Université Mohammed V - Agdal
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique
Avenue Ibn Batouta, B.P. 1014
Rabat, Maroc

Filière DEUG :

Sciences Mathématiques et Informatique (SMI)
et
Sciences Mathématiques (SM)

Module Mathématiques I

Analyse I

Chapitre I :

SUITES NUMERIQUES

Par

Saïd EL HAJJI
Groupe d'Analyse Numérique et Optimisation
Email : elhajji@fsr.ac.ma

et

Samir HAKAM
Email : s-hakam@fsr.ac.ma

Année 2003-2004

Chapitre I :
SUITES NUMERIQUES[1]

Objectif du chapitre :

1) Donner la définition d'une suite et utiliser les notations adéquates
2) "Déterminer" le terme général d'une suite
3) Utiliser les raisonnements par l'absurde et par récurrence
4) Etudier la monotonie d'une suite.
5) Etudier la nature d'une suite
6) Résoudre certains exercices et problèmes implicant des suites.

Plan du chapitre :

1) Corps des réels :
   1.1 : Notion de fonctions et notations.
   1.2 : Construction sommaire de $\mathbb{R}$.

2) Suites numériques:
   2.1 : Définitions et notations.
   2.2 : Suites particulières.
   2.3 : Suites monotones (croissance ou décroissance)
   2.4 : Nature (convergence ou divergence) d'une suite
   2.5 : Etude de suites particulières.

1) Corps des réels :

1.1 : Notion de fonctions et notations.

On suppose acquise la notion intuitive d'ensemble.
On détermine un ensemble E en explicitant ses éléments ou par compréhension $E = \{x \ / \ x$ vérifie une propriété $(P)\}$.

Exemple : Si $E_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ alors

$E_2 = \{x \in E_1 \ / \ x$ vérifie $2 \leq x \leq 5\}$ est dite expression par compréhension

$E_2 = \{2, 3, 4\}$ est dite expression explicite

Soit E un ensemble, on dit que A est une partie (ou un sous ensemble) de E si tout élément de A est un élément de E. On dit aussi que A est inclus dans E et on note $A \subset E$.

$$A \subset E \Longleftrightarrow (\forall x, x \in A \Rightarrow x \in E)$$

[1] Analyse I SMI & SM S. EL HAJJI

Remarque :

Le symbole $\in$ dénote l'appartenance.

$x \in E \Longleftrightarrow \{x\} \subset E$.

La *notation $x \in x$ n'a pas de sens !*

Définition : Une fonction f d'un ensemble A vers un ensemble B, on note $f : A \to B$, est une rélation qui à chaque élément de A associe au plus plus un seul élément de B. On exprime une fonction de A vers B sous la forme:

$$\begin{cases} f : A \to B \\ \quad x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

A est appelé l'ensemble de départ et B l'ensemble d'arrivée de la fonction f.
De plus, l'ensemble des éléments de A qui possédent une image s'appelle le domaine de f (noté $dom(f)$ ou D_f) et l'ensemble des éléments de B qui sont des images, s'appelle image de f (noté $im(f)$ ou $Im(f)$). Ainsi $dom(f) \subseteq A$ et $im(f) \subseteq B$.
De facon générale, lorsque on détermine le domaine d'une fonction, il faut exclure du $dom(f)$ les valeurs :

a) qui annulent le dénominateur de la fonction f

b) qui donnent une quantité négative sous une racine paire

c)...

ainsi $dom(f)$ est l'ensemble des éléments de A , pour lesquels $f(x)$ existe c'est à dire (noté *càd ou i.e.)* est calculable.
Si $f : A \to B$, on note $dom(f) = \{x \in A \ / \ f(x) \text{ existe}\}$.

Exemples :
1) Soit $f : x \longmapsto f(x) = \frac{x}{\sqrt[6]{9-3x}} \in \mathbb{R}$
Puisque on ne peut pas diviser par 0 ni extraire la raciune sizième d'un nombre négatif, alors :

$dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ (9-3x) \neq 0 \text{ et } (9-3x) \geq 0\}$

càd $dom(f) = \{x \in \mathbb{R} \ / \ (9-3x) \succ 0\} = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \prec 3\}$

que l'on écrit sous la forme $dom(f) = \left]-\infty, 3\right[$.
2) Soit $f : x \longmapsto f(x) = \ln(-|x|)$
On a : $dom(f) = \varnothing$!

1.2 : Construction axiomatique de $\mathbb{R}$ et Propriétés de base [2]:

a) Construction sommaire et axiomatique du corps des Réels

L'ensemble $\mathbb{N}$ (noté aussi N ou IN) $= \{0, 1, 2, 3, ...\}$, dit ensemble des nombres entiers naturels ou des entiers naturels, a été introduit pour compter.

L'ensemble $\mathbb{Z}$ (noté aussi Z ou IZ)$= \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$, dit ensemble des nombres relatifs ou des entiers relatifs, a été introduit pour résoudre l'équation : $b + x = a$ où a et b sont des entiers naturels.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ (noté aussi Q ou IQ) , dit ensemble des nombres rationnels, a été introduit pour résoudre l'équation : $b\ x = a$ où a et b sont des nombres relatifs

[2] Analyse I SMI & SM S. EL HAJJI

avec $b \neq 0$. Par définition si $x \in \mathbb{Q}$ alors $x = \frac{p}{q}$ où p et q sont des nombres relatifs premiers entre eux avec $q \neq 0$ (on dit que la fraction $\frac{p}{q}$ est irreductible).

Propriètè : Si x est solution de l'équation $x^2 = 2$ alors $x \notin \mathbb{Q}$. On dit que x est irrationnel.
Démonstration : Elle se fait par l'absurde. On suppose que $x = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$ sont premiers entre eux avec $q \neq 0$. On a alors $p^2 = 2q^2$. p^2 est pair donc p est aussi pair (si p est impair alors $p = 2k+1$ et $p^2 = 4k^2+4k+1 = 2(2k^2+2k)+1$ est impair). Ainsi $p = 2k$ donc $p^2 = 4k^2 = 2q^2$. Donc $2k^2 = q^2$. Donc q est pair. Ce qui est impossible car la fraction $\frac{p}{q}$ est irreductible.

Définition : On note par $\mathbb{R}$ (noté aussi R ou IR) l'ensemble des nombres réels. Il a été introduit pout compléter l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. On dit que x est un nombre réel si et seulement si:
ou bien $x \in \mathbb{Q}$, x est dit rationnel
ou bien $x \notin \mathbb{Q}$, x est dit irrationnel.
Parmi les réels qui sont irrationnels, on peut citer : $\sqrt{2}, \pi, e, \ln(2)$.

*Remarque : On peut définir un nombre réel à partir de son développement décimal c'est à dire un réel x peut être vu, sous forme numérique, comme un entier relatif constituant sa partie entière (si $x \in \mathbb{R}$, sa partie entière est notée $E(x)$ ou $[x]$ et on a $E(x) = [x] =$ au plus grand entier inf*érieur ou égale *à x) suivie (séparée par une virgule) d'une infinité de chiffres constituant sa partie décimale. Exemple : $\pi = 3,14159265958979323...$Cette définition (ou notation) dite représentation arithmétique (voir cours d'Analyse Numérique au 2^{nd} semestre) d'un nombre réel pose un certain nombre de problèmes.*

La construction de l'ensemble des nombres réels date de 1870 et repose sur les axiomes de base :
1) $(\mathbb{R}, +, *)$ est un corps commutatif
2) $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonnée : $\forall(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a : $x \leq y$ ou $y \leq x$.
3) La relation d'ordre (inégalité) est compatible avec les opérations de $\mathbb{R}$
i) La relation d'ordre $\leq$ est compatible avec l'addition $+$
càd $\forall\ x \in \mathbb{R}$, $\forall x_1 \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$ et $\forall y_1 \in \mathbb{R}$, si $x \leq x_1$ et $y \leq y_1$ alors $x + y \leq x_1 + y_1$
ii) La relation d'ordre $\leq$ est compatible avec la multiplication $*$
càd $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$ et $\forall z \in \mathbb{R}^+$ ($z \geq 0$) alors $x * y > 0$.
4) Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.

La relation d'ordre total permet de définir la fonction valeur absolue dans $\mathbb{R}$.
Définition : La valeur absolue dans IR est une application

$$\begin{cases} || : IR \to IR^+ \\ \qquad\quad x \mapsto |x| \end{cases}$$

et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$
Propriétés :

1) $|a| = 0 \Longleftrightarrow a = 0$
2) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, |a.b| = |a|\ |b|$
3) Inégalité triangulaire:

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, |a+b| \leq |a| + |b|$$

4) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $-x \leq |x| \leq x$.
5) $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \left|\ |a| - |b|\ \right| \leq |a-b|$.

Démonstration de l'inégalité triangulaire 5)
Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a: $a = a - b + b \Longrightarrow |a| \leq |a-b| + |b|$ (d'apres 3))$\Rightarrow |a| - |b| \leq |a-b|$
De même : $b = b - a + a \Longrightarrow |b| \leq |a-b| + |a| \Longrightarrow |b| - |a| \leq |a-b|$
Donc $\left|\ |a| - |b|\ \right| \leq |a-b|$.

Remarque :

1) L'inégalité triangulaire

$$\left|\ |a| - |b|\ \right| \leq |a+b| \leq |a| + |b|$$

peut être montrer en élévant au carré, ce qui donne :

$$a^2 - 2|a||b| + b^2 \leq a^2 + 2ab + b^2 \leq a^2 + 2|a||b| + b^2 \Leftrightarrow -|ab| \leq ab \leq |ab|.$$

2) Il existe plusieurs variantes de l'inégalité triangulaire, par exemple :

$$\left|\ |a| - |b|\ \right| \leq |a-b| \leq |a| + |b|$$

obtenue en changeant b *en* $-b$.

b) Majorant, minorant d'une partie de IR

Définition : Soit $A \subset IR$: une partie de IR

On dit que $m \in IR$ est un majorant de A si et seulement si $\forall x \in A$, $x \leq m$

On dit que $m \in IR$ est un minorant de A si et seulement si $\forall x \in A$, $x \geq m$

On dit que A est bornée ssi elle est minoré et majoré càd $\exists m$ et $\exists M$: $\forall x \in A$, $m \leq x \leq M$.

Exemple :

$]0+\infty[$ *est minorée par* 0 on dit aussi 0 est un minorant de $]0+\infty[$)

1 *est un majorant de* $]-\infty, 0[$

L'intervalle $]-15, 14[$ *est borné dans* IR *(majorée par 14 et minorée par -15).*

Borne inférieure, borne supérieure :
Définition:

On dit que b est la borne supérieure de $A \Longleftrightarrow b$ est le plus petit des majorants de A

On dit que b est la borne inférieure de $A \Longleftrightarrow b$ est le plus grand des minorants de A.

Exemple : 6 *est la borne inférieure de* $]6+\infty[$.

Caractéristiques des bornes :

b est la borne supérieure de $A \Leftrightarrow . \begin{cases} 1) \ b \text{ est un majorant de } A \ (\forall a \in A \ , \ a \leq b) \\ 2).\forall \ \epsilon > 0, \ \exists a \in A : b - \varepsilon < a \leq b \end{cases}$

b est la borne inférieure de A $\Longleftrightarrow . \begin{cases} 1) \ b \text{ est un minorant de } A \ (\forall a \in A, \ a \geq b) \\ 2).\forall \ \epsilon > 0 \ \exists a \in A, \ b \leq a < b + \epsilon \end{cases}$

Propriétés des bornes (admises) :

Toute partie de IR non vide et majorée admet une borne supérieure

Toute partie de IR non vide et minorée admet une borne inférieure.

Propriété : IR est un corps archimédien $\Leftrightarrow \forall (x, y) \in IR_+^2$,$\exists n \in IN^*$ tel que $nx > yx > 0$.

Remarque : IR est un corps archimédien $\Leftrightarrow \forall x > 0, \forall y \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}$ tel que $nx \leq y \leq (n+1)x$.

Démonstration : La démonstration se fait par l'absurde. On suppose que IR est non archimédien

càd $\exists (x_o, y_o) \in IR_+^2, \forall n \in IN^* : nx_0 \leq y_o$

Soit $E = \{nx_o, n \in IN^*\}$.

On a : $E \neq \phi$, E est une partie deIR et E est une partie majorée de IR (par y_0) donc E admet une borne supérieure. Soit b cette borne supérieure. On a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists e \in E : \ b - \varepsilon < e \leq b$$

Comme $e \in E \Rightarrow \exists p \in IN^* : \ e = px_o$ donc

$$\forall \varepsilon > 0, \exists p \in IN^* : \ b - \varepsilon < px_o \leq b$$

Si on prend $\varepsilon = \frac{b}{2}$ (par exemple), on aura : $\frac{b}{2} < px_o \leq b \Rightarrow px_o \leq b < (2p)x_o \Rightarrow b$ n'est pas la borne supérieure de E.

Rappels : Si a, b, x_0 désignent des réels tels que $a < x_0 < b$.

On appelle segment un ensemble de la forme $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}$.

On dit qu'une partie I de R est un intervalle si pour tout $a, \ b \ \in I$, on a $[a, b] \subset I$.

Les intervalles ouverts sont :$]a, b[,]a, +\infty[,] - \infty, b[$ et $\mathbb{R}$.

Les intervalles fermés sont : $[a, b], [a, +\infty[,] - \infty, b]$ et $\mathbb{R}$.

Un voisinage de x_0 est un intervalle ouvert de la forme $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$,$\forall \varepsilon > 0$.

2) Suites Réelles [3]:

2.1 : Définitions et notations :

D'une façon générale, on définit une suite comme une succession ordonnée d'éléments pris dans un ensemble donné. On dit aussi qu'une suite est une énumération d'une infinité de termes

Définition : Une suite numérique, dite aussi suite réelle, est une fonction u dont le domaine de définition est un sous - ensemble de $\mathbb{N}$ et dont l'image est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Ainsi une suite réelle est une fonction :

[3] Analyse I SMI & SM S. EL HAJJI & S. HAKAM

$$\begin{cases} u : P \subset IN \longrightarrow IR \\ \quad n \mapsto u_n \end{cases}$$

On pose : $u(n) = u_n$ et on appelle u_n le terme général de la suite. u_n est aussi appelé terme de rang n.
Si $P = \mathbb{N}$, la suite de terme général $u_n$sera notée par $(u_n)_n$ ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $\{u_0, u_1, ..., u_n, ...\}$ (dite écriture en extension). u_{p-1} désigne le p^{eme} terme de la suite.

Remarque:

1) On définit une suite notée (u_n) par son terme général u_n et par son premier terme (on suppose ici que c'est u_0). La suite est alors déterminée par une équation donnant u_n en fonction de n. Une suite peut être également définie par la valeur du premier terme et par une relation de récurrence, c'est-à-dire une relation liant plusieurs termes généraux de rangs différents.

2) Toute fonction $u : P \subset \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ définie une suite réelle c'est à dire à tout entier $n \in P$, elle associe un nombre réel $u(n)$ que l'on notera u_n et la suite associée est notée $(u_n)_{n\in P}$

Exemples:
1) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite de terme général définie pour tout $n \geq 1$ par $u_n = \frac{1}{n}$.
2) Soit $(u_n)_n$ la suite de terme général définie pour tout $n \geq 0$ par $u_n = cos(n\pi)$
3) Soit $(u_n)_n$ la suite de terme général définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n \text{ pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

3) La fonction $u : n \geq 4 \to u(n) = \frac{2}{3^n}$, définie la suite réelle $(u_n)_{n\geq 4}$ de terme général :

$$u_n = \frac{2}{3^n}, \text{pour tout } n \geq 4.$$

On a : $dom(u) = \{n \in \mathbb{N} \ / \ n \geq 4\} = \{4, 5, 6, ...\} = P$ et $im(u) = \left\{\frac{2}{3^4}, \frac{2}{3^5}, \frac{2}{3^6}, ...\right\} = (u_n)_{n\geq 4}$.

Remarque : Soient $(u_n)_n$ une suite et f une fonction, telles que $u_n = f(n)$ si $n \geq m$ où *$m \in \mathbb{N}$. Alors l'étude du terme général u_n revient à l'étude de la fonction f dans le domaine de la suite $(u_n)_n$.*

Exemple :
1) Soit la suite définie par $u(n) = \frac{n^3+100}{(n-1)^3}$. Déterminer les 3 premiers termes de la suite.
On a : $dom(u) = \mathbb{N} - \{1\}$,
et $u_0 = 100, u_2 = 108, u_3 = \frac{3^3+100}{2^3} = \frac{127}{8}, u_4 = \frac{4^3+100}{3^3} = \frac{164}{27}$.
2) Soit la suite définie par $u(n) = \sin(n)$. Déterminer les 3 premiers termes de la suite.(sur une calculatrice, il faut choisir le mode radian).
On a : $dom(u) = \mathbb{N}$,
et $u_0 = \sin(0) = 0, u_1 = \sin(1) = 0.841\,47, u_2 = \sin(2) = 0.909\,30$.
3) Déterminer le terme général de la suite $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{3}{10}, \frac{4}{17}, ...\right\}$.

En observant les termes de la suite, on constate que le numérateur de chaque terme correspond aux termes de la suite $(n)_n$ et que le dénominateur correspond aux termes de la suite $(n^2+1)_n$. On peut en déduire que le terme général de la suite est définie par $u_n = \frac{n}{n^2+1}$.Ceci est d'ailleurs vérifié pour $n = 1, 2, 3, 4$.

Remarque : Pour représenter graphiquement une suite $(u_n)_n$, il suffit de situer dans le plan cartésien les points (n, u_n), où n appartient au domaine de définition de la suite.

2.2 : Suites particulières [4]:

a) Principe du raisonnement par récurrence :
Soit $P(n)$ une propriété qui dépend d'un entier naturel n.
Pour démontrer que la propriété $P(n)$ est vraie, quel que soit $n \in \mathbb{N}$ (ou $n \in \mathbb{N}^*$), on démontre que

i) $P(0)$ (ou $P(1)$) est vraie

ii) la propriété $P(n)$ est récurrente, c'est à dire, si $P(n)$ est vraie pour $n \in \mathbb{N}$ (ou $n \in \mathbb{N}^*$), alors $P(n+1)$ est vraie (propriété d'hérédité).

Exemple : Démontrer, par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a } 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Pour $n = 1$, on a $S_1 = 1^2$ et $\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$
On suppose que la relation est vraie à l'ordre n et on la démontre à l'ordre $(n+1)$.
On a $S_{n+1} = 1^2+2^2+3^2+...+n^2+(n+1)^2 = S_n+(n+1)^2$ avec $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Donc $S_{n+1} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}$
$= \frac{1}{6}(n+1)[n(2n+1) + 6(n+1)] = \frac{1}{6}(n+1)[7n + 2n^2 + 6]$
càd $S_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)\,(n+2)\,2n+3)$.

b) Suites arithmétiques :
Soit $(u_n)_n$ définie par u_0 donné, $u_{n+1} = u_n + r$ où $r \in \mathbb{R}$. Cette suite est dite suite arithmétique ou progression arithmétique et r est appelé la raison de la suite. La différence entre deux termes successifs est constante.
Quels que soient les entiers n et p, on a (démonstration par recurrence) : $u_n = u_p + (n-p)r$ et, en particulier (prendre $p = 0$), on a : $\forall\ n$, $u_n = u_0 + nr$.

c) Suites géomètriques :
Soit $(u_n)_n$ définie par u_0 donné, $u_{n+1} = qu_n$ où $q \in \mathbb{R}$. Cette suite est dite suite géométrique ou progression géométrique et q est appelé la raison de la suite. Le rapport de deux termes successifs est constant.
Que quels que soient les entiers n et p, on a (démonstration par recurrence) : $u_n = u_p q^{(n-p)}$ et, en particulier (prendre $p = 0$), on a : $\forall n$, $u_n = u_0 q^n$.

c) Suites récurrentes [5]:

[4] Analyse I SMI & SM S. EL HAJJI
[5] Analyse I SMI & SM S. EL HAJJI

Définition : Une suite est définie par récurrence lorsque la valeur du premier terme ou des premiers termes est donnée et que le terme général est définie en fonction du terme précédent ou des termes précédents. On dit qu'elle est définie par une relation de récurrence c'est à dire on peut calculer u_n en fonction de $u_1, u_2, ..., u_{n-1}$ (pas forcément tous). Une suite récurrente s' écrit sous la forme $u_n = F(u_{n-1,} u_{n-2}, ...)$ *où F est une fonction donnée ou* $u_n = G(u_{n,} u_{n-1,} u_{n-2}, ...)$ *où G est une fonction donnée.*

Exemple :
1) Les suites arithmétiques et géomètriques sont des suites recurrentes.
2) Calculer les 3 premiers termes de la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n \text{ pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

On a $u_0 = 1$ donc $u_1 = 2u_0 = 2, u_2 = 2u_1 = 4, u_3 = 2u_2 = 8$.
3) Suites Arithmético-géométrique : Ce sont des suites $(u_n)_n$ dont le terme général est définie par :

$$\begin{cases} u_0 \text{ donnée} \\ u_{n+1} = au_n + b \text{ pour tout } n \geq 0 \end{cases}$$

où a, b sont des réels donnés.
4) Calculer les 2 premiers termes de la suite $(u_n)_n$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_n = \frac{3}{2+u_{n-1}}, \text{ pour tout } n \geq 1. \end{cases}$$

On a $u_0 = 0$ donc $u_1 = \frac{3}{2+u_0} = \frac{3}{2}, u_2 = \frac{3}{2+u_1} = \frac{3}{2+\frac{3}{2}} = \frac{6}{7}$
5) Calculer les 2 premiers termes de la suite de Fibonacci $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 1, \quad u_2 = 1, \\ u_n = u_{n-2} + u_{n-1}, \text{si } n \geq 3. \end{cases}$$

On a $u_1 = u_2 = 1$ donc $u_3 = u_1 + u_2 = 1 + 1 = 2$ et $u_4 = u_2 + u_3 = 1 + 2 = 3$.

2.3 Suites monotones (croissantes, décroissantes) [6]:

Suites bornées:
Définition : Une suite $(u_n)_n$, où $n \in \mathbb{N}$, est

a) majorée (ou bornée supérieurement) s'il existe un nombre $M \in \mathbb{R}$, tel que $u_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$. On dit que M est un majorant.

b) minorée (ou bornée inférieurement) s'il existe un nombre $m \in \mathbb{R}$, tel que $m \leq u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$. On dit que m est un minorant.

c) bornée si elle est majorée et minorée c'est à dire s'il existe deux nombres M et $m \in \mathbb{R}$, tel que $m \leq u_n \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

[6] Analyse I SMI & SM S. EL HAJJI

Remarque :
La suite (u_n) est majorée $\Leftrightarrow$ l'ensemble $E = \{u_n, n \in IN\}$ est majorée.
La suite (u_n) est minoré $\Longleftrightarrow \{u_n, n \in IN\}$ minoré.
La suite $(u_n)_{n\in IN}$ est bornée $\Longleftrightarrow \{u_n, n \in IN\}$ borné.

Exemples :
1) Soit la suite $(\frac{n-1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$. Cette suite est bornée car $0 \leq \frac{n-1}{n} \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
2) Soit la suite $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette suite est non bornée. Elle est minorée par 0 (car $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 \geq 0$) et non majorée.

Définition : Une suite $(u_n)_n$, où $n \in \mathbb{N}$, est :
a) croissante si $u_n \leq u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ càd $u_0 \leq u_1 \leq ... \leq u_n \leq ....$
b) strictement croissante si : $u_n < u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
c) décroissante si $u_n \geq u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
d) strictement décroissante si : $u_n > u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
e) stationnaire si $u_n = u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Remarque : La suite $(u_n)_{n\in IN}$ est dite croissante $\Longleftrightarrow \forall (p, q) \in INxIN : p > q \Rightarrow u_p \geq u_q$.

Etudier la monotonie d'une suite revient à étudier sa croissance ou sa décroissance de la suite.

Remarque : Pour étudier la monotonie d'une suite $(u_n)_n$, on peut :
1) Comparer u_n et u_{n+1} (il y a plusieurs façons de le faire)
2) Utiliser, dans certains cas, la dérivée de la fonction $f(x)$ avec $x \in [0, +\infty[$ (où $[m, +\infty[$ avec $m \geq 1$) où $u_n = f(n)$.
3) "Analyser"

Exemples :
1) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \frac{1}{n^2}$.
Puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n^2}$, on a $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2}$.
Ainsi $\frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2}$ car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 < (n+1)^2$.
Donc la suite $(\frac{1}{n^2})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante.
On aurait pu le montrer en considérant la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = f(n)$).Puisque $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, $\forall x \in [1, +\infty[$, la fonction f est strictement décroissante dans $[1, +\infty[$, on en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ l'est aussi.
2) Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \frac{2^n}{n!}.(0! = 1)$
La présence du factorielle nous empêche d'étudier le comportement de la suite à l'aide de la dérivée. On va comparer deux termes consécutifs.
On a $u_n = \frac{2^n}{n!}$ et $u_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$.
On a $u_1 = \frac{2}{1!} = 2 \leq u_2 = \frac{2^2}{2!}. = 2 \leq u_3 = \frac{2^3}{3!}. = \frac{4}{3} \leq u_4 = \frac{2^4}{4!} = \frac{2}{3}$ Les termes semblent décroître. A-t-on $\forall n$, $u_{n+1} \leq u_n$? (On peut aussi le montrer par recurrence).
On a $u_2 = 2 \leq u_3 = \frac{4}{3} \leq u_4 = \frac{2}{3}$. Pour montrer la décroissance, il faut montrer que pour tout n, $u_{n+1} \leq u_n$.

$u_{n+1} \overset{?}{\leq} u_n$ revient à $\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \overset{?}{\leq} \frac{2^n}{n!}$ càd $n!2^{n+1} \overset{?}{\leq} (n+1)!2^n$ càd $2 \overset{?}{\leq} (n+1)$. Or cette inégalité est vérifié pour tout $n \geq 1$ donc $\forall\, n \geq 1$, on a $u_{n+1} \leq u_n$.

2.4 : Nature d'une suite [7]:

Définition : 1) Une suite $(u_n)_n$ converge (ou est convergente) vers $L \in \mathbb{R}$ quand $n \longrightarrow +\infty$, on note $(u_n)_n$ C.V. vers L, si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N : |u_n - L| < \epsilon$$

c.à.d: à partir d'un certain rang (N_ε) (N_ε est toujours à calculer) les termes de la suite s'approchent de L.
On écrit alors $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n)_n = L$ où $L \in \mathbb{R}$.

Remarque : $|u_n - L| < \varepsilon \Longleftrightarrow -\varepsilon < u_n - L < \varepsilon$
$\Longleftrightarrow L - \varepsilon \leq u_n \leq L + \varepsilon \Leftrightarrow u_n \in \,]L - \varepsilon, L + \varepsilon[\,.$

Si la suite $(u_n)_n$ C.V. vers L, on dit qu'à partir d'un certain rang N, u_n appartient à un voisinage de L. Un voisinage de L est un intervalle ouvert de la forme $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$.

Cette définition de la convergence est formellement adéquate mais elle n'est pas d'utilisation simple.

Exemples :
1) La suite $(u_n)_n$ dont le terme général est définie par $u_n = \frac{1}{n}$, où $n \geq 1$ converge vers 0.
En effet, $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^* : N * \epsilon > 1$ (cela provient du fait que $\mathbb{R}$ est archimédien) (on peut prendre $N = \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1$). Donc $\forall n > N$, on a $\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \epsilon \Rightarrow |u_n| = \frac{1}{n} < \epsilon$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

2) La suite $(u_n)_n$ dont le terme général est définie par $u_n = 2^{\frac{1}{n}}$, où $n \geq 1$, converge vers 1.
$\forall n \geq 1, u_n = 2^{\frac{1}{n}} = \sqrt[\frac{1}{n}]{2} > 1$, $2^{\frac{1}{n}} = 1 + v_n$ où $v_n > 0$. Donc tout revient à étudier la convergence de la suite $(v_n)_n$.
Comme, $\forall x > 0$, on a, (parrecurrence), $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
Donc $\forall n \geq 1$, $2 = \left(2^{\frac{1}{n}}\right)^n = (1+v_n)^n \geq 1 + nv_n \Rightarrow 1 \geq nv_n$ càd $v_n \leq \frac{1}{n}$
Ainsi, $\forall n \geq N_\epsilon = \left[\frac{1}{\epsilon}\right] + 1, |v_n - 0| = |v_n| \leq \frac{1}{n} < \epsilon$ càd la suite $(v_n)_n$ converge vers 0.
Comme $v_n = (u_n - 1)$ et que la suite $(v_n)_n$ converge vers 0 alors la suite $(u_n)_n$ converge vers 1.

Remarque fondamentale : Soit une suite $(u_n)_n$ et une fonction f, telles que $u_n = f(n)$ si $n \geq m$ où $m \in \mathbb{N}$.

$$\text{Si } \lim_{x \to +\infty} f(x) \text{ existe alors } \lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{x \to +\infty} f(x).$$

[7] Analyse I SMI & SM S. EL HAJJI

Ainsi le comportement à l'infini (on dit comportement asymptotique) d'une suite $(u_n)_n$ où $u_n = f(n)$ est semblable à celui de la fonction à l'infini lorsque $\underset{x\to+\infty}{lim} f(x)$ existe (voir chapitre II).

Définition : 1) Une suite $(u_n)_n$ converge (ou est convergente) vers $L \in \mathbb{R}$, on note $(u_n)_n$ C.V. vers L, ssi $\underset{n\to+\infty}{lim} u_n = L$ où $L \in \mathbb{R}$
2) Une suite $(u_n)_n$ diverge (ou est divergente), on note $(u_n)_n$ D.V, si et seulement si la suite $(u_n)_n$ n'est pas convergente.

Propriété : La limite d'une suite (si elle existe) est unique.
La preuve se fait par l'absurde. On suppose que $l_1 \neq l_2$ et que $l_1 = \lim_{n\to+\infty} u_n$ et $l_2 = \lim_{n\to+\infty} u_n$ alors

$$\forall\epsilon > 0, \exists N_1 \text{ et } \exists N_2 : \forall n \geq N = \max(N_1, N_2) \text{ on a : } |u_n - l_1| < \epsilon \text{ et } |u_n - l_1| < \epsilon$$

D'où $\forall\epsilon > 0, \exists N : \forall n \geq N$ on a :

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - u_n + u_n - l_2| < |u_n - l_1| + |u_n - l_1| < 2\epsilon$$

et donc $|l_1 - l_2| = 0$ càd $l_1 = l_2$ ce qui est absurde.

Théorème : Soit une suite $(u_n)_n$, où $n \in \mathbb{N}$,
1) Si la suite $(u_n)_n$ converge, alors elle est bornée (on dit que toute suite convergente est bornée)
2) Si la suite $(u_n)_n$ est non bornée alors elle est divergente.
Démonstration:
1) Si la suite $(u_n)_n$ CV vers L, on a $\underset{n\longrightarrow+\infty}{lim} u_n = L \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ N_\varepsilon$ tel que $n > N_\varepsilon, |u_n - L| < \epsilon$
On a : $u_n = u_n - L + L \Longrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon$ tel que $n > N_\varepsilon, |u_n| \leq |u_n - L| + |L| \leq \varepsilon + |L|$
donc $\forall n > N_\varepsilon, |u_n| \leq \varepsilon + |L|$
Soit $M = sup(|u_1|, |u_2|, ..., |u_{N_\varepsilon}|, \varepsilon + |L|)$
On a : $\forall n \in IN$, $|u_n| < M$ càd la suite $(u_n)_n$ est bornée.

Remarque : La réciproque de th 1) est fausse. En effet, soit la suite $(u_n)_n$ de terme général définie par $u_n = (-1)^n$.
on a : $\forall n$, $|u_n| \leq 1$ (car $\forall n, -1 \leq (-1)^n \leq 1$) mais la suite $(u_n)_n$ est divergente.
2) C'est le contraposée de 1)

Autres définitions :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0,\ \exists N_A \in\ IN^* : \forall n > N_A, u_n \geq A$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \Longleftrightarrow \forall A > 0,\ \exists N_A \in\ IN^* : \forall n > N_A, u_n < -A$$
$$\Longleftrightarrow \forall B < 0, \exists\ N_B \in\ IN^* : \forall n > N_A,\ u_n < B$$

Opérations sur les suites numériques:

On peut définir une relation d'ordre dans l'espace des suites réelles :

On dit que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont dites égales $\Leftrightarrow u_n = v_n \ \forall n \in IN$

On dit que $(u_n)_n \leq (v_n)_n \Leftrightarrow u_n \leq v_n \ \forall n \in IN$

On peut définir (voir chapitre espace vectoriel pour détails):

la somme de deux suites en posant : $(u_n + v_n)_n = (u_n)_n + (v_n)_n$ et on dit que si $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites de terme général respectif u_n et v_n alors la somme deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ est la suite $(w_n)_n$ de terme général $w_n = u_n + v_n$.

le produit en posant : $(u_n)_n(v_n)_n = (u_nv_n)_n$ et pour tout scalaire λ, $\lambda(u_n)_n = (\lambda u_n)_n$

le quotient en posant : $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_n = \frac{(u_n)_n}{(v_n)_n}$ avec $v_n \neq 0, \forall n$.

Enonçons maintenant un théorème qui regroupe les opérations sur les suites convergentes c'est à dire sur la limite d'une somme, d'un produit et quotient de suites.

Théorème : Si $(u_n)_n$ est une suite convergente vers $L \in \mathbb{R}$ càd $\underset{n\to+\infty}{lim} u_n = L$ et $(v_n)_n$ une suite convergente vers $M \in \mathbb{R}$ càd $\underset{n\to+\infty}{lim} v_n = M$ alors

a) $\underset{n\to+\infty}{lim}(u_n \pm v_n) = \underset{n\to+\infty}{lim} u_n \pm \underset{n\to+\infty}{lim} v_n = L \pm M$.

b) $\underset{n\to+\infty}{lim}(u_nv_n) = (\underset{n\to+\infty}{lim} u_n)(\underset{n\to+\infty}{lim} v_n) = LM$

c) $\underset{n\to+\infty}{lim}(ku_n) = k(\underset{n\to+\infty}{lim} u_n) = kL$, où $k \in \mathbb{R}$.

d) $\underset{n\to+\infty}{lim} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\underset{n\to+\infty}{lim} u_n}{\underset{n\to+\infty}{lim} v_n} = \frac{L}{M}$, $M \neq 0$.

Démonstration a) On a $\underset{n\longrightarrow+\infty}{lim} u_n = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\ N^1_\varepsilon$ tel que $n > N^1_\varepsilon, |u_n - L| < \epsilon$

et $\underset{n\longrightarrow+\infty}{lim} v_n = M \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\ N^2_\varepsilon$ tel que $n > N^2_\varepsilon, |u_n - M| < \epsilon$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = L \\ \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = M\end{array}\right) \overset{?}{\Rightarrow} \lim_{n\longrightarrow+\infty}(u_n + v_n) = L + M$$

$\forall\epsilon > 0$,et pour $N_\epsilon = \sup(N^1_\varepsilon, N^2_\varepsilon)$ et $\forall n > N_\epsilon$, on a :

$$|u_n + v_n - (L + M)| = |(u_n - L) + (v_n - M)| \leq |u_n - L| + |v_n - M| \leq 2\epsilon$$

càd $\underset{n\to+\infty}{lim}(u_n + v_n) = \underset{n\to+\infty}{lim} u_n + \underset{n\to+\infty}{lim} v_n = L + M$.

b) On a $\underset{n\longrightarrow+\infty}{lim} u_n = L \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\ N^1_\varepsilon$ tel que $n > N^1_\varepsilon, |u_n - L| < \epsilon$

et $\underset{n\longrightarrow+\infty}{lim} v_n = M \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\ N^2_\varepsilon$ tel que $n > N^2_\varepsilon, |u_n - M| < \epsilon$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = L \\ \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n = M\end{array}\right) \overset{?}{\Rightarrow} \lim_{n\longrightarrow+\infty}(u_nv_n) = LM$$

On a : $|u_n\ v_n - LM| = |u_n\ v_n - u_nM + u_nM - LM| = |u_n(v_n - M) + M(u_n - \ell)|$
$\Rightarrow |u_nv_n - LM| \leq |u_n|\ |v_n - M| + |M|\ |u_n - \ell|$
Donc $\forall\epsilon > 0$,et pour $N_\epsilon = \sup(N^1_\varepsilon, N^2_\varepsilon)$ et $\forall n > N_\epsilon$, on a $|u_nv_n - LM| \leq |u_n|\ \epsilon$ $+\ |M|\ \epsilon$
La suite $(u_n)_n$ est une suite convergente, elle est donc bornée càd $\exists\ b$ tel que $\forall n,\ |u_n| < b$
Par suite $\forall\epsilon > 0$,et pour $N_\epsilon = \sup(N^1_\varepsilon, N^2_\varepsilon)$ et $\forall n > N_\epsilon$, on a $|u_nv_n - LM| \leq |u_n|\ \epsilon + |M|\ \epsilon \leq b\epsilon + |M|\ \epsilon$
Pour $K = sup(b, |M|)$, on aura : $b + |M| \ \leq 2K$
$\Longrightarrow \forall\ \varepsilon > O$,et pour $N_\epsilon = \sup(N^1_\varepsilon, N^2_\varepsilon)$ et $\forall n > N_\epsilon, |u_nv_n - LM| \leq M.\ \epsilon + M\ \epsilon \leq K\ \varepsilon.$
càd $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_nv_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = LM$
Exemples :
1) Etudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ dont le terme général est définie par $u_n = \frac{3}{n}$, où $n \geq 1$.
Cette suite converge vers 0 car la fonction $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{3}{x} = 0$
2) Etudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ dont le terme général est définie par $u_n = \frac{n^3+100}{(n-1)^3}$
Cette suite converge vers 1 car la fonction $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3+100}{(x-1)^3} = 1$
3) Etudier la convergence de la suite $(v_n)_n$ dont le terme général est définie par

$$v_n = \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n \left(4 + \tfrac{1}{n}\right) \text{ où } n \geq 1.$$

Si on pose $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et $w_n = \left(4 + \frac{1}{n}\right)$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 4$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 4e.$
Ainsi la suite $(v_n)_n$ CV vers $4e$.
Rappel : $\forall a > 0$, on a $a^x = e^{x\log(a)}$
De plus $\lim\limits_{X\to 0} \frac{\log(1+X)}{X} = 1$ (à partir de la définition d'une dérivée ou régle de l'hopital ou chapitre III).
Si on pose $x = \frac{1}{X}$, on a : $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x\log(1+\frac{1}{x})} = e^{\frac{\log(1+X)}{X}}$.
Donc $\lim\limits_{X\to 0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$
4) Etudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ dont le terme général est définie par

$$u_n = (-1)^n \text{ où } n \geq 1.$$

Cette suite diverge car $(-1)^n = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ est pair} \\ -1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^n$ n'existe pas.
5) Etudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ dont le terme général est définie par *par*

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1}, \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

On a une suite géométrique de raison $q = 2$ donc, par recurrence,

$u_n = 2^n u_0 = 2^n$.

Donc cette suite diverge car la fonction $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 2^x = +\infty$.

6) Théorème dit de Cesaro

a) Si la suite $(u_n)_n$ converge vers l càd $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_1+u_2+....+u_n}{n} = l$.

b) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = l$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = l$.

a) Si on pose $v_n = \frac{u_1+u_2+....+u_n}{n}$ alors $v_n - l = \frac{u_1+u_2+....+u_n}{n} - l = \frac{u_1+u_2+....+u_n-nl}{n} = \frac{u_1-l}{n} + \frac{u_2-l}{n} + ... + \frac{un-l}{n}$.

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, on a : $\forall\varepsilon > 0$, $\exists\ N_\epsilon$ tel que $n \in N_\epsilon, |u_n - l| < \epsilon$.

On a : $v_n - l = \frac{1}{n}\left[(u_1 - l) + (u_2 - l) + ... + (u_n - l)\right] \Rightarrow |v_n - l| \leq \frac{1}{n}\left[|u_1 - l| + |u_2 - l| + ... + |u_n - l|\right]$.

Si on pose $M = |u_1 - l| + |u_2 - l| + ... + |u_{N_\epsilon} - l|$ alors

$\forall\varepsilon > 0, \exists\, N_\epsilon$ tel que $n \in N_\epsilon, |v_n - l| \leq \frac{1}{n}\left[M + \left|u_{(N_\epsilon+1)} - l\right| + \left|u_{(N_\epsilon+2)} - l\right| + ... + |u_n - l|\right] \leq \frac{1}{n}\left[M + (n - N_\epsilon)\epsilon\right]$.

Comme $n - N_\epsilon < n$ alors $|v_n - l| \leq \frac{1}{n}\left[M + n\epsilon\right]. \leq \frac{M}{n} + \epsilon$.

Enfin puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{M}{n} = 0$, on a $(v_n)_n$ CV vers l.

b) Si on pose $v_n = u_{n+1} - u_n$ alors $\frac{v_1+v_2+....+v_n}{n} = \frac{u_n-u_0}{n}$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$ alors, d'aprés a),

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_1+v_2+....+v_n}{n} = l \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n-u_0}{n} = l \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = l$.

Dans certains cas, on peut aisément prouver qu'une suite est convergente à l'aide de certains critères.

Théorème (d'encadrement) : Soit $(u_n)_n$, $(v_n)_n$ et $(w_n)_n$ des suites telles que $u_n \leq w_n \leq v_n$ pour tout $n \geq m$, où $m \in \mathbb{N}$. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = L$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = L$.

Exemples **:**

1) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ donc $\frac{-1}{n} \leq \frac{\sin(n)}{n} \leq \frac{1}{n}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$

2) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n!}$.

On a $\frac{3^n}{n!} = \frac{3*3*3*...*3*3*3*}{n*(n-1)*(n-2)...*4*3*2*1} = \frac{3}{n}\frac{3}{n-1}\frac{3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\frac{3}{3}\frac{3}{2}\frac{3}{1}$.

Or pour tout $n \geq 4$,on a : $\frac{3}{n-1} \leq 1, \frac{3}{n-2} \leq 1, ..., \frac{3}{4} \leq 1$ donc

$\frac{3^n}{n!} = \frac{3}{n}\frac{3}{n-1}\frac{3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\frac{3}{3}\frac{3}{2}\frac{3}{1} \leq \frac{3}{n} * 1 * 1 * ... * 1 * 1 * \frac{3}{2} * 3 \leq \frac{27}{2n}$.

Puisque pour tout $n \geq 4$, on a : $0 \leq \frac{3^n}{n!} \leq \frac{27}{2n}$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{27}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$.

Définition : Une suite $(u_n)_n$ est dite alternée ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$ (où $\mathbb{N}^*$) on a $u_n u_{n+1} \leq 0$.

Proprosition : Si une suite alternée converge alors sa limite est nulle.

Exemple : Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Pour tout $n \geq 1$, on a $\frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$. or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

Théorème : Soit une suite $(u_n)_n$, où $n \in \mathbb{N}$

1) Si la suite $(u_n)_n$ est croissante et majorée par M, alors la suite est convergente et de plus sa limite l vérifie $l \leq M$.

2) Si la suite $(u_n)_n$ est décroissante et minorée par m, alors la suite est convergente et de plus sa limite l vérifie $l \geq m$.

Définition : La suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ ssi

$\forall A > 0, \exists p \in \mathbb{N}, p \geq N, : \forall n \geq p,\, u_n \geq A$.

On note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Remarque :

Si la suite $(u_n)_n$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ alors elle est non bornée.

On dit que la suite $(u_n)_n$ diverge ssi

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \text{ ou } \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \text{ ou } \lim_{n\to+\infty} u_n = \text{n'existe pas.}$$

Propriété : Soit une suite $(u_n)_n$, où $n \in \mathbb{N}$,

1) si la suite $(u_n)_n$ est croissante et non majorée, alors elle tend vers $+\infty$.

2) si la suite $(u_n)_n$ est décroissante et non minorée, alors elle tend vers $-\infty$.

Exemple : Déterminer, sans évaluer la limite, si la suite $(\frac{3n}{4n+1})_n$ est convergente ou divergente. On dit aussi déterminer la nature de la suite.

On a $u_n = \frac{3n}{4n+1}$ est définie pour tout n. De plus , on a $u_n = f(n)$ où f est la fonction $f(x) = \frac{3x}{4x+1}$. On a $f'(x) = \frac{3}{(4x+1)^2} > 0, \forall x \in [0, +\infty[$. Ainsi la suite $(\frac{3n}{4n+1})_n$ est strictement croissante.

D'autre part, pour tout $n, u_n = \frac{3n}{4n+1} \leq \frac{4n}{4n+1} \leq \frac{4n}{4n} = 1$. Par suite la suite $(\frac{3n}{4n+1})_n$ est majorée. Comme elle est déja (strictement) croissante alors elle est convergente.

Exemple (Critère de d'Alembert pour la CV des suites à t.g.> 0):

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle à termes strictement positifs càd $\forall n, u_n > 0$.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L < 1$ alors la suite $(u_n)_n$ converge vers 0.

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L < 1$ donc $\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon : n \geq N_\epsilon$, on a $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - L\right| < \epsilon$.

Puisque $L < 1$,il existe $b \in \mathbb{R} : 0 \leq L < b < 1$.

Pour $\epsilon = b - L > 0, \exists N : n \geq N$, on a :

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - L\right| < b - L \Leftrightarrow -(b - L) \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} - L \leq b - L \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} < b \Rightarrow u_{n+1} < bu_n$$

Ainsi (par itération du processus) , on a :

$$0 < u_{n+1} < bu_n < b^2u_{n-1} < ... < b^{n-N+1}u_N$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(b^{n-N+1}u_N) = (b^{-N}u_N)\lim\limits_{n\to+\infty} b^{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = 0$ càd la suite $(u_n)_n$ converge vers 0.

Exemple : Etudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ définie pour tout n par $u_n = \frac{n}{2^n}$.
Pour tout n, On a $u_n = \frac{n}{2^n} > 0$.
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{n+1}{2^{n+1}}\frac{2^n}{n}) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1.$
Donc , d'aprés le critére dit de d'Alembert, la suite $(u_n)_n = (\frac{n}{2^n})_n$ converge vers 0.

2.5 : Etude de suites particulières[8]:

a) Suites adjacentes :

Définition : Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites réelles on dira que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont adjacentes si

1) $(u_n)_n$ est une suite croissante et $(v_n)_n$ est une suite décroissante
2) $\forall n$, on a $u_n \leq v_n$
3) $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$

Proposition : Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.
Faire la démonstartion à titre d'exercice.

Exemples :
1) Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites définie par u_0 et $v_0 > 0$ et par les relations de récurrence :

$u_0 = 1, u_n = 1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!}$
$v_0 = 2, v_n = u_n + \frac{1}{n!}$

On a : $\forall n, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \Rightarrow u_{n+1} > u_n\ \forall n \Longrightarrow (u_n)$ croissante (strictement)
On a : $\forall n, v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!}) - (u_n + \frac{1}{n!}) = u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}$

donc $\forall n, v_{n+1} - v_n = \frac{2}{(n+1)xn!} - \frac{1}{n!} = \frac{1}{n!}\left[\frac{2-(n+1)}{(n+1)!}\right] = \frac{1}{n!}\left(\frac{1-n}{n+1}\right)$
$\Rightarrow \forall n, v_{n+1} - v_n \leq 0 \Rightarrow (v_n)$ est décroisante.

D'autre part,

$\forall n, v_n - u_n = \frac{1}{n!} > 0 \Longrightarrow \forall n, v_n > u_n$
et $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}(v_n - u_n) = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \frac{1}{n!} = 0$

donc $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont 2 suites adjacentes par suite, elles sont CV et ont la même limite l et on a

$\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} u_n = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} v_n = \ell$
$u_n \leq \ell \leq v_n$
$1 \leq u_n \leq v_n \leq 2$

Remarque : ℓ est un nombre irrationnel :

[8] Analyse I SMI & SM S. EL HAJJI

Démonstration par l'bsurde. Supposons que ℓ est nombre rationnel càd $\exists (p,N) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^* : l = \frac{p}{N}$.
On a :

$\forall n, u_n > 0$ et $v_n > 0 \Rightarrow \ell = \frac{p}{N} \geq 0$

$\forall n, u_n \leq \ell \leq v_n \implies \forall n, 1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{N\,!} \leq \frac{P}{N} \leq 1 + \frac{1}{1!} ... + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!}$

Si on multiplie par $N!$ les 2 membres des inégalités, on a :

$\underbrace{N! + (N-1)! + +(N-2)! + ... + 1}_{A\in\mathbb{N}} \leq P(N-1)! \leq \underbrace{N! + (N-1)! + +(N-2)! + ... + 1+}_{A\in\mathbb{N}}$
1

$\implies A \leq P(N-1)! \leq A+1$

Ce qui est absurde car $P(N-1)! \in \mathbb{N}$ et A et $A+1$ sont des entiers consécutifs donc ℓ est un nombre irrationnel. Ce nombre est noté par e.et de plus $e = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!}\right) = 1 + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!} + ...$

2) Soient $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites définie par $u_0 > v_0 > 0$ et par les relations de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \text{ et } v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}.$$

a) Montrer que $\forall n \geq 0$, on a $u_n \geq 0, v_n \geq 0$ et $u_n \geq v_n$

b) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante minorée et la suite $(v_n)_n$ est croissante majorée.

c) Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont convergentes.

d) Montrer que la suite $(w_n)_n$ définie par $w_n = u_n - v_n$ a pour limite 0. En déduire que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ ont la même limite.

a) On a $u_0 > v_0 > 0$ et $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ se montrent par recurrence assez facilement.
On a $u_0 > v_0$, pour montrer que $\forall n \geq 1, u_n \geq v_n$, on peut le faire par récurrence ou directement.
La relation $u_{n+1} \geq v_{n+1}$ s'écrit $\frac{u_n+v_n}{2} \geq \sqrt{u_n v_n}$ càd $u_n + v_n \geq 2\sqrt{u_n v_n}$.
Comme $u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n} = (\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2$ (on a $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$) donc $u_n + v_n - 2\sqrt{u_n v_n} \geq 0$.
b) La suite $(u_n)_n$ est minorée par 0 car $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$ (d'après a)).
La suite $(u_n)_n$ est décroissante car
$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{u_n+v_n}{2} - u_n = -\frac{u_n-v_n}{2} \leq 0$ (d'après a)).
La suite $(v_n)_n$ est majorée par u_0 en effet ,
$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \sqrt{u_{n-1}v_{n-1}} \leq u_{n-1}v_{n-1} \leq u_{n-1}u_{n-1}$ (d'après a)).$\leq u_0$.
La suite $(v_n)_n$ est croissante en effet
$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \sqrt{u_n v_n} - v_n = \sqrt{v_n}(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}) \geq 0$ (d'après a)).
c) La suite $(u_n)_n$ est convergente vers l_1 (décroissante et minorée) et La suite $(v_n)_n$ est convergente vers l_2 (croissante et majorée).
On a : $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ donc $v_n = 2u_{n+1} - u_n$ Ainsi

$w_n = u_n - v_n = u_n - (2u_{n+1} - u_n) = 2(u_n - u_{n+1})$

Comme la suite $(w_n)_n$ est convergente vers 0, cela résulte du fait que :

$\forall n \in \mathbb{N}, w_n \geq 0,\ w_n = 2(u_n - u_{n+1})$ et que $(u_n)_n$ est convergente vers l_1, et que la suite $(w_n)_n$, (avec $w_n = u_n - v_n$), est convergente vers $(l_1 - l_2)$, cela résulte du fait que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = 2(u_n - u_{n+1})$ que $(u_n)_n$ est convergente vers l_1 et que $(v_n)_n$ est convergente vers l_2,
On a : $l_1 = l_2$.

Théorème (des segments emboites) : Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes et $I_n = [u_n, v_n]$ .Il existe un unique l tel que $\underset{n\in IN}{\cap} I_n = \{\ell\}$.
Démonstration : Soit $x \in I_n \Rightarrow u_{n-1} \leq u_n \leq x \leq v_n \leq v_{n-1} \Longrightarrow x \in [u_{n-1}, v_{n-1}] = I_{n-1}$
donc $\forall n, [u_n, v_n] \subset [u_{n-1}, v_{n-1}]$ (d'où le nom de segments emboites)
puisque $\underset{n\longrightarrow+\infty}{lim}(u_n - v_n) = 0$, on a le résultat.

b) Etude de suites récurrentes du type $\left\{\begin{array}{c} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = f(u_n),\ n \geq 0 \end{array}\right.$ [9]:

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie dans I et à valeur dans un sous-ensemble de I càd $f : I \rightarrow J \subset I$.
On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{c} u_0 \in I,\ \text{donné} \\ u_{n+1} = f(u_n),\ n \geq 0 \end{array}\right.$$

Cette suite est appelé suite récurrente associé à f et u_0.
On a : $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) \in I$ donc la suite $(u_n)_n$ est bien définie.
Dans la suite, on va supposer que la fonction f est continue, monotone et dérivable dans I.
Rappel : Si la suite $(u_n)_n$ CV vers l et si f est continue en l alors $l = f(l)$. On dit que toute limite eventuelle de la suite $(u_n)_n$ est un point fixe de la fonction f.

Pour étudier une suite recurrente de la forme : $\left\{\begin{array}{c} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = f(u_n),\ n \geq 0 \end{array}\right.$

i) On étudie les sens de variation : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$
On étudie le signe du second membre.
Si tous les u_n sont positifs, on étudie le rapport $R = \frac{u_{n+1}}{u_n}$.
Si $R > 1$ alors la suite $(u_n)_n$ est croissante.
Si $R < 1$ alors la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

ii) On fait l'hypothése que la suite $(u_n)_n$ converge vers l.
l est solution de l'équation $l = f(l)$ (on suppose que f est continue)
On forme $|u_{n+1} - l|$ et on cherche à monter que ce terme tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. Pour cela, une idée consiste à exprimer $|u_{n+1} - l|$ en fonction de $|u_n - l|$. En pratique cela revient à trouver $k : 0 \leq k < 1 : |u_{n+1} - l| \leq k\,|u_n - l|$.

Exemples :

[9] Analyse I SMI & SM S. EL HAJJI

1) Etudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ dont le terme général est définie par *par*

$$\left\{ \begin{array}{c} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 4, \text{ si } n \geq 1. \end{array} \right.$$

On a $u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 4 = 5$,
$u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 4 = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}u_0 + 4) + 4 = \frac{1}{4}u_0 + 6$
$u_3 = \frac{1}{2}u_2 + 4 = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}u_0 + 6) + 4 = \frac{1}{8}u_0 + 7$
$\forall n, u_n \geq 0$ (recurrence).
Si la suite $(u_n)_n$ CV vers l alors $l = \frac{1}{2}l + 4 \Rightarrow l = 8$
$8 - u_{n+1} = 8 - (\frac{1}{2}u_n + 4)$ (on a $l = \frac{1}{2}l + 4) \Rightarrow 8 - u_{n+1} = (\frac{1}{2}l + 4) - (\frac{1}{2}u_n + 4) = \frac{1}{2}(l - u_n)$
Donc (par itération du processus ou recurrence ou produit membre à membre) $8 - u_{n+1} = \frac{3}{2^n}$ (car $8 - u_0 = 6$)
Ainsi la suite $(u_n)_n$ CV vers 8.
2) Etudier la convergence de la suite $(u_n)_n$ dont le terme général est définie par *par*

$$\left\{ \begin{array}{c} u_0 = 0 \\ u_n = \frac{3}{2+u_{n-1}}, \text{ si } n \geq 1. \end{array} \right.$$

On a une suite récurrente càd de la forme $u_n = f(u_{n-1})$ avec $f(x) = \frac{3}{2+x}$.
Si la suite $(u_n)_n$ converge vers l, on aura $l = f(l)$ càd $l = \frac{3}{2+l}$, dont les solutions sont 1 et -3. Comme tous les éléments de la suite sont positifs alors $l \geq 0$. Par suite une limite eventuelle de la suite est $l = 1$.
On a $u_n - 1 = \frac{3}{2+u_{n-1}} - 1 = \frac{-1+u_n}{2+u_n}$ donc $|u_n - 1| = \left|\frac{-1+u_n}{2+u_n}\right| \leq \frac{1}{2}\left|u_{n-1} - 1\right|$.
Par itération du processus, on a :$|u_n - 1| \leq \frac{1}{2^n}\left|u_0 - 1\right| = \frac{1}{2^n}$. Donc la suite $(u_n)_n$ converge vers $l = 1$.

Théorème : Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle définie dans I à valeur dans un sous-ensemble de I càd $f : I \to J \subset I$. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{c} u_0 \in I, \text{ donné} \\ u_{n+1} = f(u_n), \, n \geq 0 \end{array} \right.$$

i) Si la fonction f est croissante sur I alors la suite $(u_n)_n$ est monotone. Plus prècisement:
si $u_0 \leq u_1$ alors la suite $(u_n)_n$ est croissante si $u_0 \leq u_1$.
si $u_0 \geq u_1$ alors la suite $(u_n)_n$ est décroissante si $u_0 \leq u_1$.
ii) Si la fonction f est décroissante sur I alors les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$sont monotones. L'une est croissante et l'autre est décroissante.

Démonstration :
i) $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1})$ et f croissante $\Rightarrow$ la suite $(u_n)_n$ est monotone.

Si $u_0 \leq u_1$ et f croissante $\Rightarrow f(u_0) \leq f(u_1) \Rightarrow u_2 - u_1 = f(u_1) - f(u_0) \geq 0 \Rightarrow u_1 \leq u_2$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - f(u_{n-1}), u_0 \leq u_1$ et f croissante donc (par récurrence immédiate) la suite $(u_n)_n$ est croissante.
Le cas $u_0 \geq u_1$ se traite de façon similaire au cas précédent.
ii) Si la fonction f est décroissante $\Rightarrow g = fof$ est croissante.
Or pour u_0 donné, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+2} = f(u_{2n+1}) = fof(u_{2n}) = g(u_{2n})$.
De même pour u_1 donné, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+3} = g(u_{2n+1})$
Donc, d'apres i), les suites les suites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$sont monotones. De plus, l'une est croissante et l'autre est décroissante. En effet

si $u_0 \leq u_2$

et si $g = fof$ croissante alors $u_2 = g(u_0) \leq u_4 = g(u_2)$ et par itération du procédé, on a $(u_{2n})_n$ est croissante

si $u_0 \leq u_2$ et

et si f décroissante alors $u_1 = f(u_0) \geq u_3$ et par itération du procédé, on a $(u_{2n+1})_n$ est décroissante.

Le même raisonnment est valable dans le cas où $u_0 \geq u_2$.
Exemple :
On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n^3 + 1),\ n \geq 0 \end{cases}$$

La suite $(u_n)_n$ est une suite récurrente associé à f et $u_0 = 1$ où $\forall x \in [1, +\infty[$,on a $f(x) = \frac{1}{3}(x^3 + 1)$.
On a f est une fonction croissante donc d'aprés le théorème précedent, la suite $(u_n)_n$ est monotone. Comme de plus, $u_0 = 1 \geq u_1 = f(1) = \frac{2}{3}$, il s'en suit que cette suite est décroissante.
D'autre part, la suite $(u_n)_n$ est minorée par 1.
Donc la suite $(u_n)_n$ CV vers l et de plus, $l = f(l)$ càd l est solution de l'équation $l^3 - 3l + 1 = 0$.

c) Suites de Cauchy :

Définition : Une suite (u_n) est dite suite de Cauchy dans IR, si et seulement si :

$\forall \epsilon > 0,\ \exists\ N_\varepsilon \in IN^* : \forall p \geq N_\varepsilon$ et $\forall q > N_\varepsilon \Longrightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon$

Théorème : Toute suite convergente dans IR est une suite de Cauchy.
Démonstration : Si (u_n) est dite suite convergente dans IR, on a :

$\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ N_\varepsilon > 0 : \forall\ n > N_\varepsilon\ \ |u_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{\varepsilon}$

Donc

$\forall \epsilon > 0,\ \exists\ N_\varepsilon > 0 : \forall p \geq N_\varepsilon\ et\ \forall q \geq N_\varepsilon$ on a :$|u_p - uq| \leq |u_p - \ell| + |u_q - \ell| < \epsilon + \epsilon$

$\Rightarrow |u_p - uq| < 2\varepsilon$.

Théorème : Toute suite de Cauchy dans IR est convergente dan IR.

Conclusion : Une suite (u_n) dans IR est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.

Propriété : Si (u_n) et (v_n) sont deux suites de Cauchy alors :
Les suites $(|u_n|)_n$ et $(|u_n|)_n$ sont de Cauchy
La suite $(u_n + v_n)_n$ est de Cauchy
Si de plus : $\forall n, |v_n| \geq a$ et $a \in \mathbb{R}_+^*, \Rightarrow |u_p - uq| < 2\varepsilon$.

Définition : Une suite (u_n) est dite suite contractante dans IR, si et seulement si :

$$\forall n \geq 1,\ |u_{n+1} - u_n| < k\,|u_n - u_{n-1}| \text{ où } 0 < k < 1.$$

Théorème : Toute suite contractante dans IR.est une suite de Cauchy dans IR.

Exemple :
On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \text{ donné}, \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{\cos(u_n)}{3},\ n \geq 0 \end{cases}$$

La suite $(u_n)_n$ est une suite récurrente associé à f et $u_0 = 1$ où $\forall x \in [1, +\infty[$,on a $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{\cos(x)}{3}$.
$\forall x \in [1, +\infty[$,on a $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{\sin(x)}{3}. \Rightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} < 1$
Donc , d'apres le th. précédent, la suite $(u_n)_n$ est convergente.
[10]

[10] Analyse I SMI & SM S. EL HAJJI