) = 2a_2.$$

De façon générale, et après k itérations, (par récurrence) on voit que

$$f^{(k)}(0) = k! a_k$$

Ainsi les coefficients du polynôme s'expriment en fonction des dérivées successives de f au point $x = 0$ et on a :

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Peut-on généraliser cette propriété à une fonction f "quelconque"?
D'après le théorème des acroissements finis, on sait que si f est une fonction continue dans $[0, x]$ et dérivable dans $]0, x[$, il existe $c \in]0, x[$: $f(x) = f(0) + xf'(c)$.
Plus généralement, on a :
Théorème de Taylor :
Soit f une fonction définie sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ telle que

i) f est n fois continûment dérivable sur le segment $[a,b]$.
ii) $f^{(n+1)}$ existe sur l'ouvert $]a,b[$.
Alors il existe au moins un point $c\in]a,b[$ tel que:

$$f(b)=f(a)+\frac{b-a}{1!}f'(a)+\frac{(b-a)^2}{2!}f''(a)+..+\frac{(b-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+..+\frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Remarques :
1) Si $n=0$, on retrouve la formule des Accroissements finis : $f(b)=f(a)+(b-a)f'(c)$.
2) Cette égalité est appelée formule deTaylor à l'ordre $(n+1)$ dans $[a,b]$.
La formule de Taylor est valable sur l'intervalle $[a,b]$.
3) $R_n=\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$ est appelé reste de Lagrange.
Si f est un un polynôme de degré $\leq n$, le reste R_n est nul.

Démonstration:
On considère la fonction polynômiale suivante:

$$P_n(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

on a *degré*$(\ P_n)\leq n$.
On remarque que $P_n(a)=f(a)$ et

$$P_n'(x)=f'(a)+(x-a)f''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^{(k-1)}}{(k-1)!}f^{(k)}(a)+\cdots+\frac{(x-a)^{(n-1)}}{(n-1)!}f^{(n)}(a)$$

On a donc: $P_n'(a)=f'(a),\ P_n''(a)=f''(a),\cdots,\ P_n^{(k)}(a)=f^{(k)}(a),\cdots,\ P_n^{(n)}(a)=f^{(n)}(a)$.
P_n peut s'écrire sous la forme

$$P_n(x)=P_n(a)+(x-a)P_n'(a)+\frac{(x-a)^2}{2!}P_n''(a)+\cdots+\frac{(x-a)^k}{k!}P_n^{(k)}(a)+\cdots+\frac{(x-a)^n}{n!}P_n^{(n)}(a)$$

On considère la fonction φ_n définie par:

$$\varphi_n(x)=f(x)-P_n(x)-\alpha_n\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

où α_n est une constante réelle choisie de telle sorte que: $\varphi_n(b)=0$, c'est à dire: $\alpha_n=(f(b)-P_n(b))\frac{(n+1)!}{(b-a)^{n+1}}$
La fonction φ_n est définie continue sur le segment $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ et on a:

$$\varphi_n(a)=\varphi_n(b)=0$$

D'après le théorème de Rolle, il existe au moins une valeur $c_n\in]a,b[$ telle que: $\varphi_n'(c_n)=0$.
La dérivée de φ_n est $\varphi_n'(x)=f'(x)-P_n'(x)-\alpha_n\frac{(x-a)^n}{n!}$. la fonction φ_n' est continue sur le segment $[a,c_n]$ et dérivable sur $]a,c_n[$, et qui vérifie:$\varphi_n'(a)=\varphi_n'(c_n)=0$. En appliquant le théorème de Rolle à la fonction φ_n', il existe au moins une valeur $c_{n-1}\in]a,c_n[$ telle que:

$$\varphi_n''(c_{n-1})=0$$

$$\varphi_n''(x)=f''(x)-P_n''(x)-\alpha_n\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}$$

On continue de manière analogue en appliquant successivement le théorème de Rolle à $\varphi_n'', \varphi_n^{(3)},..,\varphi_n^{(n)}$.

Ainsi on a l'existence des points $c_{n-1}, c_{n-2}, ..., c_2$ puis c_1 telles que:

$c_{n-1} \in]a, c_n[$, $c_{n-2} \in]a, c_{n-1}[, ..., c_2 \in]a, c_3[, c_1 \in]a, c_2[$

avec

$\varphi_n''(c_{n-1}) = 0, ..., \varphi_n^{(n)}(c_1) = 0.$

Comme $\varphi_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - P_n^{(n)}(x) - \alpha_n(x-a)$, $\varphi_n^{(n)}$ est continue sur le segment $[a, c_1]$ et dérivable sur $]a, c_1[$ et on a $\varphi_n^{(n)}(a) = \varphi_n^{(n)}(c_1) = 0$,on applique le théorème de Rolle:

Il existe au moins une valeur $c \in]a, c_1[$ telle que:$\varphi_n^{(n+1)}(c) = 0$.

Or $\varphi_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - P_n^{(n+1)}(x) - \alpha_n$

et $degré(P_n) \leq n \Longrightarrow (P_n^{(n+1)}(x) = 0, \forall x) \Longrightarrow \varphi_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - \alpha_n;$

donc

$$\varphi_n^{(n+1)}(c) = 0 \Longrightarrow f^{(n+1)}(c) = \alpha_n$$

d'où

$$\varphi_n(x) = f(x) - P_n(x) - \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

$$\Longrightarrow \varphi_n(b) = f(b) - P_n(b) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) = 0$$

car α_n a été choisi de telle sorte que $\varphi_n(b) = 0$

$$f(b) = P_n(b) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) :: c \in]a, b[$$

d'où la formule de Taylor à l'ordre $(n+1)$

$$f(b) = f(a) + \frac{b-a}{1!} f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!} f''(a) + .. + \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + .. + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

Autre écriture de la formule de Taylor à l'ordre $(n+1)$:

En posant $b - a = h \Longrightarrow b = a + h$

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \quad c \in]a, a+h[$$

Autre forme de la formule de Taylor à l'ordre $(n+1)$:

$c \in]a, a+h[\Longrightarrow 0 < c - a < h$, $0 < \frac{c-a}{h} < 1 \Longrightarrow \exists\, \theta \in]0, 1[$, $\theta = \frac{c-a}{h} \Longrightarrow c = a + \theta\, h$

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \frac{h^k}{k!} f^{(k)}(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta\, h) \ , \ \theta \in]0, 1[$$

Formule de Mac-Laurin :

C'est le cas particulier où $a = 0$

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c) \ , c \in]0, x[$$

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots + \frac{x^k}{k!} f^{(k)}(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta\, x) \ , \theta \in]0, 1[$$

1.6.2 Exemples:

Formule de Taylor de quelques fonctions usuelles pour x au voisinage de 0 : (Pour les obtenir au voisinage de a,il suffit de poser $x = x - a$).

1) $f(x) = e^x$. Comme $f^{(n)}(x) = e^x$ et $f^{(n)}(0) = 1$, on a :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}, \text{ avec } 0 < c < x.$$

2) $f(x) = \sin(x)$. On a

$$f'(x) = \cos(x), f''(x) = -\sin(x),$$
$$f^{(2p)}(x) = (-1)^p \sin(x),\ f^{(2p+1)}(x) = (-1)^p \cos(x)$$

donc $f^{(2p)}(0) = 0$ et $f^{(2p+1)}(0) = 1$. Ainsi

$$\boxed{\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}x^{2p+1} + [\frac{(-1)^{p+1}}{(2p+2)!}\sin(c)]x^{2p+2}, \text{ avec } 0 < c < x.}$$

De manière analogue on a :

$$\boxed{\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{(-1)^p}{(2p)!}x^{2p} + [\frac{(-1)^p}{(2p+1)!}\cos(c)]x^{2p+1}, \text{avec } 0 < c < x.}$$

3) Pour les fonctions hyperboliques: $ch(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $sh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$:
Les dérivées successives de chx sont: $sh(x), chx, shx, chx,.....$
$ch(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + ...\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}sh(c)$,avec $0 < c < x$.
$sh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{x^{2(n+1)}}{(2n+2)!}ch(c)$,avec $0 < c < x$.

4) $f(x) = \frac{1}{1-x}$. On a :

$$f\prime(x) = \frac{1}{(1-x)^2}; ...;\ f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}} \text{ donc } f^{(n)}(0) = n!.$$

Ainsi :

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + [\frac{1}{(1-c)^{n+2}}]x^{n+1} \text{ avec } 0 < c < x.}$$

5) Si $|x| < 1,\ f(x) = \log(1 - x)$ est bien définie et on a :

$$f'(x) = -\frac{1}{1-x},\ ...,\ f^{(k)}(x) = -\frac{(k-1)!}{(1-x)^k} \text{ donc}$$
$$f'(0) = -1, f"(0) = -1, f^{(3)}(0) = ...,\ f^{(k)}(0) = -(k-1)!.$$

Ainsi pour $|x| < 1$,

$$\boxed{\log(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - ... - \frac{x^n}{n} - \frac{1}{(n+1)(1-c)^{n+1}}x^{n+1} \text{ avec } 0 < c < x.}$$

6) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, soit $f(x) = (1 + x)^\alpha$. On a :
$f'(x) = \alpha(1 + x)^{\alpha-1}$, ...,(et par recurrence) $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1)...(\alpha - (n - 1))(1 + x)^{\alpha-n}$.
donc $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha - 1)...(\alpha - (n - 1))$ et $\exists c \in]0, x[$ tel que:

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+c)^{\alpha-n-1}x^{n+1} \text{ avec } 0 < c < x.}$$

Cas particuliers:
(i) Si $\alpha = -1$; $\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-p+1)}{p!} = (-1)^p$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + ... + (-1)^n x^n + Ax^{n+1}$$

avec $A = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(1+c)^{n+2}}$ et $0 < c < x$.
(ii) Si $\alpha = \frac{1}{2}$; $\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-p+1)}{p!} = \frac{1(-1)(-3)......(-2p+3)}{p!2^p} = (-1)^{p-1}\frac{1.3......(2p-3)}{2.4.6....(2p)}$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + ... + (-1)^{n-1}\frac{1.3.5.....(2n-3)}{2.4.6....(2n)}x^n + Ax^{n+1}$$

avec $A = (-1)^n \frac{1.3......(2n-1)}{2.4.........(2n+2)} \frac{1}{(1+c)^{n+\frac{1}{2}}}$ et $0 < c < x$.

1.6.3 Application de la Formule de Taylor au Calcul numérique :

Si f est une fonction de classe C^{n+1} au voisinage de a :

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!}f'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h) \ , \ \theta \in]0,1[$$

On suppose connue les valeurs $f(a)$, $f'(a)$, $\cdots$, $f^{(n)}(a)$.
On prend pour valeur approchée de $f(a+h)$ la valeur

$$f(a) + hf'(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

Si on pose,

$$g(a) = f(a) + hf'(a) + \cdots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a)$$

L'erreur commise est

$$f(a+h) - g(a) = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)$$

L'erreur commise est donnée donc par $\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)$

$$a < a + \theta h < a + h$$

Donc, si M est un majorant de $f^{(n+1)}(a+\theta h)$ sur $]a, a+h[$ on a

$$|f^{(n+1)}(a+\theta h)| < M$$

$$|\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a+\theta h)| < \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}M$$

Donc $f(a+h)$ est égale à $g(a)$ avec une erreur absolue inférieure à $\frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}M$

Exemple :

Calculer $\sin(31°)$ à 10^{-6} prés

$$\sin(30°) = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$\sin(a+h) = \sin(a) + h\cos(a) - \frac{h^2}{2}\sin(a) + \frac{h^3}{3!}\cos(a+\theta h)$$

$h = 1° = \frac{\pi}{180} = 0.0174$
$\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.8660$

$$\sin(31°) = 0.5 + 0.0174 \times 0.8660 - \frac{0.0174^2}{2} \times 0.5 - \frac{0.0174^3}{3!}\cos(\frac{\pi}{6} + \theta\frac{\pi}{180})$$

$$|\frac{0.0174^3}{3!}\cos(\frac{\pi}{6} + \theta\frac{\pi}{180})| < 10^{-6}$$

donc à 10^{-6} , $\sin(31°) \simeq 0.513550$.
(La valeur fournie par le logiciel MATLAB est $\sin(31°) \simeq 0.51503807491005$).

Exercice : Calculer une approximation de Arctg (1.001) à 10^{-2} près.

1.7 Fonctions Réciproques (ou inverses)

1.7.1 Rappels:

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, on rappelle que :

(1) f est strictement croissante *si* ($x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$).

(2) f est strictement décroissante *si* ($x < y \Longrightarrow f(x) > f(y)$)

Remarques:

Si f est une fonction strictement croissante de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ *alors*

$$\forall x \in [a, b], a \leq x \leq b \Longrightarrow f(a) \leq f(x) \leq f(b)$$

d'où $f(a)$ est le minimum ($f(a) = m$) et $f(b)$ est le maximum ($f(b) = M$).

Donc $[f(a), f(b)] = [m, M] = f([a, b])$.

De même si f est strictement décroissante de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$, *on a* $[f(b), f(a)] = [m, M] = f([a, b])$.

Théorème:

f est une fonction continue et strictement croissante (resp. décroissante) sur un intervalle $[a, b]$,

alors f est une bijection de $[a, b]$ vers $[f(a), f(b)]$ (resp. $[f(b), f(a)]$).

démonstration:

Si f est une fonction continue et strictement croissante sur l'intervalle $[a, b]$ alors, d'après le théorème des valeurs intérmediaires, $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$

$\Longrightarrow f$ est surjective de $[a, b]$ dans $[f(a), f(b)]$.

Comme f est strictement croissante sur l'intervalle $[a, b]$, on a:

$\forall x, y \in [a, b], x \neq y \Longrightarrow \begin{cases} x < y & \Longrightarrow & f(x) < f(y) \\ x > y & \Longrightarrow & f(x) > f(y) \end{cases}$

Dans les deux cas, on a $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Donc.$f$ est injective sur $[a, b]$.

Conséquence:

Si f est une fonction continue strictement croissante (resp.strictement décroissante) de $[a, b] \longrightarrow [m, M]$

alors f admet une fonction reciproque notée f^{-1} avec $f^{-1} : [m, M] \longrightarrow [a, b]$.

Théorème:

Si f est une fonction continue et strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur un intervalle $[a, b]$, alors f admet une fonction réciproque f^{-1} continue et strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur $[f(a), f(b)]$ (resp. $[f(b), f(a)]$) vers $[a, b]$.

Preuve:

Montrons que si f est une fonction strictement croissante sur $[a, b]$ alors f^{-1} l'est sur $[f(a), f(b)]$.

Soit $x, y \in [f(a), f(b)]$, a-t-on, $x < y \overset{?}{\Longrightarrow} f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$

Démonstration par l'absurde.

Si pour tout $x, y \in [f(a), f(b)]$,on a $f^{-1}(x) \geq f^{-1}(y)$ alors (f est une fonction strictement croissante sur $[a, b]$) $f(f^{-1}(x)) \geq f(f^{-1}(y))$ $i.e. x \geq y$ ce qui contredit l'hypothèse $x < y$. Donc f^{-1} est strictement croissante.

Montrons que si f est une fonction continue sur $[a, b]$ alors f^{-1} l'est sur $[f(a), f(b)]$.

Soit $y_0 \in [f(a), f(b)]$, montrons que f^{-1} est continue en y_0. Il faut montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que : } |y - y_0| < \eta \Longrightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)|$$

$y_0 \in [f(a), f(b)] \Longrightarrow \exists\, x_0 \in [a, b]$ tel que $x_0 = f^{-1}(y_0)$.

Posons $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$ et $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$

f étant strictement croissante nous donne

Pour tout $x_0 \in]a, b[$ et $\forall \epsilon > 0$, on a : $x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon$

Comme f étant strictement croissante dans $[a, b]$,

$x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon \Rightarrow f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) < f(x_0 + \varepsilon)$ i.e. $_1 < y_0 < y_2$

D'autre part, $|y - y_0| < \eta \Leftrightarrow -\eta < y - y_0 < \eta \Leftrightarrow y_0 - \eta < y < y_0 + \eta$

Pour $\eta = \min\{y_0 - y_1, y_2 - y_0\}, |y - y_0| < \eta \Rightarrow y_0 + \eta < y_2$ et $y_1 < y_0 - \eta$

D'où : $y_1 < y_0 - \eta < y < y_0 + \eta < y_2$

$\Longrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_0 - \eta) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0 + \eta) < f^{-1}(y_2)$

$\Longrightarrow x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y_0 - \eta) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0 + \eta) < x_0 + \varepsilon$

Or $x_0 = f^{-1}(y_0)$ d'où

$f^{-1}(y_0) - \varepsilon < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_0) + \varepsilon \Longrightarrow |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0|) < \varepsilon.$

Graphe d'une fonction réciproque :

Dans un repère orthonormé le graphe de f^{-1},la fonction réciproque de f, est le symétrique par rapport à la première bissectrice (droite $y = x$) du graphe de la fonction f.

Exemple :

Si $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = x^2$ alors $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$ est la fonction réciproque de $f(x) = x^2$.

Pour $y_0 = f(x_0)$

$f'(x_0) = 2x_0 \Longrightarrow (f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{2\sqrt{y_0}}$.

1.7.2 Exemples de fonctions réciproques .

1) La fonction $f : x \in \mathbb{R}. \longrightarrow e^x \in \mathbb{R}^+$ est une fonction continue et strictement croissante. Sa fonction réciproque est par définition la fonction ln: $\mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$.

2) La fonction réciproque de la fonction sin

La restriction à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ de la fonction $y = \sin x$ est une fonction continue et strictement croissante de.$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$

Elle admet donc une fonction réciproque continue et strictement croissante, notée $Arc\sin$.

$$Arc\sin : [-1, 1] \longrightarrow [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

$Arc\sin(x)$ est l'arc dont le sinus est x. C'est la fonction réciproque de la fonction sin lorsque celle-ci est définie de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow [-1, 1]$.

$$\begin{array}{l} x = Arc\sin(y) \\ -1 \le y \le 1 \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} y = \sin(x) \\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2} \end{array}$$

3) La fonction réciproque de la fonction cos

La restriction à $[0, \pi]$ de la fonction $y = \cos(x)$ est une fonction continue strictement décroissante de $[0, \pi] \longrightarrow [-1, 1]$ Elle admet donc une fonction réciproque continue strictement décroissante, notée *Arccos*

$$Arc\cos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

$$\begin{array}{l} x = Arc\cos(y) \\ -1 \le y \le 1 \end{array} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} y = \cos(x) \\ 0 \le x \le \pi \end{array}$$

$$y' = \frac{1}{(\cos(y))'} = \frac{1}{-\sin(y)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Exemples :

1) Montrer que dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, $Arc\sin(\sin(x)) = \pi - x$
Soit $f(x) = Arc\sin(\sin(x))$
On a :

$D_f = \mathbb{R}$
$f(x)$ est periodique et de période 2π d'où l'étude sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
si $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Longrightarrow Arc\sin(\sin(x)) = x$
si $x \in [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \Longrightarrow -x \in [-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}] \Longrightarrow \pi - x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\sin(x) = \sin(\pi - x) \Longrightarrow Arc\sin(\sin(x)) = Arc\sin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$
$\Longrightarrow Arc\sin(\sin(x)) = \pi - x.$

2) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Arc\cos(x) + Arc\sin(x) = \frac{\pi}{2}$.
Soit $g(x) = Arc\cos(\cos(x))$
On a :

$D_g = \mathbb{R}$
g est une fonction paire $g(-x) = g(x)$.
g est périodique et de période 2π, d'où le domaine d'étude est $[-\pi, \pi]$.
$\forall x \in [-1, 1], Arc\sin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\Rightarrow \forall x \in [-1, 1], \frac{\pi}{2} - \arcsin(x) \in [0, \pi]$
$\Rightarrow \forall x \in [-1, 1], \cos(\frac{\pi}{2} - Arc\sin(x)) = \sin(Arc\sin(x)) = x$
$\Rightarrow \forall x \in [-1, 1], Arc\cos(\cos(-\frac{\pi}{2} - Arc\sin(x))) = \frac{\pi}{2} - Arc\sin(x) = Arc\cos(x)$
$\Rightarrow \forall x \in [-1, 1], Arc\cos(x) = \frac{\pi}{2} - Arc\sin(x).$

4) La fonction réciproque de $tg(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$,
La restriction à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ de la fonction $y = tg(x)$ est une fonction continue et strictement croissante de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ adns $\mathbb{R}$. Elle admet donc une fonction réciproque continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, noté $Arctg(x)$

$$\begin{gathered} tg :]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\longrightarrow]-\infty, +\infty[\\ Arctg(x) :]-\infty, +\infty[\longrightarrow]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}[\\ \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} tg(x) = -\infty; \ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} tg(x) = +\infty \\ \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} tg(x) = -\infty; \ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} tg(x) = +\infty \end{gathered}$$

$$\begin{array}{l} x = Arctg(y) \\ -\infty \leq y \leq +\infty \ (y \in \mathbb{R}) \end{array} \iff \begin{array}{l} y = tg(x) \\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \end{array}$$

Propriétés :

1) $y = Arctg(x)$ est une fonction impaire
2) et $Arctg(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
3) $Arctg(x) + Arctg(\frac{1}{x}) = \varepsilon\frac{\pi}{2}$ $\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon = 1 \text{ si } x > 0 \\ \varepsilon = -1 \text{ si } x > 0 \end{array} \right.$

Preuve:

1) parité : $-y = -tg(-x)$ avec $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \Longrightarrow Arctg(-x) = -y$
2)

$$x > 0 \Longrightarrow \frac{1}{x} > 0 \Longrightarrow Arctg(\frac{1}{x}) \in]0, \frac{\pi}{2}[\text{ et } tg(x) \in]0, \frac{\pi}{2}[$$
$$\Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi}{2} - Arctg(\frac{1}{x}) \in]0, \frac{\pi}{2}[\\ tg(Arctg(x)) = x \\ tg(\frac{\pi}{2} - Arctg(\frac{1}{x})) = \cot g(ARctg(\frac{1}{x})) = \frac{1}{tg(Arctg(\frac{1}{x}))} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \end{array} \right.$$

d'où

$$tg(\frac{\pi}{2} - Arctg(\frac{1}{x})) = tg(Arctg(x)) = x \Longrightarrow \frac{\pi}{2} - Arctg(\frac{1}{x}) = Arctg(x)$$

donc

$$Arctg(x) + Artg(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2} \text{ si } x > 0.$$

Si $x < 0$ alors $-x > 0$

$$\begin{array}{c} Arctg(-x) + Arctg(-\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2} \\ \Longrightarrow -Arctg(x) - Arctg(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2} \\ \Longrightarrow Arctg(x) + Arctg(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}. \end{array}$$

1.8 Fonctions hyperboliques

1.8.1 Définitions

Les fonctions **cosinus hyperbolique**, **sinus hyperbolique**, **tangente hyperbolique** notées respectivement *ch*, *sh* et *th* sont définies pour $x \in \mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \mathrm{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \mathrm{th}x = \frac{\mathrm{sh}x}{\mathrm{ch}x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$$

ch est la *partie paire* de l'exponentielle, sh en est la *partie impaire* . La fonction th est une fonction impaire .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \mathrm{ch}x + \mathrm{sh}x &= e^x \\ \mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x &= e^{-x} \end{cases}$$

On obtient ainsi l'identité fondamentale :

$$\boxed{\mathrm{ch}^2x - \mathrm{sh}^2x = 1}$$

Les fonctions ch, sh et th sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ (\mathrm{sh})'(x) = \mathrm{ch}x,\ (\mathrm{ch})'(x) = \mathrm{sh}x,\ (\mathrm{th})'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2x} = 1 - \mathrm{th}^2x}$$

Les limites l'infini sont :

$$\lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}x = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}x = +\infty,\ \lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}x = 1$$

On retiendra aussi :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{ch}x}{\frac{e^x}{2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{sh}x}{\frac{e^x}{2}} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sh}x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{th}x}{x} = 1,\ \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{ch}x - 1}{\frac{x^2}{2}} = 1$$

Le nom de *fonctions hyperboliques* est justifié par le fait que

$$(x = \mathrm{ch}t, y = \mathrm{sh}t)$$

est un paramétrage de la branche d'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$ avec $x > 0$.

1.8.2 Fonction réciproque

1. La fonction sinus hyperbolique est définie strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$, c'est donc une application bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Elle admet donc une fonction réciproque, continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ que l'on note argsh :

$$y = \operatorname{argsh}(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{sh}(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

La fonction argsh est dérivable et on a d'aprés la deérivé de la fonction réciproque $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{argsh}(x)' = \frac{1}{(\operatorname{sh}(y))'} = \frac{1}{\operatorname{ch}(y)} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh}^2(y)+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

La fonction argsh est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$

d'apres la formule de $\operatorname{argsh}(x)'$ on peut par integration montrer que

$$\operatorname{argsh}x = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

ou directement :

$$y = \operatorname{argsh}(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{sh}(y)$$

or

$$e^y = \operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(y)$$

donc

$$y = \ln(\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(y)) = \ln(\sqrt{\operatorname{sh}^2(y)+1} + \operatorname{sh}(y)) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$$

2. Sur $[0; +\infty[$, la fonction cosinus hyperbolique est définie strictement croissante et continue et à valeur dans $[1; +\infty[$, la restriction à l'intervalle $[0; +\infty[$ de la fonction cosinus hyperbolique est une application bijective de $[0; +\infty[$ dans $[1; +\infty[$. Elle admet donc une fonction réciproque, continue et strictement croissante sur $[1; +\infty[$ que l'on note argch :

$$y = \operatorname{argch}(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{ch}(y) = \frac{e^y + e^{-y}}{2}$$

La fonction argch est dérivable et on a d'aprés la deérivé de la fonction réciproque

$\forall x \in [1; +\infty[$

$$\operatorname{argch}(x)' = \frac{1}{(\operatorname{ch}(y))'} = \frac{1}{\operatorname{sh}(y)} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(y)-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

La fonction argsh est donc strictement croissante sur $[1; +\infty[$
d'apres la formule de $\operatorname{argch}(x)'$ on peut par integration montrer que

$$\operatorname{argch}x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$$

ou directement :

$$y = \operatorname{argch}(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{ch}(y)$$

or

$$e^y = \operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(y)$$

donc

$$y = \ln(\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(y)) = \ln(\operatorname{ch}(y) + \sqrt{\operatorname{ch}^2(y)-1}) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$$

3. La fonction tangente hyperbolique est définie strictement croissante et continue sur , c'est donc une application bijective de $\mathbb{R}$ dans]-1 ;1[. Elle admet donc une fonction réciproque, continue et strictement croissante sur $]-1;1[$ que l'on note argth :

$$y = \operatorname{argth}(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{th}(y)$$

La fonction argth est dérivable et on a d'aprés la deérivé de la fonction réciproque $\forall x \in]-1,1[$

$$\operatorname{argth}(x)' = \frac{1}{(\operatorname{th}(y))'} = \frac{1}{1-\operatorname{th}^2(y)} = \frac{1}{1-x^2}$$

La fonction argth est donc strictement croissante sur $]-1;1[$ puisque $1-x^2 > 0$ sur $]-1;1[$ d'apres la formule de $\operatorname{argch}(x)'$ on peut par integration montrer que

$$\operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$$

ou directement :

$$y = \operatorname{argth}(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{th}(y) = \frac{e^{2y}-1}{e^{2y}+1}$$

donc

$$xe^{2y} + x = e^{2y} - 1$$

et

$$e^{2y} = \frac{1+x}{1-x}$$

$$2y = \ln\frac{1+x}{1-x}$$

d'ou

$$y = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$$

1.8.3 Formulaire

a, b, p, q, x désignent des réels.

Addition

1. $\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}a.\operatorname{ch}b + \operatorname{sh}a.\operatorname{sh}b$
2. $\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh}a.\operatorname{ch}b + \operatorname{ch}a.\operatorname{sh}b$
3. $\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th}a+\operatorname{th}b}{1+\operatorname{th}a.\operatorname{th}b}$

Duplication

1. $\operatorname{ch}2x = \operatorname{ch}^2x + \operatorname{sh}^2x = 2\operatorname{ch}^2x - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2x$
2. $\operatorname{sh}^2x = \frac{\operatorname{ch}2x-1}{2}$ et $\operatorname{ch}^2x = \frac{\operatorname{ch}2x+1}{2}$
3. $\operatorname{sh}2x = 2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x$
4. $\operatorname{th}2x = \frac{2\operatorname{th}x}{1+\operatorname{th}^2x}$

Si on pose $t = \operatorname{th}\frac{x}{2}$ alors :

$$\operatorname{ch}x = \frac{1+t^2}{1-t^2}, \operatorname{sh}x = \frac{2t}{1-t^2}, \operatorname{th}x = \frac{2t}{1+t^2}$$

Transformation de produit en somme

1. $\mathrm{ch}a.\mathrm{ch}b = \frac{1}{2}\left(\mathrm{ch}(a+b) + \mathrm{ch}(a-b)\right)$
2. $\mathrm{sh}a.\mathrm{sh}b = \frac{1}{2}\left(\mathrm{ch}(a+b) - \mathrm{ch}(a-b)\right)$
3. $\mathrm{sh}a.\mathrm{ch}b = \frac{1}{2}\left(\mathrm{sh}(a+b) + \mathrm{sh}(a-b)\right)$

Transformation de somme en produit

1. $\mathrm{ch}p + \mathrm{ch}q = 2\mathrm{ch}\frac{p+q}{2}\mathrm{ch}\frac{p-q}{2}$
2. $\mathrm{ch}p - \mathrm{ch}q = 2\mathrm{sh}\frac{p+q}{2}\mathrm{sh}\frac{p-q}{2}$
3. $\mathrm{sh}p + \mathrm{sh}q = 2\mathrm{sh}\frac{p+q}{2}\mathrm{ch}\frac{p-q}{2}$
4. $\mathrm{th}p + \mathrm{th}q = \frac{\mathrm{sh}(p+q)}{\mathrm{ch}p.\mathrm{ch}q}$