Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

Filière SMIA-Module: Algèbre 1

Contrôles Finaux, Rattrapages et Solutions

A. Cherrabi, A. Ouadfel

Département de Mathématiques

Année Universitaire 2018/2019

Enoncés des Contrôles Finaux et Rattrapages

Contrôle Final/2015-2016

Exercice 1. *Soit $p \geq 5$ un nombre premier.*

1) Montrer que le reste de la division euclidienne de p par 6 est 1 ou 5.

2) En déduire que $p^2 + 2$ est composé.

Exercice 2. *On considère la correspondance $f : \mathbb{Z}/56\mathbb{Z} \to (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$, $cl_{56}(x) \mapsto (cl_8(x), cl_7(x))$, où $cl_8(x), cl_7(x)$ et $cl_{56}(x)$ désignent respectivement les classes de congruences de x modulo 8, 7 et 56.*

1) Montrer que f est une application bien définie.

2) Montrer que f est une bijection.

3) Calculer $f^{-1}\{(cl_8(3), cl_7(5))\}$.

Exercice 3. *Soient E un ensemble non vide et A une partie de E. On considère l'application $f : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$, $X \mapsto X \cup A$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire d'équivalence associée à f.*

1) On suppose que $E = \{a, b, c\}$ et $A = \{a, b\}$.

a) Déterminer $f(\mathscr{P}(E))$. f est-elle surjective ?

b) Déterminer $cl(\emptyset)$, $cl(E)$ et en déduire l'ensemble quotient $E/\mathcal{R}$.

c) Donner la décomposition canonique de f et préciser l'image de chaque classe d'équivalence.

2) Soit $B \in \mathscr{P}(E)$.

a) Montrer que $cl(B) = \{X \in \mathscr{P}(E) / (B \cap \overline{A}) \subset X \subset (A \cup B)\}$, où $\overline{A}$ est le complémentaire de A dans E.

b) En déduire que si A et B forment une partition de E, alors $cl(B) = \{X \in \mathscr{P}(E) / B \subset X\}$.

Rattrapage 2015-2016

Exercice 4. ***(Question de cours)*** *Pour un entier $n \geq 1$, donner la définition de l'indicateur d'Euler de n noté $\varphi(n)$. Comment calculer $\varphi(n)$?*

Exercice 5. *Soit $p \geq 3$ un nombre premier.*

1) Montrer que $p - 1 = 2^m k$, où $m \in \mathbb{N}^\star$ et k est un entier naturel impair.

2) Soit $x \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $x^2 \equiv 1 \,(mod\, p)$, alors $x \equiv 1 \,(mod\, p)$ ou $x \equiv -1 \,(mod\, p)$.

3) Soit $b \in \mathbb{Z}$ tel que $b \wedge p = 1$ et $b^k \not\equiv 1 \,(mod\, p)$.

a) Montrer que l'ensemble $N = \{s \in \{1, \ldots, m\} / b^{2^s k} \equiv 1 \,(mod\, p)\}$ *possède un plus petit élément.*

b) En déduire qu'il existe $t \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ *tel que* $b^{2^t k} \equiv -1 \,(mod\, p)$.

Exercice 6. *On considère la correspondance* $f : \mathbb{Z}/150\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/120\mathbb{Z}$, $cl_{150}(x) \mapsto cl_{120}(4x)$, *où* $cl_{150}(x)$ *et* $cl_{120}(x)$ *désignent respectivement les classes de congruences de* x *modulo* 150 *et* 120.

1) Montrer que f *est une application bien définie.*

2) f *est-elle injective ?* f *est-elle surjective ?.*

Exercice 7. *Soient* E *un ensemble non vide et* A *une partie de* E. *On considère l'application* $f : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$, $X \mapsto X \cap A$ *et* $\mathcal{R}$ *la relation binaire d'équivalence associée à* f.

1) On suppose que $E = \{a, b, c, d\}$ *et* $A = \{a, b\}$.

a) Déterminer $f(\mathscr{P}(E))$. f *est-elle surjective ?*

b) f *est-elle injective ?*

c) Déterminer $cl(\emptyset)$, $cl(\{a\}), cl(\{b\})$ *et* $cl(A)$.

d) Dire pourquoi $\mathscr{P}(E)/\mathcal{R} = \{cl(\emptyset), cl(\{a\}, cl(\{b\}), cl(A)\}$.

e) Donner la décomposition canonique de f *et préciser l'image de chaque classe d'équivalence.*

2) Soit $B \in \mathscr{P}(E)$.

a) Montrer que $cl(B) = \{X \in \mathscr{P}(E) / (A \cap B) \subset X \subset (\overline{A} \cup B)\}$, *où* $\overline{A}$ *est le complémentaire de* A *dans* E.

b) En déduire que si A *et* B *forment une partition de* E, *alors* $cl(B) = \mathscr{P}(B)$.

Contrôle Final/2016-2017

Exercice 8. *Soit* p *un nombre premier différent de* 2 *et de* 5. *On considère* $f : (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\star \to (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$, $\overline{a} \mapsto \overline{10a}$.

1) Montrer que f *est une application bien définie et que* f *est injective.* f *est-elle surjective ?*

2) Soit $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$. *Montrer que si* r *est le reste de la division euclidienne de* n *par* m, *alors* $10^r - 1$ *est le reste de la division euclidienne de* $10^n - 1$ *par* $10^m - 1$.

3) Soit $N = \{k \in \mathbb{N}^\star / 10^k \equiv 1 \,(\mod p)\}$.

a) Montrer que N *possède un plus petit élément. On note* b *le plus petit élément de* N.

b) Montrer que si $k \in \mathbb{N}$ tel que $10^k \equiv 1 \pmod p$, alors b divise k.

c) En déduire que b divise $p-1$.

Exercice 9. *On considère la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{N}^2$ par $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ si $a+b=c+d$, où $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N}^2$.*

1) a) Vérifier que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

b) Déterminer $\overline{(0,0)}, \overline{(1,2)}$ et $\overline{(n,0)}$, où $n \in \mathbb{N}$.

c) Déterminer $\overline{(2017,1)} \cup \overline{(2016,2)}$ et $\overline{(2017,2)} \cap \overline{(2016,1)}$.

d) Déterminer l'ensemble quotient $\mathbb{N}^2/\mathcal{R}$.

2) On considère l'application $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(p,q) \mapsto p+q$ et $\mathcal{R}$ la relation binaire d'équivalence associée à f.

a) Montrer que f est surjective. f est-elle injective ?

b) Donner la décomposition canonique de f.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \{(p,q) \in \mathbb{N}^2 / p+q=n\}$. Montrer que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}^2$.

Rattrapage/2016-2017

Exercice 10.

1) Donner la définition d'une correspondance d'un ensemble E vers un ensemble F.

2) La correspondance $f : \mathbb{Z}/10\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$, $\overline{x} \mapsto \overline{3x}$ est-elle une application ?

Exercice 11. *Soit $a,b \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que si $a+b=p$, où p est un nombre premier, alors a et b sont premiers entre eux.*

Exercice 12. *Soit E un ensemble et $a \in E$. On considère l'application $f : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$,*

$$X \mapsto \begin{cases} X \cup \{a\} & \text{si } a \notin X \\ X - \{a\} & \text{si } a \in X \end{cases}$$

1) Déterminer $f^{-1}(\{\emptyset\})$ et $f^{-1}(\{E\})$.

2) Montrer que f est bijective.

Exercice 13. *On considère la relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{N}^2$ par $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ si $a+d=b+c$, où $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N}^2$.*

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2) Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$.

a) Vérifier que $\overline{(a,b)} = \overline{(0,0)}$ si, et seulement si, $a=b$.

b) Montrer que si $a \geq b$, alors $\overline{(a,b)} = \overline{(a-b,0)}$

c) Montrer que si $a < b$, alors $\overline{(a,b)} = \overline{(0,b-a)}$.

d) Montrer qu'il existe $(c,d) \in \mathbb{N}^2$ tel que $\overline{(a+c,b+d)} = \overline{(0,0)}$.

3) En déduire que l'ensemble quotient $\mathbb{N}^2/\mathcal{R} = \{\overline{(n,0)}/n \in \mathbb{N}\} \cup \{\overline{(0,n)}/n \in \mathbb{N}^\star\}$.

4) Montrer que l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2/\mathcal{R}$, $n \mapsto \overline{(n,0)}$ est injective.

5) Montrer que $g : \mathbb{N}^2/\mathcal{R} \to \mathbb{Z}$, $\overline{(a,b)} \mapsto a-b$ est une application bien définie et que g est bijective.

Contrôle Final/2017-2018

Exercice 14.

1) Soient $a, n \in \mathbb{N}-\{0,1\}$. Montrer que si a^n+1 est premier, alors a est pair et n est une puissance de 2. (Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $F_n = 2^{2^n}+1$ est appelé nombre de Fermat).

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que $F_{n+1} = (F_n-1)^2+1$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}-\{0\}$. Montrer que $F_n - 2 = \prod_{k=0}^{n-1} F_k$.

c) En déduire que si $m, n \in \mathbb{N}-\{0\}$ sont distincts, alors F_n et F_m sont premiers entre eux.

Exercice 15. *Déterminer l'ensemble des réels k tels que $\{x \in \mathbb{R}/\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x+3)} = k\} = \emptyset$.*

Exercice 16. *Soit E, F deux ensembles non vides et $f : E \to F$ une application.*

1) Montrer que f est surjective si et seulement si pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, $F \setminus f(X) \subset f(E \setminus X)$.

2) Montrer que f est bijective si et seulement si pour tout $X \in \mathcal{P}(E)$, $F \setminus f(X) = f(E \setminus X)$.

Exercice 17.

1) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$, $E(x+k) = E(x)+k$.

2) On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - E(x)$ et la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ associée à f.

a) f est-elle injective ?

b) Vérifier que $f(\mathbb{R}) = [0,1[$. f est-elle surjective ?

c) Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $x\mathcal{R}y$ si, et seulement si, $x - y \in \mathbb{Z}$.

d) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $cl(x) = \{x + k/k \in \mathbb{Z}\}$.

e) Donner la décomposition canonique de f.

Rattrapage/2017-2018

Exercice 18. *On considère l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z^2 + z + 1$. Déterminer $f(\mathbb{C}), f(\mathbb{R}), f^{-1}(\mathbb{C})$ et $f^{-1}(\mathbb{R})$.*

Exercice 19. *Soit E, F deux ensembles non vides et $f : E \to F$ une application. Etablir :*

1) Pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $A \subset f^{-1}(f(A))$.

2) Pour tout $B \in \mathcal{P}(F)$, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Exercice 20. *Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{F}$ une partie non vide de $\mathcal{P}(E)$. On dit que $\mathcal{F}$ est un filtre si $\mathcal{F}$ vérifie les trois conditions suivantes :*

- $\forall X \in \mathcal{F}$, $X \neq \emptyset$.
- *Si $X, Y \in \mathcal{F}$, $X \cap Y \in \mathcal{F}$.*
- *Si $X \subset Y$ et $X \in \mathcal{F}$, alors $Y \in \mathcal{F}$.*

1) Soit $a \in E$. Vérifier que $\mathcal{H} = \{X \in \mathcal{P}(E)/a \in X\}$ est un filtre.

2) Soit $\mathcal{F}$ un filtre et $A \in \mathcal{P}(E)$ tels que $\forall X \in \mathcal{F}$, $A \cap X \neq \emptyset$. On considère $\mathcal{F}_A = \{Y \in \mathcal{P}(E)/\exists X \in \mathcal{F} : A \cap X \subset Y\}$.

a) Montrer que $\mathcal{F}_A$ est un filtre.

b) Montrer que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_A$ est que cette inclusion est stricte si $A \notin \mathcal{F}$.

Exercice 21. *On considère la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{N}^\star$ par $m\mathcal{R}n$ si il existe $k \in \mathbb{Z} : m = 2^k n$, où $m, n \in \mathbb{N}^\star$.*

1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2) Déterminer $cl(1)$, $cl(2)$ et $cl(3)$.

3) Soit $a \in \mathbb{N}^\star$.

a) Dire pourquoi il existe $r \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{N}$ avec t impair tels que $a = 2^r.t$.

b) En déduire qu'il existe un, et un seul, $t \in \mathbb{N}^\star$ impair tel que $t \in cl(a)$.

4) Soit $m, n \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que si $cl(m) = cl(n)$, alors m divise n ou n divise m. La réciproque est-elle vraie ?

Contrôle Final/2018-2019

Exercice 22.

1) Soit $n \in \mathbb{Z}$.

a) Montrer que $(5n^3 - n) \wedge (n+2) = (n+2) \wedge 38$.

b) Déterminer toutes les valeurs possibles de $(5n^3 - n) \wedge (n+2)$.

2) Déterminer les entiers $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant : $(5n^3 - n) \wedge (n+2) = 19$.

Exercice 23. *On considère la correspondance $f : \mathbb{Z}/60\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, $\overline{x} \mapsto \widehat{3x}$.*

1) Vérifier que f est une application bien définie.

2) Déterminer $f^{-1}\{\widehat{1}\}$. f est-elle surjective ?

3) f est-elle injective ?

Exercice 24. *On considère l'ensemble $A = \{10^k / k \in \mathbb{N}\}$ et l'application $f : \mathbb{Z} \times A \to \mathbb{Q}$, $(x, 10^k) \mapsto \frac{x}{10^k}$.*

1) Déterminer $f^{-1}(\{1\})$ et $f^{-1}(\{\frac{1}{3}\})$?

2) f est-elle surjective ? f est-elle injective ?

3) On considère la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{Z} \times A$ et associée à f.

a) Vérifier que $\overline{(0,1)} = \{(0,a)/a \in A\}$ et que $\overline{(1,1)} = \{(a,a)/a \in A\}$.

b) On considère l'application $g : \mathbb{Z} \to (\mathbb{Z} \times A)/\mathcal{R}$, $n \mapsto \overline{(n,1)}$.

i) Montrer que g est injective.

ii) Déterminer $g^{-1}(\{\overline{(1,10)}\})$. g est-elle bijective ?

4) Donner une bijection entre $(\mathbb{Z} \times A)/\mathcal{R}$ et D, où $D = \{y \in \mathbb{Q} / \exists (x,a) \in \mathbb{Z} \times A : y = \frac{x}{a}\}$.

Exercice 25. ***(Bonus)*** *Soit E un ensemble et $f : E \to E$ une application telle que $f \circ f = f$. Montrer que si f est surjective, alors $f = id_E$.*

Rattrapage/2018-2019

Exercice 26. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$.*

Exercice 27. *Soit n un entier naturel impair.*

1) Montrer que $n^2 \equiv 1 \pmod 8$.

2) Montrer que 24 divise $n(n^2 - 1)$.

Exercice 28. *Soit E un ensemble non vide.*

1) Soit F et G deux parties de E. Vérifier que $F \cap G = \emptyset$ si, et seulement si, $G \subset \overline{F}$.

2) Soit A et B deux parties de E. On considère l'équation $(X\cap A)\cup(\overline{X}\cap B) = \emptyset$, *où* $X \in \mathcal{P}(E)$.

a) On suppose que $A \cap B = \emptyset$. *Montrer que l'ensemble de solutions de l'équation est* $S = \{X \in \mathcal{P}(E) / B \subset X \subset \overline{A}\}$ *et que S est non vide.*

b) On suppose que $A\cap B \neq \emptyset$. *Montrer que l'équation* $(X\cap A)\cup(\overline{X}\cap B) = \emptyset$ *n'a pas de solutions.*

Exercice 29. *On considère l'application* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 2x$.

1) Déterminer $f(\mathbb{R})$. *f est-elle surjective ?*

2) f est-elle injective ?

3) On considère la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ et associée à f.

a) Déterminer $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{2} \cup \overline{0}$ *et* $\overline{3} \cap \overline{4}$.

b) Soit $a \in \mathbb{R}$. *Montrer que si* $a \neq 1$, *alors* $\overline{a} = \{a, 2-a\}$.

c) Donner une bijection de $\{\{x, 2-x\} / x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}\}\cup\{\{1\}\}$ *vers* $[-1, +\infty[$.

Exercice 30. ***(Bonus)****Soit E un ensemble et* $f : E \to E$ *une application telle que* $f \circ f = f$. *Montrer que si f est injective, alors* $f = id_E$.

Corrigés des Contrôles Finaux et Rattrapages

Contrôle Final/2015-2016

Solution de l'exercice 1.

1) *D'après le théorème de la division euclidienne dans* $\mathbb{N}$*, il existe un unique couple* $(q,r) \in \mathbb{N}^2$ *:* $p = 6q + r$ *avec* $0 \leq r \leq 5$*. Comme* p *est un premier* $\neq 2$*,* p *est impair d'où* $6q + r$ *est impair alors* r *est impair et ainsi* $r \in \{1, 3, 5\}$*. Aussi,* $r \neq 3$*, sinon* 3 *divise* $6q+r = p$*, ce qui est faux car* $p \neq 3$*. Ainsi,* $r = 1$ *ou* $r = 5$*.*

2) *D'après 1), on a* $p \equiv 1 \pmod 6$ *ou* $p \equiv 5 \pmod 6$ *d'où* $p^2 \equiv 1 \pmod 6$ *alors* $p^2 + 2 \equiv 3 \pmod 6$ *ainsi* 3 *divise* $p^2 + 2$ *et comme* $3 < p^2 + 2$ *alors* $p^2 + 2$ *admet un diviseur positif autre que* 1 *et* $p^2 + 2$ *donc* $p^2 + 2$ *est composé.*

Solution de l'exercice 2.

1) *Soit* $cl_{56}(x), cl_{56}(x') \in \mathbb{Z}/56\mathbb{Z}$ *tels que* $cl_{56}(x) = cl_{56}(x')$*, alors* $56/x - x'$ *d'où* $8/x - x'$ *et* $7/x - x'$ *ainsi* $cl_8(x) = cl_8(x')$ *et* $cl_7(x) = cl_7(x')$ *donc* $f(cl_{56}(x)) = f(cl_{56}(x'))$ *alors* f *est une application bien définie.*

2) *Montrons que* f *est injective : soit* $cl_{56}(x), cl_{56}(x') \in \mathbb{Z}/56\mathbb{Z}$ *tels que* $f(cl_{56}(x)) = f(cl_{56}(x'))$*, alors* $(cl_8(x), cl_7(x)) = (cl_8(x'), cl_7(x'))$ *d'où* $cl_8(x) = cl_8(x')$ *et* $cl_7(x) = cl_7(x')$ *ainsi* $8/x - x'$ *et* $7/x - x'$ *et puisque* $8 \wedge 7 = 1$*, alors* $56/x - x'$ *d'où* $cl_{56}(x) = cl_{56}(x')$ *ainsi* f *est injective.*
On a $|\mathbb{Z}/56\mathbb{Z}| = 56$ *et* $|\mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}| = |\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}|.|\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}| = 8.7 = 56$ *alors* f *est bijective car* f *est injective et les ensembles de départ et d'arrivée sont finis et de même cardinal.*

   Remarque. *On peut aussi vérifier directement que* f *est surjective : soit* $(cl_8(y), cl_7(z)) \in (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})$*. On a* $8 - 7 = 1$ *d'où en prenant* $x = 8z - 7y$*, on obtient* $cl_8(x) = cl_8(-7y) = cl_8(y)$ *et* $cl_7(x) = cl_7(8z) = cl_7(z)$ *ainsi il existe* $cl_{56}(x) = cl_{56}(8z - 7y) \in \mathbb{Z}/56\mathbb{Z}$ *tel que* $f(cl_{56}(x)) = (cl_8(y), cl_7(z))$ *et donc* f *est surjective.*

3) *Soit* $cl_{56}(x) \in \mathbb{Z}/56\mathbb{Z}$*. On a* $cl_{56}(x) \in f^{-1}\{(cl_8(3), cl_7(5))\}$ *si, et seulement si,* $f(cl_{56}(x)) = (cl_8(3), cl_7(5))$ *si, et seulement si,* $(cl_8(x), cl_7(x)) = (cl_8(3), cl_7(5))$ *si, et seulement si,* $cl_8(x) = cl_8(3)$ *et* $cl_7(x) = cl_7(5)$ *si, et seulement si,* $\left\{\begin{array}{l} x \equiv 3 \pmod 8 \\ x \equiv 5 \pmod 7 \end{array}\right.$ *si, et seulement si,* $\left\{\begin{array}{l} \exists k \in \mathbb{Z} : x = 3 + 8k \\ 3 + 8k \equiv 5 \pmod 7 \end{array}\right.$ *si, et seulement si,* $\left\{\begin{array}{l} \exists k \in \mathbb{Z} : x = 3 + 8k \\ 3 + k \equiv 5 \pmod 7 \end{array}\right.$ *si, et seulement si,* $\left\{\begin{array}{c} \exists k \in \mathbb{Z} : x = 3 + 8k \\ k \equiv 2 \pmod 7 \end{array}\right.$ *si, et seulement si, il existe*

$h,k \in \mathbb{Z}$ *tels que* $\left\{\begin{array}{l} x = 3+8k \\ k = 2+7h \end{array}\right.$ *si, et seulement si,* $\exists k,h \in \mathbb{Z}$ *tels que* $\left\{\begin{array}{c} x = 3+8(2+7h) = 19+56h \\ k = 2+7h \end{array}\right.$ *si, et seulement si,* $x \equiv 19 \pmod{56}$ *si, et seulement si,* $cl_{56}(x) = cl_{56}(19)$*. ainsi* $f^{-1}\{(cl_8(3), cl_7(5))\} = \{cl_{56}(19)\}$.

Remarque. *Comme* $8-7=1$*, On peut aussi prendre directement* $x = 5.8 - 3.7 = 19$ *alors* $cl_8(x) = cl_8(-21) = cl_8(3)$ *et* $cl_7(x) = cl_7(40) = cl_7(5)$ *ainsi* $cl_{56}(19)) \in f^{-1}\{(cl_8(3), cl_7(5))\}$ *et comme* f *est injective, alors* $f^{-1}\{(cl_8(3), cl_7(5))\} = \{cl_{56}(19)\}$.

Solution de l'exercice 3.

1) a) *Soit* $X \in \mathscr{P}(E)$ *; si* $X \subset A$*, alors* $f(X) = A$*. Aussi, si* $X \not\subseteq A$*, alors* $c \in X$ *d'où* $f(X) = E$ *ainsi* $f(\mathscr{P}(E)) = \{f(X)/X \in \mathscr{P}(E)\} = \{A, E\}$.
Il est évident que f *n'est pas surjective car* $f(\mathscr{P}(E)) \neq \mathscr{P}(E)$.

b) *Soit* $X \in \mathscr{P}(E)$*. On a* $X \in cl(\emptyset)$ *si, et seulement si,* $f(X) = f(\emptyset)$ *si, et seulement si,* $X \cup A = \emptyset \cup A$ *si, et seulement si,* $X \cup A = A$ *si, et seulement si,* $X \subset A$ *si, et seulement si,* $X \in \mathscr{P}(A)$*. Ainsi,* $cl(\emptyset) = \mathscr{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, A\}$.
Soit $X \in \mathscr{P}(E)$*. On a* $X \in cl(E)$ *si, et seulement si,* $f(X) = f(E)$ *si, et seulement si,* $X \cup A = E \cup A$ *si, et seulement si,* $X \cup A = E$ *si, et seulement si, et seulement si,* $c \in X$*. Ainsi,* $cl(E) = \{X \in \mathscr{P}(E)/c \in X\} = \{\{c\}, \{c,a\}, \{c,b\}, E\}$*. Puisque* $cl(\emptyset)$ *et* $cl(E)$ *forment une partition de* $\mathscr{P}(E)$*,* $\mathscr{P}(E)/\mathcal{R} = \{cl(\emptyset), cl(E)\}$.

c) *D'après le cours,* $f = i \circ \widetilde{f} \circ s$*, où* $i : \operatorname{Im} f = \{A, E\} \to \mathscr{P}(E)$*,* $i(A) = A$ *et* $i(E) = E$ *est l'injection canonique,* $s : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)/\mathcal{R} = \{cl(\emptyset), cl(E)\}$*,* $X \mapsto cl(X) = \left\{\begin{array}{ll} cl(\emptyset) & si\, X \subset A \\ cl(E) & si\, c \in X \end{array}\right.$ *est la surjection canonique et* $\widetilde{f} : \mathscr{P}(E)/\mathcal{R} = \{cl(\emptyset), cl(E)\} \to \operatorname{Im} f = \{A, E\}$ *est la bijection définie par* $\widetilde{f}(cl(\emptyset)) = f(\emptyset) = A$ *et* $\widetilde{f}(cl(E)) = f(E) = E$.

2) *Soit* $B \in \mathscr{P}(E)$.

a) *Soit* $X \in \mathscr{P}(E)$ *tel que* $X \in cl(B)$*, alors* $X\mathcal{R}B$ *d'où* $f(X) = f(B)$ *ainsi* $X \cup A = B \cup A$ *et puisque* $X \subset X \cup A$*, alors* $X \subset A \cup B$*. Aussi, puisque* $X \cup A = B \cup A$*,* $\overline{A} \cap (X \cup A) = \overline{A} \cap (B \cup A)$ *d'où* $\overline{A} \cap X = \overline{A} \cap B$ *et puisque* $\overline{A} \cap X \subset X$*, alors* $\overline{A} \cap B \subset X$.
Inversement, soit $X \in \mathscr{P}(E)$ *tel que* $\overline{A} \cap B \subset X \subset A \cup B$*, alors* $(\overline{A} \cap B) \cup A \subset X \cup A \subset (A \cup B) \cup A$ *d'où* $B \cup A \subset X \cup A \subset A \cup B$ *ainsi* $f(X) = f(B)$ *et par suite* $X \in cl(B)$.

b) *Soit* $X, A, B \in \mathscr{P}(E)$ *tels que* A *et* B *forment une partition de* E. *On a, d'après la question précédente,* $X \in cl(B)$ *si, et seulement si,* $(B \cap \overline{A}) \subset X \subset (A \cup B)$ *si, et seulement si,* $B \subset X$ *car* $B = \overline{A}$, *et donc* $cl(B) = \{X \in \mathscr{P}(E) / B \subset X\}$.

Rattrapage 2015-2016

Solution de l'exercice 4. *Voir le polycopié du cours (Définition 3.8.1 et théorème 3.8.6, page 20).*

Solution de l'exercice 5. *Soit* $p \geq 3$ *un nombre premier.*

1) *Puisque* $p \geq 3$ *est un nombre premier,* p *est impair d'où* $p-1 \geq 2$ *est pair, i.e.,* $2/p-1$. *Si* $p-1$ *est une puissance de* 2, *alors* $p-1 = 2^m = 2^m.k$, *où* $m \in \mathbb{N}^\star$ *et* $k = 1$ *est impair. Si* $p-1$ *n'est pas une puissance de* 2, *alors, d'après le théorème fondamental d'arithmétique,* $p-1 = 2^m p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}$, *où* $p_1, \dots, p_r$ *sont des nombres premiers deux à deux distincts et différents de* 2 *et* $m, m_1, \dots, m_r$ *sont des entiers* > 0, *alors* $p-1 = 2^m.k$ *avec* $k = p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}$ *est impair car* $\forall i = 1, \dots, r$, p_i *est impair.*
2) *Soit* $x \in \mathbb{Z}$ *tel que* $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ *; alors,* $p/x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ *d'où* $p/x-1$ *ou* $p/x+1$ *car* p *est premier ainsi* $x - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ *ou* $x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ *et par suite* $x \equiv 1 \pmod{p}$ *ou* $x \equiv -1 \pmod{p}$.
3) *Soit* $b \in \mathbb{Z}$ *tel que* $b \wedge p = 1$ *et* $b^k \not\equiv 1 \pmod{p}$.
   (a) *Puisque* $b \wedge p = 1$ *et* p *est premier, on a, d'après le petit théorème de Fermat,* $b^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ *d'où* $b^{2^m.k} \equiv 1 \pmod{p}$ *d'où* $m \in N$ *ainsi* $N \neq \emptyset$. *Comme* N *est une partie non vide de* $\mathbb{N}$, *alors* N *possède un plus petit élément.*
   (b) *On note* l *le plus petit élément de* N. *Alors* $b^{2^l k} \equiv 1 \pmod{p}$ *(*). Comme* $l \geq 1$, *(*) s'écrit* $(b^{2^{l-1}.k})^2 \equiv 1 \pmod{p}$ *ainsi, d'après la question 2),* $b^{2^{l-1}.k} \equiv 1 \pmod{p}$ *ou* $b^{2^{l-1}.k} \equiv -1 \pmod{p}$.
   D'autre part, $b^{2^{l-1}.k} \not\equiv 1 \pmod{p}$, *en effet, supposons que* $b^{2^{l-1}.k} \equiv 1 \pmod{p}$, *alors* $l-1 = 0$ *ou* $l-1 \in N$, *ce qui est faux car si* $l-1 = 0$, $b^k \equiv 1 \pmod{p}$ *ce qui contredit l'hypothèse* $b^k \not\equiv 1 \pmod{p}$, *et si* $l-1 \in N$, $l-1 < l$ *ce qui est impossible car* l *est le plus petit élément de* N.
   Comme $b^{2^{l-1}.k} \not\equiv 1 \pmod{p}$, *alors* $b^{2^{l-1}.k} \equiv -1 \pmod{p}$ *ainsi il existe* $t = l-1 \in \{0, \dots, m-1\}$ *tel que* $b^{2^t.k} \equiv -1 \pmod{p}$.

Solution de l'exercice 6.

1) *Soit* $cl_{150}(x), cl_{150}(x') \in \mathbb{Z}/150\mathbb{Z}$ *tels que* $cl_{150}(x) = cl_{150}(x')$ *; alors* $150/x - x'$ *d'où* $4.150/4(x-x')$ *alors* $600/4x - 4x'$ *d'où* $120/4(x-x')$ *car* $120/600$ *ainsi* $4x \equiv 4x' \pmod{120}$ *par suite* $cl_{120}(4x) = cl_{120}(4x')$, *i.e.,* $f(cl_{150}(x)) = f(cl_{150}(x'))$ *et ainsi* f *est une application bien définie.*

2) On a $f(cl_{150}(30)) = cl_{120}(120) = cl_{120}(0) = f(cl_{150}(0))$ *mais* $cl_{150}(30) \neq cl_{150}(0)$ *alors* f *n'est pas injective.*
f *n'est pas surjective car* $cl_{120}(1)$ *n'a pas d'antécédent par* f*, en effet, supposons qu'il existe* $cl_{150}(x) \in \mathbb{Z}/150\mathbb{Z}$ *tel que* $f(cl_{150}(x)) = cl_{120}(1)$ *d'où* $cl_{120}(4x) = cl_{120}(1)$ *alors* $4x \equiv 1 \pmod{120}$ *ainsi* $120/1 - 4x$ *et puisque* $4/120$*, alors* $4/1 - 4x$ *d'où* $4/1$*, ce qui est faux.*

Solution de l'exercice 7.

1) a) Soit $Y \in f(\mathscr{P}(E))$*, alors il existe* $X \in \mathscr{P}(E) : Y = f(X)$ *d'où* $Y = f(X) = X \cap A \subset A$ *alors* $Y \in \mathscr{P}(A)$ *ainsi* $f(\mathscr{P}(E)) \subset \mathscr{P}(A)$.
Inversement, soit $Y \in \mathscr{P}(A)$ *d'où* $Y \in \mathscr{P}(E)$ *et on a* $f(Y) = Y \cap A = Y$ *alors* $Y \in f(\mathscr{P}(E)$ *donc* $f(\mathscr{P}(E)) = \mathscr{P}(A)$.
On a f *est non surjective car* $f(\mathscr{P}(E)) = \mathscr{P}(A) \neq \mathscr{P}(E)$.
Remarque. *On peut aussi lister tous les éléments de* $\mathscr{P}(E)$ *et puis calculer* $f(\mathscr{P}(E))$.

b) On a $f(\emptyset) = \emptyset = f(\{c\})$ *mais* $\{c\} \neq \emptyset$ *d'où* f *n'est pas injective.*

c) Soit $X \in \mathscr{P}(E)$.
On a $X \in cl(\emptyset)$ *si, et seulement si,* $f(X) = f(\emptyset)$ *si, et seulement si,* $X \cap A = \emptyset \cap A$ *si, et seulement si,* $X \cap A = \emptyset$ *si, et seulement si,* $X \in \{\emptyset, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}\}$ *ainsi* $cl(\emptyset) = \{\emptyset, \{c\}, \{d\}, \{c, d\}\}$.
On a $X \in cl(\{a\})$ *si, et seulement si,* $f(X) = f(\{a\})$ *si, et seulement si,* $X \cap A = \{a\} \cap A$ *si, et seulement si,* $X \cap A = \{a\}$ *si, et seulement si,* $X \in \{\{a\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, c, d\}\}$ *ainsi* $cl(\{a\}) = \{\{a\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, c, d\}\}$.
On a $X \in cl(\{b\})$ *si, et seulement si,* $f(X) = f(\{b\})$ *si, et seulement si,* $X \cap A = \{b\} \cap A$ *si, et seulement si,* $X \cap A = \{b\}$ *si, et seulement si,* $X \in \{\{b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, c, d\}\}$ *ainsi* $cl(\{b\}) = \{\{b\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, c, d\}\}$.
On a $X \in cl(A)$ *si, et seulement si,* $f(X) = f(A)$ *si, et seulement si,* $X \cap A = A \cap A$ *si, et seulement si,* $X \cap A = A$ *si, et seulement si,* $A \subset X$ *si, et seulement si,* $X \in \{A, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, E\}$ *ainsi* $cl(A) = \{A, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, E\}$.

d) On a $cl(\emptyset), cl(\{a\}), cl(\{b\})$ *et* $cl(A)$ *forment une partition de* $\mathscr{P}(E)$ *d'où* $\mathscr{P}(E)/\mathcal{R} = \{cl(\emptyset), cl(\{a\}, cl(\{b\}), cl(A)\}$.

e) D'après le cours, $f = i \circ \widetilde{f} \circ s$*, où* $i : \operatorname{Im} f = \mathscr{P}(A) \to \mathscr{P}(E)$, $X \mapsto X$ *est l'injection canonique,* $s : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)/\mathcal{R} = \{cl(\emptyset), cl(\{a\}, cl(\{b\}), cl(A)\}$, $X \mapsto cl(X) = \begin{cases} cl(\emptyset) & si\, X \cap A = \emptyset \\ Cl(\{a\}) & si\ X \cap A = \{a\} \\ cl(\{b\}) & si\ X \cap A = \{b\} \\ cl(A) & si\ X \cap A = A \end{cases}$ *est la surjection canonique et* $\widetilde{f}$:

$\mathscr{P}(E)/\mathcal{R} = \{cl(\emptyset), cl(\{a\}, cl(\{b\}), cl(A)\} \to \operatorname{Im} f = \mathscr{P}(A)$ *est la bijection définie par* $\widetilde{f}(cl(\emptyset)) = f(\emptyset) = \emptyset$, $\widetilde{f}(cl(\{a\}) = f(\{a\}) = \{a\}$, $\widetilde{f}(cl(\{b\})) = f(\{b\}) = \{b\}$ *et* $\widetilde{f}(cl(A)) = f(A) = A$.

2) *Soit* $B \in \mathscr{P}(E)$.

   a) *Soit* $X \in cl(B)$, *alors* $X\mathcal{R}B$ *d'où* $f(X) = f(B)$, *i.e.,* $X \cap A = B \cap A$ *ainsi* $A \cap B = X \cap A \subset X$. *Aussi, puisque* $A \cap B = X \cap A$, $(A \cap B) \cup \overline{A} = (X \cap A) \cup \overline{A}$ *d'où* $B \cup \overline{A} = X \cup \overline{A}$ *(car* $A \cup \overline{A} = E$*) ainsi* $X \subset X \cup \overline{A} = \overline{A} \cup B$ *et par suite* $cl(B) \subset \{X \in \mathscr{P}(E)/(A \cap B) \subset X \subset (\overline{A} \cup B)\}$.
   Inversement, Soit $X \in \mathscr{P}(E)$ *tel que* $(A \cap B) \subset X \subset (\overline{A} \cup B)$, *alors* $(A \cap B) \cap A \subset (X \cap A) \subset (\overline{A} \cup B) \cap A$, *d'où* $(B \cap A) \subset (X \cap A) \subset (B \cap A)$ *(car* $\overline{A} \cap A = \emptyset$*) alors* $X \cap A = B \cap A$ *d'où* $X\mathcal{R}B$ *donc* $X \in cl(B)$ *et par suite* $\{X \in \mathscr{P}(E)/(A \cap B) \subset X \subset (\overline{A} \cup B)\} \subset cl(B)$ *; alors* $cl(B) = \{X \in \mathscr{P}(E)/(A \cap B) \subset X \subset (\overline{A} \cup B)\}$.

   b) *Puisque* A *et* B *forment une partition de* E, *alors* $\overline{A} = B$. *Soit* $X \in \mathscr{P}(E)$ *; d'après la question précédente,* $X \in cl(B)$ *si, et seulement si,* $(A \cap B) \subset X \subset (\overline{A} \cup B)\}$ *si, et seulement si,* $\emptyset \subset X \subset B$ *si, et seulement si,* $X \in \mathscr{P}(B)$. *Alors,* $cl(B) = \mathscr{P}(B)$.

<u>Contrôle Final/2016-2017</u>

Solution de l'exercice 8.

1) *Soit* $\overline{x}, \overline{x'} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\star$ *tels que* $\overline{x} = \overline{x'}$. *Alors,* $p/x - x'$ *d'où* $p/10(x - x')$ *ainsi* $10x \equiv 10x' \pmod p$ *et par suite* $\overline{10x} = \overline{10x'}$, *i.e.,* $f(\overline{x}) = f(\overline{x'})$ *et ainsi* f *est une application bien définie.*
   f *est injective, en effet, Soit* $\overline{x}, \overline{x'} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\star$ *tels que* $f(\overline{x}) = f(\overline{x'})$, *alors* $\overline{10x} = \overline{10x'}$ *d'où* $p/10(x - x')$. *On a* p *est un nombre premier différent de* 2 *et de* 5, *d'où* $p \wedge 2 = 1$ *et* $p \wedge 5 = 1$ *ainsi* $p \wedge 10 = 1$ *et puisque* $p/10(x - x')$, *alors* $p/x - x'$ *et par suite* $\overline{x} = \overline{x'}$ *ainsi* f *est injective.*
   $\overline{0} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *n'a pas d'antécédent, en effet, supposons qu'il existe* $\overline{x} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\star$ *tel que* $f(\overline{x}) = \overline{0}$ *alors* $p/10x$ *et comme* $p \wedge 10 = 1$, p/x *d'où* $\overline{x} = \overline{0}$, *ce qui contredit le fait que* $\overline{x} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\star$. *Puisque* $\overline{0} \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *n'a pas d'antécédent,* f *n'est pas surjective.*

   Remarque. *On peut aussi montrer que* f *n'est pas surjective en remarquant que si* f *est surjective, alors* f *est bijective et ainsi* $|\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\star| = |\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})|$ *ce qui est faux.*

2) *Soit Soit* $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$ *et* r *le reste de la division euclidienne de* n *par* m *; alors* $n = mq + r$, *où* $q \in \mathbb{N}$ *et* $0 \leq r < m$ *d'où* $10^n - 1 = 10^{mq+r} - 1 = 10^r.10^{mq} - 1 = 10^r.(10^{mq} - 1) + 10^r - 1$ *(*). D'autre part, on*

a $10^m - 1/10^{mq} - 1$*, en effet, il est évident que si* $q = 0$, $10^m - 1/10^{mq} - 1$ *et si* $q > 0$, $10^{mq} - 1 = (10^m)^q - 1 = (10^m - 1)((10^m)^{q-1} + (10^m)^{q-2} + \cdots + 1)$ *alors (*) s'écrit :* $10^n - 1 = (10^m - 1)q' + (10^r - 1)$ *avec* $q' \in \mathbb{N}$ *et comme* $0 \leq r < m$, $10^r - 1 \in \mathbb{N}$ *et* $0 \leq 10^r - 1 < 10^m - 1$ *ainsi* $10^r - 1$ *est le reste de la division euclidienne de* $10^n - 1$ *par* $10^m - 1$.

3) a) On a N *est une partie de* $\mathbb{N}$*, alors pour montrer que* N *possède un plus petit élément, il suffit de montrer que* N *est non vide. Puisque* p *et* 10 *sont premiers entre eux, on a, d'après le petit théorème de Fermat,* $10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ *ainsi* $p - 1 \in N$ *et par suite* N *est non vide.*

b) Soit $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $10^k \equiv 1 \pmod{p}$*. En effectuons la division euclidienne de* k *par* b*, on obtient* $k = qb + r$ *avec* $q, r \in \mathbb{N}$ *et* $0 \leq r < b$*. On a* $10^k \equiv 1 \pmod{p}$ *d'où* $(10^b)^q.10^r \equiv 1 \pmod{p}$ *alors* $10^r \equiv 1 \pmod{p}$ *car* $10^b \equiv 1 \pmod{p}$ *donc* $r = 0$ *car si* $r \neq 0$, $r \in N$ *et* $r < b$ *ce qui contredit le fait que* b *est le plus petit élément de* N*. Ainsi,* b *divise* k.

c) On a, d'après le petit théorème de Fermat, $10^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ *d'où, d'après la question précédente,* b *divise* $p - 1$.

Solution de l'exercice 9.

1) a) On a $\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2$, $a + b = a + b$ *d'où* $(a,b)\mathcal{R}(a,b)$ *et ainsi* $\mathcal{R}$ *est réflexive.*

Soit $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N}^2$ *tels que* $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$*, alors* $a + b = c + d$*, i.e.,* $c + d = a + b$ *d'où* $(c,d)\mathcal{R}(a,b)$ *et ainsi* $\mathcal{R}$ *est symétrique.* *Soit* $(a,b),(c,d),(s,t) \in \mathbb{N}^2$ *tels que* $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ *et* $(c,d)\mathcal{R}(s,t)$ *d'où* $a + b = c + d$ *et* $c + d = s + t$ *alors* $a + b = s + t$ *donc* $(a,b)\mathcal{R}(s,t)$ *et donc* $\mathcal{R}$ *est transitive.*

Comme $\mathcal{R}$ *est réflexive, symétrique et transitive, alors* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence.*

Remarque. *On peut aussi remarquer que* $\mathcal{R}$ *n'est autre que la relation associée à l'application* $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $(a,b) \mapsto a + b$*, et ainsi, d'après le cours,* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence.*

b) Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$*. On a* $(a,b) \in \overline{(0,0)}$ *si, et seulement si,* $(a,b)\mathcal{R}(0,0)$ *si, et seulement si,* $a + b = 0$ *si, et seulement si,* $a = b = 0$*. Ainsi,* $\overline{(0,0)} = \{(0,0)\}$.

Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$*. On a* $(a,b) \in \overline{(1,2)}$ *si, et seulement si,* $(a,b)\mathcal{R}(1,2)$ *si, et seulement si,* $a + b = 3$ *si, et seulement si,* $(a,b) = (0,3)$ *ou* $(a,b) = (1,2)$ *ou* $(a,b) = (2,1)$ *ou* $(a,b) = (3,0)$*. Ainsi,* $\overline{(1,2)} = \{(0,3),(1,2),(2,1),(3,0)\}$.

Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$*. On a* $(a,b) \in \overline{(n,0)}$ *si, et seulement si,* $(a,b)\mathcal{R}(n,0)$ *si, et seulement si,* $a + b = n$ *ainsi* $\overline{(n,0)} = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 / a + b = n\} =$

$\{(0,n),(1,n-1),\ldots,(n-1,1),(n,0)\}.$

c) *Puisque* $2017+1=2016+2$, $(2017,1)\mathcal{R}(2016,2)$ *d'où* $\overline{(2017,1)}=\overline{(2016,2)}$ *ainsi* $\overline{(2017,1)}\cup\overline{(2016,2)}=\overline{(2017,1)}=\overline{(2016,2)}$.
On a $2017+2\neq 2016+1$ *d'où* $(2017,1)$ *et* $(2016,1)$ *ne sont pas en relation donc* $\overline{(2017,2)}\cap\overline{(2016,1)}=\emptyset$.

d) *Il est évident que si* $n\in\mathbb{N}$, $\overline{(n,0)}\in\mathbb{N}^2/\mathcal{R}$. *Inversement, soit* $\overline{(a,b)}\in\mathbb{N}^2/\mathcal{R}$, *alors* $(a,b)\mathcal{R}(a+b,0)$. *Ainsi,* $\mathbb{N}^2/\mathcal{R}=\{\overline{(n,0)}/n\in\mathbb{N}\}$.

2) a) *On a* $\forall n\in\mathbb{N}$, $\exists(n,0)\in\mathbb{N}^2$ *tel que* $f((n,0))=n+0=n$ *ainsi* f *est surjective.*
On a $f((1,0))=1=f((0,1))$ *mais* $(1,0)\neq(0,1)$ *d'où* f *n'est pas injective.*

b) *Soit* $(a,b),(c,d)\in\mathbb{N}^2$. *On a* $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ *si, et seulement si,* $f((a,b))=f((c,d))$ *si, et seulement si,* $a+b=c+d$ *ainsi la relation associée à* f *n'est autre que la relation étudiée dans 1) et par suite* $\mathbb{N}^2/\mathcal{R}=\{\overline{(n,0)}/n\in\mathbb{N}\}$. *Aussi, puisque* f *est surjective,* $\operatorname{Im} f=\mathbb{N}$.
On a $f=i\circ\widetilde{f}\circ s$, *avec* $i:\operatorname{Im} f=\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $n\mapsto n$ *est l'identité,* $s:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}^2/\mathcal{R}$, $(p,q)\mapsto\overline{(p,q)}=\overline{(p+q,0)}$ *est la surjection canonique et* $\widetilde{f}:\mathbb{N}^2/\mathcal{R}\to\mathbb{N}$, $\overline{(n,0)}\mapsto n$ *est une bijection.*

c) *Soit* $n\in\mathbb{N}$ *et* $(p,q)\in\mathbb{N}^2$. *On a* $(p,q)\in I_n$ *si, et seulement si,* $p+q=n$ *si, et seulement si,* $(p,q)\mathcal{R}(n,0)$ *si, et seulement si,* $(p,q)\in\overline{(n,0)}$ *ainsi* $I_n=\overline{(n,0)}$. *Puisque* $(\overline{(n,0)})_{n\in\mathbb{N}}$ *est une partition de* $\mathbb{N}^2$, *alors* $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une partition de* $\mathbb{N}^2$.

Rattrapage/2016-2017

Solution de l'exercice 10.

1) *Voir le polycopié du cours : Définition 2.2.1, page 8.*

2) *La correspondance* $f:\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$, $\overline{x}\mapsto\overline{3x}$ *n'est pas une application, en effet, on a* $\overline{0}=\overline{10}$ *dans* $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ *mais, dans* $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$, $\overline{3.0}=\overline{0}\neq\overline{3.10}=\overline{14}$.

Solution de l'exercice 11. *Soit* $d=a\wedge b$. *Alors,* d/a *et* d/b *d'où* $d/a+b$ *ainsi* d/p *car* $p=a+b$. *Comme* p *est premier et* $d\in\mathbb{N}^\star$ *et* d/p, *alors* $d=1$ *ou* $d=p$. *On a* $d\neq p$ *sinon* $p=d/a$, *ce qui est faux car* $1\leq a<p$. *Ainsi,* $d=1$.

Remarque. *En utilisant le théorème de Bezout ou le même raisonnement utilisé ci-dessus, On peut vérifier facilement que si* $a\wedge(a+b)=1$, *alors* $a\wedge b=1$. *Comme* p *est premier et* $1\leq a<p$, $a\wedge p=1$, *alors* $a\wedge(a+b)=1$ *car* $p=a+b$ *ainsi* $a\wedge b=1$.

Solution de l'exercice 12.

1) *Soit* $X \in \mathcal{P}(E)$ *tel que* $X \in f^{-1}(\{\emptyset\})$ *; alors* $f(X) = \emptyset$ *d'où* $f(f(X)) = f(\emptyset) = \{a\}$ *(*). D'autre part, on a* $a \in X$ *car si* $a \notin X$, $f(X) = X \cup \{a\} \neq \emptyset$ *ainsi* $f(X) = X \setminus \{a\}$ *donc* $a \notin f(X)$ *alors* $f(f(X)) = f(X) \cup \{a\} = (X \setminus \{a\}) \cup \{a\} = X \cup \{a\} = X$ *(**) car* $a \in X$ *et de (*) et (**), on obtient* $X = \{a\}$ *ainsi* $f^{-1}(\{\emptyset\}) \subset \{\{a\}\}$ *et on a* $\{\{a\}\} \subset f^{-1}(\{\emptyset\})$ *car* $f(\{a\}) = \emptyset$ *ainsi* $f^{-1}(\{\emptyset\}) = \{\{a\}\}$.
   Soit $X \in \mathcal{P}(E)$ *tel que* $X \in f^{-1}(\{E\})$ *; alors* $f(X) = E$ *d'où* $f(f(X)) = f(E) = E \setminus \{a\}$ *(***). D'autre part, on a* $a \notin X$ *car si* $a \in X$, $f(X) = X \setminus \{a\} \neq E$ *ainsi* $f(X) = X \cup \{a\}$ *donc* $a \in f(X)$ *et par suite* $f(f(X)) = f(X) \setminus \{a\} = (X \cup \{a\}) \setminus \{a\} = X \setminus \{a\}$ *alors* $f(f(X)) = X$ *(****) car* $a \notin X$. *De (***) et (****), on obtient* $X = E \setminus \{a\}$ *ainsi* $f^{-1}(\{E\}) \subset \{E \setminus \{a\}\}$ *et on a* $\{E \setminus \{a\}\} \subset f^{-1}(\{E\})$ *car* $f(E \setminus \{a\}) = E$ *ainsi* $f^{-1}(\{E\}) = \{\{E \setminus \{a\}\}\}$.
2) *On a* f *est bijective car* $f \circ f = Id$, *en effet, soit* $X \in \mathcal{P}(E)$ *; si* $a \in X$, *alors* $f(X) = X \setminus \{a\}$ *et comme* $a \notin f(X)$, *alors* $f \circ f(X) = f(X) \cup \{a\} = (X \setminus \{a\}) \cup \{a\} = X \cup \{a\} = X$ *car* $a \in X$. *Si* $a \notin X$, *alors* $f(X) = X \cup \{a\}$ *et comme* $a \in f(X)$, *alors* $f \circ f(X) = f(X) \setminus \{a\} = (X \cup \{a\}) \setminus \{a\} = X \setminus \{a\} = X$ *car* $a \notin X$.

Remarque. *On peut aussi montrer directement que* f *est injective et surjective :*
On a f *est injective, en effet, soit* $X_1, X_2 \in \mathcal{P}(E)$ *tels que* $X_1 \neq X_2$, *alors* $X_1 \setminus X_2 \neq \emptyset$ *ou* $X_2 \setminus X_1 \neq \emptyset$ *et puisque* X_1 *et* X_2 *jouent des rôles symétriques, il suffit de traiter un seul cas. Supposons que* $X_1 \setminus X_2 \neq \emptyset$, *alors il existe* $x_1 \in X_1 \setminus X_2$. *Si* $x_1 = a$, *alors* $x_1 = a \notin X_1 \setminus \{a\} = f(X_1)$ *mais* $x_1 = a \in X_2 \cup \{a\} = f(X_2)$ *ainsi* $f(X_1) \neq f(X_2)$. *Si* $x_1 \neq a$, *alors* $x_1 \in X_1 \setminus \{a\}$ *ainsi* $x_1 \in f(X_1)$ *mais* $x_1 \notin f(X_2)$ *car* $x_1 \notin X_2$ *et* $x_1 \neq a$ *et donc* $f(X_1) \neq f(X_2)$.
f *est aussi surjective, en effet, soit* $Y \in \mathcal{P}(E)$. *Si* $a \in Y$, *alors il existe* $X = Y \setminus \{a\} \in \mathcal{P}(E)$ *tel que* $f(X) = X \cup \{a\} = Y$. *Si* $a \notin Y$, *alors il existe* $X = Y \cup \{a\} \in \mathcal{P}(E)$ *tel que* $f(X) = X \setminus \{a\} = Y$ *ainsi* f *est surjective.*
On peut aussi remarquer que l'application f *n'est autre que l'application* $\mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$, $X \mapsto X \Delta \{a\}$ *et ainsi* f *est involutive, i.e.,* $f \circ f = id$.

Solution de l'exercice 13. *On considère la relation binaire* $\mathcal{R}$ *définie sur* $\mathbb{N}^2$ *par* $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ *si* $a + d = b + c$, *où* $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N}^2$.

1) *Il est évident que* $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Z}$, $(a,b) \mapsto a - b$ *est une application bien définie. Soit* $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N}^2$ *; on a* $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ *si, et seulement si,* $a + d = b + c$ *si, et seulement si,* $a - b = c - d$ *si, et seulement si,*

$f((a,b)) = f((c,d))$ *ainsi la relation* $\mathcal{R}$ *est la relation d'équivalence associée à l'application* f.

Remarque. *On peut aussi vérifier directement que* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence comme suit :*
$\mathcal{R}$ *est réflexive, en effet, Soit* $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ *; on a* $a+b = b+a$, *alors* $(a,b)\mathcal{R}(a,b)$ *ainsi* $\mathcal{R}$ *est réflexive.*
Soit $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N}^2$ *tels que* $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$, *alors* $a+d = b+c$, *i.e.,* $d+a = c+b$ *d'où* $(d,c)\mathcal{R}(a,b)$ *ainsi* $\mathcal{R}$ *est symétrique.*
Soit $(a,b),(c,d),(s,t) \in \mathbb{N}^2$ *tels que* $(a,b)\mathcal{R}(c,d)$ *et* $(c,d)\mathcal{R}(s,t)$, *alors* $a+d = b+c$ *et* $c+t = d+s$ *d'où* $a+t+c+d = v+s+c = d$ *alors* $a+t = b+s$ *donc* $(a,b)\mathcal{R}(s,d)$ *et ainsi* $\mathcal{R}$ *est transitive. Comme* $\mathcal{R}$ *est réflexive, symétrique et transitive, alors* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence.*

2) *Soit* $(a,b) \in \mathbb{N}^2$.

   a) *On a* $\overline{(a,b)} = \overline{(0,0)}$ *si, et seulement si,* $(a,b)\mathcal{R}(0,0)$ *si, et seulement si,* $a+0 = b+0$ *si, et seulement si,* $a = b$.

   b) *Si* $a \geq b$, *alors* $(a-b,0) \in \mathbb{N}^2$ *et* $a+0 = b+(a-b)$ *d'où* $(a,b)\mathcal{R}(a-b,0)$ *donc* $\overline{(a,b)} = \overline{(a-b,0)}$.

   c) *Si* $a < b$, *alors* $(0,b-a) \in \mathbb{N}^2$ *et* $a+(b-a) = b+0$ *d'où* $(a,b)\mathcal{R}(0,b-a)$ *donc* $\overline{(a,b)} = \overline{(0,b-a)}$.

   d) *Il suffit de prendre* $c = b$ *et* $d = a$ *pour obtenir* $\overline{(a+c,b+d)} = \overline{(0,0)}$ *car* $(a+c,b+d) = (a+b,b+a)\mathcal{R}(0,0)$.

3) *L'ensemble quotient* $\mathbb{N}^2/\mathcal{R}$ *est formé des classes d'équivalence* $\overline{(a,b)}$, *où* $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, *qui, d'après ce qui précède, sont soit de la forme* $\overline{(a-b,0)}$, *si* $a-b \in \mathbb{N}$ *ou de la forme* $\overline{(0,b-a)}$ *si* $b-a \in \mathbb{N}^\star$ *donc de la forme* $\overline{(n,0)}$, *avec* $n \in \mathbb{N}$ *ou de la forme* $\overline{(0,n)}$, *avec* $n \in \mathbb{N}^\star$ *ainsi* $\mathbb{N}^2/\mathcal{R} = \{\overline{(n,0)}/n \in \mathbb{N}\} \cup \{\overline{(0,n)}/n \in \mathbb{N}^\star\}$.

4) f *est injective, en effet, soit* $n,m \in \mathbb{N}$ *tels que* $f(n) = f(m)$, *alors* $\overline{(n,0)} = \overline{(m,0)}$ *d'où* $(n,0)\mathcal{R}(m,0)$ *ainsi* $n = n+0 = 0+m = m$.

5) *L'application* $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{Z}$, $(a,b) \mapsto a-b$ *est surjective, en effet, soit* $k \in \mathbb{Z}$, *alors : si* $k \in \mathbb{N}$, *en prenant* $a = k$ *et* $b = 0$, *on obtient* $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ *et* $f((a,b)) = a-b = k$ *et si* $k < 0$, *en prenant* $a = 0$ *et* $b = -k$, *on obtient* $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ *et* $f((a,b)) = a-b = k$.
f étant surjective, il vient $\operatorname{Im} f = \mathbb{Z}$ *et, d'après le cours, l'application* g *n'est autre que* $\widetilde{f} : \mathbb{N}^2/\mathcal{R} \to \mathbb{Z}$, $\overline{(a,b)} \mapsto a-b$ *qui est une application bijective.*

Contrôle Final/2017-2018

Solution de l'exercice 14.

1) Soient $a, n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$. On a $a^n + 1 > 2$ et $a^n + 1$ est premier, alors $a^n + 1$ est impair donc a^n est pair et par suite a est pair.
Ecrivons $n = 2^m.t$, où t est impair, alors $a^n+1 = (a^{2^m})^t+1 = (a^{2^m}+1).r$, où $r \in \mathbb{N}$ car t est impair ainsi $a^{2^m}+1/a^n+1$ et comme a^n+1 est premier et $a^{2^m}+1 \neq 1$ alors $a^{2^m}+1 = a^n+1$ d'où $n = 2^m$.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $(F_n - 1)^2 + 1 = (2^{2^n})^2 + 1 = 2^{2^{n+1}} + 1 = F_{n+1}$.

b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $F_n - 2 = \prod_{k=0}^{n-1} F_k$: Pour $n = 1$, $F_1 - 2 = 2^2+1-2 = 3$ et $\prod_{k=0}^{0} F_k = F_0 = 2+1 = 3$ ainsi l'égalité est vérifiée pour $n = 1$. Supposons que l'égalité est vérifiée pour n. On a, d'après a), $F_{n+1} - 2 = (F_n - 1)^2 + 1 - 2 = (F_n - 1)^2 - 1 = F_n(F_n - 2)$ (*) et, par hypothèse de récurrence, $F_n - 2 = \prod_{k=0}^{n-1} F_k$, ainsi $(*) = F_n.\prod_{k=0}^{n-1} F_k = \prod_{k=0}^{n} F_k$ et par suite l'égalité est vérifiée pour $n+1$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $F_n - 2 = \prod_{k=0}^{n-1} F_k$.

c) Soit $m, n \in \mathbb{N}^\star$ tels que $m \neq n$; on peut supposer que $m < n$ (de même si $n < m$), alors F_m divise $\prod_{k=0}^{n-1} F_k$ car $m \leq n-1$ ainsi on écrit $\prod_{k=0}^{n-1} F_k = qF_m$, $q \in \mathbb{N}$, il vient, d'après b), $F_n - 2 = qF_m$ donc $F_n \wedge F_m = F_n \wedge 2 = 1$ car F_n est impair.

Solution de l'exercice 15. *Soit $x, k \in \mathbb{R}$. On a $\frac{(x-1)^2}{(x+1)(x+3)} = k$ si, et seulement si, $\begin{cases} (x-1)^2 = k(x+1)(x+3) \\ x \notin \{-1,-3\} \end{cases}$ si, et seulement si, $(x-1)^2 = k(x+1)(x+3)$ si, et seulement si, $(1-k)x^2 - 2(1+2k)x + 1 - 3k = 0$. donc $\{x \in \mathbb{R}/ \frac{(x-1)^2}{(x+1)(x+3} = k\}\} = \emptyset$ si, et seulement si, $\Delta' = (1+2k)^2 - (1-k)(1-3k) < 0$ si, et seulement si, $k(k+8) < 0$ si, et seulement si, $k \notin]-8, 0[$.*

Solution de l'exercice 16.

1) $\Rightarrow$) : Supposons que f est surjective et soit $X \in \mathcal{P}(E)$ et $y \in F \setminus f(X)$ donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et $y \notin f(X)$ alors $x \notin X$ donc $x \in (E \setminus X)$ par suite $y = f(x) \in (E \setminus X)$ et donc $F \setminus f(X) \subset f(E \setminus X)$.

$\Leftarrow$) : *Pour* $X = E$, *on aura* $F \setminus f(E) \subset f(E \setminus E) = f(\emptyset) = \emptyset$ *d'où* $F \subset f(E)$ *alors* $F = f(E)$ *car* $f(E) \subset F$ *et donc* f *est surjective.*

2) $\Rightarrow$) : *Supposons que* f *est bijective, alors* f *est surjective d'où, par 1),* $F \setminus f(X) \subset f(E \setminus X)$. *D'autre part, si* $y \in f(E \setminus X)$, *alors il existe* $x \in E \setminus X$ *tel que* $y = f(x)$ *d'où* $y \in F$ *mais* $y \notin f(X)$ *car si* $y \in f(X)$, *il existe* $x' \in X$ *tel que* $f(x') = y = f(x)$ *et par injectivité de* f, $x' = x$ *d'où* $x \in X$ *ce qui constitue une contradiction, donc* $y \in F \setminus f(X)$ *et par suite* $f(E \setminus X) \subset F \setminus f(X)$ *ainsi on conclut que* $F \setminus f(X) = f(E \setminus X)$.
$\Leftarrow$) :*On suppose que pour tout* $X \in \mathcal{P}(E)$, $F \setminus f(X) = f(E \setminus X)$, *alors* f *est surjective par 1).* f *est aussi injective, en effet, soit* $x, x' \in E$ *tels que* $x \neq x'$, *on prend* $X = \{x\}$ *alors* $F \setminus \{f(x)\} = F \setminus f(X) = f(E \setminus X)$ *et comme* $x' \neq x$, $x' \in E \setminus X$ *d'où* $f(x') \in f(E \setminus X) = F \setminus \{f(x)\}$ *alors* $f(x') \neq f(x)$. *Puisque* f *est injective et* f *est surjective, alors* f *est bijective.*

Solution de l'exercice 17.

1) *Soit* $x \in \mathbb{R}$ *et* $k \in \mathbb{Z}$; *on a* $E(x) \leq x < E(x) + 1$ *d'où* $E(x) + k \leq x + k < E(x) + k + 1$ *et comme* $E(x) + k \in \mathbb{Z}$, *alors* $E(x + k) = E(x) + k$.

2) *On considère l'application* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - E(x)$ *et la relation d'équivalence* $\mathcal{R}$ *associée à* f.

   a) $f(0) = 0 = f(1)$ *mais* $0 \neq 1$ *d'où* f *n'est pas injective. On peut aussi remarquer que* f *est* 1*-périodique et donc* f *n'est pas injective.*

   b) *Soit* $y \in f(\mathbb{R})$, *alors il existe* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $y = f(x) = x - E(x)$ *et comme* $E(x) \leq x < E(x) + 1$, *alors* $0 \leq x - E(x) < 1$ *d'où* $y \in [0, 1[$ *ainsi* $f(\mathbb{R}) \subset [0, 1[$. *Inversement, soit* $y \in [0, 1[$, *alors il existe* $x = y \in [0, 1[$: $f(x) = x - E(x) = x = y$ *ainsi* $[0, 1[\subset f(\mathbb{R})$ *et par suite* $f(\mathbb{R}) = [0, 1[$. *Comme* $f(\mathbb{R}) = [0, 1[\neq \mathbb{R}$, f *n'est pas surjective.*

   c) $\Rightarrow$) : *Soit* $x, y \in \mathbb{R}$ *tels que* $x\mathcal{R}y$, *alors* $f(x) = f(y)$ *d'où* $x - E(x) = y - E(y)$ *donc* $x - y = E(x) - E(y) \in \mathbb{Z}$ *car* $E(x), E(y) \in \mathbb{Z}$.
   $\Leftarrow$) : *Soit* $x, y \in \mathbb{R}$ *tels que* $x - y \in \mathbb{Z}$, *alors il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $x - y = k$ *alors* $E(x) = E(y + k)$ *et, d'après 1),* $E(y + k) = E(y) + k$ *ainsi* $f(x) = x - E(x) = (y + k) - (E(y) + k) = y - E(y) = f(y)$ *et donc* $x\mathcal{R}y$.

   d) *Soit* $x, y \in \mathbb{R}$. *On a* $y \in cl(x)$ *si, et seulement si,* $y\mathcal{R}x$ *si, et seulement si,* $y - x \in \mathbb{Z}$ *si, et seulement si, il existe* $k \in \mathbb{Z}$: $y = x + k$ *ainsi* $cl(x) = \{x + k / k \in \mathbb{Z}\}$.

   e) *On a, d'après le cours,* $f = i \circ \widetilde{f} \circ s$, *avec* $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathcal{R}$, $x \mapsto cl(x) = \{x + k / k \in \mathbb{Z}\}$ *est la surjection canonique,* $\widetilde{f} : \mathbb{R}/\mathcal{R} \to \operatorname{Im} f = [0, 1[$, $cl(x) = \{x + k / k \in \mathbb{Z}\} \mapsto f(x) = x - E(x)$ *est bijective et* $i : \operatorname{Im} f = [0, 1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ *est l'injection canonique.*

Rattrapage/2017-2018

Solution de l'exercice 18. *Soit* $b \in \mathbb{C}$*, l'équation du second degré* $z^2+z+1-b=0$ *possède au moins une solution* a *dans* $\mathbb{C}$ *ainsi il existe* $a \in \mathbb{C}$ *tel que* $a^2+a+1=b$*, i.e., il existe* $a \in \mathbb{C}$ *tel que* $f(a)=b$ *d'où* $\mathbb{C} \subset f(\mathbb{C})$ *et puisque* $f(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}$*,* $f(\mathbb{C})=\mathbb{C}$.
Soit $y \in \mathbb{C}$*. on a* $y \in f(\mathbb{R})$ *si, et seulement si, il existe* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $y=f(x)$ *si, et seulement si, il existe* $x \in \mathbb{R}$ *tel que* $y=x^2+x+1$ *si, et seulement si, l'équation* $x^2+x+(1-y)=0$ *dont l'inconnue est* x *possède des solutions dans* $\mathbb{R}$ *si, et seulement si,* $\Delta = 1-4(1-y) \geq 0$ *si, et seulement si,* $y \in [\frac{3}{4}, +\infty[$ *ainsi* $f(\mathbb{R}) = [\frac{3}{4}, +\infty[$.
On a $f^{-1}(\mathbb{C}) = \{z \in \mathbb{C} / f(z) \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}$.
Soit $z \in \mathbb{C}$*. On a* $z \in f^{-1}(\mathbb{R})$ *si, et seulement si,* $f(z) \in \mathbb{R}$ *si, et seulement si,* $f(z) = \overline{f(z)}$ *si, et seulement si,* $z^2+z = \overline{z}^2+\overline{z}$ *si, et seulement si,* $(z-\overline{z})(z+\overline{z}+1)=0$ *si, et seulement si,* $(z-\overline{z})=0$ *ou* $(z+\overline{z}+1)=0$ *si, et seulement si,* $\mathrm{Re}(z)=0$ *ou* $\mathrm{Re}(z)=-\frac{1}{2}$ *ainsi* $f^{-1}(\mathbb{C}) = \mathbb{R} \cup \{z \in \mathbb{C} / \mathrm{Re}(z) = -\frac{1}{2}\}$.

Solution de l'exercice 19.

1) *Soit* $A \in \mathcal{P}(E)$ *et* $x \in A$*, alors* $f(x) \in f(A)$ *d'où* $x \in f^{-1}(f(A))$.
2) *Soit* $B \in \mathcal{P}(F)$ *et* $y \in f(f^{-1}(B))$*, alors il existe* $x \in f^{-1}(B)$ *tel que* $y=f(x)$ *et puisque* $x \in f^{-1}(B)$*,* $y=f(x) \in B$ *ainsi* $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Solution de l'exercice 20.

1) *On a* $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(E)$ *et* $\mathcal{H} \neq \emptyset$ *car* $\{a\} \in \mathcal{H}$.
   Soit $X, Y \in \mathcal{H}$ *alors* $X \cap Y \in \mathcal{H}$ *car* $a \in X \cap Y$.
   Soit $X, Y \in \mathcal{P}(E)$ *tels que* $X \subset Y$ *et* $X \in \mathcal{H}$*, alors* $a \in Y$ *car* $a \in X$ *et* $X \subset Y$ *d'où* $Y \in \mathcal{H}$*. Ainsi,* $\mathcal{H}$ *est un filtre.*
2) a) *On a* $\mathcal{F}_A \subset \mathcal{P}(E)$*. Puisque* $\mathcal{F} \neq \emptyset$*, il existe* $X_1 \in \mathcal{F}$ *et comme* $X_1 \cap A \subset A$ *avec* $X_1 \in \mathcal{F}$ *alors* $A \in \mathcal{F}_A$ *et par suite* $\mathcal{F}_A \neq \emptyset$.
   Soit $Y \in \mathcal{F}_A$*, alors il existe* $X \in \mathcal{F}$ *tel que* $X \cap A \subset Y$ *et puisque* $X \in \mathcal{F}$*,* $X \cap A \neq \emptyset$ *d'où* $Y \neq \emptyset$.
   Soit $Y_1, Y_2 \in \mathcal{F}_A$*, alors il existe* $X_1, X_2 \in \mathcal{F}$ *tel que* $X_1 \cap A \subset Y_1$ *et* $X_2 \cap A \subset Y_2$ *ainsi* $(X_1 \cap X_2) \cap A \subset Y_1 \cap Y_2$ *et comme* $X_1 \cap X_2 \in \mathcal{F}$ *car* $\mathcal{F}$ *est un filtre, alors* $Y_1 \cap Y_2 \in \mathcal{F}_A$.
   Soit $Y_1, Y_2 \in \mathcal{P}(A)$ *tels que* $Y_1 \subset Y_2$ *et* $Y_1 \in \mathcal{F}_A$*, alors il existe* $X \in \mathcal{F}$ *tel que* $X \cap A \subset Y_1$ *d'où* $X \cap A \subset Y_2$ *car* $Y_1 \subset Y_2$ *ainsi* $Y_2 \in \mathcal{F}_A$ *et donc* $\mathcal{F}_A$ *est un filtre.*

   b) *Soit* $X \in \mathcal{F}$*, alors* $X \in \mathcal{F}_A$ *car* $X \cap A \subset X$ *ainsi* $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_A$*. Si* $A \notin \mathcal{F}$*, alors* $\mathcal{F} \subsetneq \mathcal{F}_A$ *car* $A \in \mathcal{F}_A$ *mais* $A \notin \mathcal{F}$.

Solution de l'exercice 21.

1) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^\star$ *; on a* $n = 2^0.n$ *alors* $n\mathcal{R}n$ *ainsi* $\mathcal{R}$ *est réflexive.*
Soit $m, n \in \mathbb{N}^\star$ *tels que* $m\mathcal{R}n$*, alors il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $m = 2^k n$*, alors il existe* $-k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $n = 2^{-k}m$ *d'où* $n\mathcal{R}m$ *ainsi* $\mathcal{R}$ *est symétrique.*
Soit $m, n, p \in \mathbb{N}^\star$ *tels que* $m\mathcal{R}n$ *et* $n\mathcal{R}p$ *alors il existe* $k, h \in \mathbb{Z}$ *tel que* $m = 2^k n$ *et* $n = 2^h p$ *d'où il existe* $k + h \in \mathbb{Z}$ *tel que* $m = 2^{k+h}p$ *alors* $m\mathcal{R}n$ *et ainsi* $\mathcal{R}$ *est transitive.*
Puisque $\mathcal{R}$ *est réflexive, symétrique et transitive, alors* $\mathcal{R}$ *est une relation d'équivalence.*

2) *Soit* $n \in \mathbb{N}^\star$ *; on a* $n \in cl(1)$ *si, et seulement si,* $n\mathcal{R}1$ *si, et seulement si, il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $n = 2^k$ *si, et seulement si, il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $n = 2^k$ *car* $n \in \mathbb{N}^\star$ *et ainsi* $cl(1) = \{2^k/k \in \mathbb{N}\}$*.*
On a $2\mathcal{R}1$ *car* $2 = 2^1.1$ *ainsi* $cl(2) = cl(1)$*.*
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ *; on a* $n \in cl(3)$ *si, et seulement si,* $n\mathcal{R}3$ *si, et seulement si, il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $n = 2^k.3$ *si, et seulement si, il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $n = 2^k$ *car* $n \in \mathbb{N}^\star$ *et ainsi* $cl(3) = \{2^k.3/k \in \mathbb{N}\}$*.*

3) *Soit* $a \in \mathbb{N}^\star$*.*

   a) *Si* $a = 1$*, alors* $a = 2^0.1$*. Si* $a \geq 2$*, d'après le théorème fondamental d'arithmétique,* $a = 2^r p_1^{k_1}...p_s^{k_s}$*, où* $p_1, \ldots, p_s$ *sont des nombres premiers deux à deux distincts et différents de 2,* $r, k_1, \ldots, k_s \in \mathbb{N}$*. Si* a *est une puissance de 2, on pose* $t = 1$ *et si* a *ne l'est pas, on pose* $t = p_1^{k_1}...p_s^{k_s}$ *donc* $t \in \mathbb{N}$ *est impair car* $p_1, \ldots, p_r$ *sont impairs, ainsi* $a = 2^r.t$ *avec* $r, t \in \mathbb{N}$ *et* t *est impair.*

   b) *D'après 3)a), il existe* $t \in \mathbb{N}$ *impair tel que* $a\mathcal{R}t$ *ainsi* $t \in cl(a)$*. Supposons qu'il existe* $t' \in \mathbb{N}$ *impair tel que* $t' \in c(a)$*, alors* $t'\mathcal{R}a$ *et puisque* $a\mathcal{R}t$ *et* $\mathcal{R}$ *est transitive,* $t'\mathcal{R}t$ *ainsi il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que* $t' = 2^k.t$ *d'où* $k = 0$ *car* t *et* t' *sont impairs et par suite* $t' = t$*.*

4) *Soit* $m, n \in \mathbb{N}^\star$ *tels que* $cl(m) = cl(n)$*, alors il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $m = 2^k n$*. Si* $k \geq 0$*, alors* n/m *et si* $k < 0$*, alors* m/n *ainsi* m *divise* n *ou* n *divise* m*.*
Il est évident que 1 et 3 ne sont pas en relation d'où $cl(1) \neq cl(3)$ *mais* $1/3$ *ainsi la réciproque du résultat précédent est fausse.*

Contrôle Final/2018-2019

Solution de l'exercice 22.

1) *Soit* $n \in \mathbb{Z}$*.*

   a) *On a* $5n^3 - n = (n+2)(5n^2 - 10n + 19) - 38$ *ainsi* $(5n^3 - n) \wedge (n+2) = (n+2) \wedge 38$*.*

b) On pose $d=(5n^3-n)\wedge(n+2)$ d'où, d'après la question 1)a), d divise 38 et par suite les valeurs possibles de d sont : 1, 2, 19 et 38.

2) On a $(5n^3-n)\wedge(n+2)=19$ si, et seulement si, $(n+2)\wedge 38=19$ si, et seulement si, 19 divise $(n+2)$ et $\frac{n+2}{19}\wedge 2=1$ si, et seulement si, 19 divise $n+2$ et $\frac{n+2}{19}$ est impair si, et seulement si, il existe $h\in\mathbb{Z}$: $n+2=19h$ et $n+2$ est impair si, et seulement si, il existe $h\in\mathbb{Z}$ impair : $n+2=19h$ si, et seulement si, il existe $k\in\mathbb{Z}$: $n=19(2k+1)-2$ si, et seulement si, il existe $k\in\mathbb{Z}$: $n=38k+17$ si, et seulement si, $n\in\{38k+17/k\in\mathbb{Z}\}$.

Solution de l'exercice 23.

1) Soit $\overline{x_1},\overline{x_2}$ tels que $\overline{x_1}=\overline{x_2}$; alors 60 divise x_1-x_2 et puisque $12/60$, 12 divise x_1-x_2 ainsi 12 divise $3(x_1-x_2)$ d'où 12 divise $(3x_1)-3(x_2)$ donc $\widehat{3x_1}=\widehat{3x_2}$, i.e., $f(x_1)=f(x_2)$ et ainsi f est une application bien définie.

2) On suppose $f^{-1}\{\widehat{1}\}\neq\emptyset$; soit $\overline{x}\in f^{-1}\{\widehat{1}\}$, alors $f(\overline{x})=\widehat{1}$ d'où $\widehat{3x}=\widehat{1}$ ainsi 12 divise $1-3x$ d'où il existe $k\in\mathbb{Z}$: $1=3x+12k$ (*), ce qui contredit le fait que 3 et 12 ne sont pas premiers entre eux, et donc $f^{-1}\{\widehat{1}\}=\emptyset$.
Comme $f^{-1}\{\widehat{1}\}=\emptyset$, i.e., 1 n'a pas d'antécédent par f, alors f n'est pas surjective.

Remarque. *De (*), on obtient aussi $1=3(x+4k)$ d'où 3 divise 1, ce qui est faux.*

3) On a $f(\overline{0})=\widehat{0}=f(\overline{4})$ et puisque $\overline{0}\neq\overline{4}$, alors f n'est pas injective.

Solution de l'exercice 24.

1) Soit $(x,a)\in\mathbb{Z}\times A$.
On a $(x,a)\in f^{-1}(\{1\})$ si, et seulement si, $f((x,a))=1$ si, et seulement si, $\frac{x}{a}=1$ si, et seulement si, $x=a$ si, et seulement si, $(x,a)=(a,a)$, ainsi $f^{-1}(\{1\})=\{(a,a)/a\in A\}=\{(10^k,10^k)/k\in\mathbb{N}\}$.
On a $f^{-1}(\{\frac{1}{3}\})=\emptyset$, en effet, supposons que $f^{-1}(\{\frac{1}{3}\})\neq\emptyset$, alors il existe $(x,a)\in\mathbb{Z}\times A$ tel que $x\in f^{-1}(\{\frac{1}{3}\})$ d'où $f((x,a))=\frac{1}{3}$ alors $\frac{x}{10^k}=\frac{1}{3}$ d'où $3x=10^k$ ainsi 3 divise 1 (le cas où $k=0$) ou 3 divise 10 (le cas où $k>0$), ce qui est faux, et par suite $f^{-1}(\{\frac{1}{3}\})=\emptyset$.

2) Comme $f^{-1}(\{\frac{1}{3}\})=\emptyset$, $\frac{1}{3}$ n'a pas d'antécédent, alors f n'est pas surjective.
On a $f((1,1))=1=f((10,10))$ mais $(1,1)\neq(10,10)$ d'où f n'est pas injective.

3) On considère la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{Z}\times A$ et associée à f.

a) Soit $(x,a)\in\mathbb{Z}\times A$.
On a $(x,a)\in\overline{(0,1)}$ si, et seulement si, $(x,a)\mathcal{R}(0,1)$ si, et seulement si, $f((x,a))=f((0,1))$ si, et seulement si, $\frac{x}{a}=\frac{0}{1}$ si, et seulement si,

$x = 0$ ainsi $\overline{(0,1)} = \{(0,a)/a \in A\}$.
On a $(x,a) \in \overline{(1,1)}$ si, et seulement si, $(x,a)\mathcal{R}(1,1)$ si, et seulement si, $f((x,a)) = f((1,1))$ si, et seulement si, $\frac{x}{a} = \frac{1}{1}$ si, et seulement si, $x = a$ ainsi $\overline{(1,1)} = \{(a,a)/a \in A\}$.

b) On considère l'application $g : \mathbb{Z} \to (\mathbb{Z} \times A)/\mathcal{R}$, $n \mapsto \overline{(n,1)}$.

i) Soit $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $g(x_1) = g(x_2)$, d'où $\overline{(x_1,1)} = \overline{(x_2,1)}$ alors $(x_1,1)\mathcal{R}(x_2,1)$ ainsi $f((x_1,1)) = f((x_2,1))$ et par suite $x_1 = x_2$ donc g est injective.

ii) Supposons que $g^{-1}(\{\overline{(1,10)}\}) \neq \emptyset$; alors il existe $x \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in g^{-1}(\{\overline{(1,10)}\})$ d'où $g(x) = \overline{(1,10)}$ ainsi $\overline{(x,1)} = \overline{(1,10)}$ donc $(x,1)\mathcal{R}(1,10)$ alors $f((x,1)) = f((1,10))$ et par suite $x = \frac{1}{10}$, ce qui contredit le fait que $x \in \mathbb{Z}$; ainsi $g^{-1}(\{\overline{(1,10)}\}) = \emptyset$.
Puisque $(1,10)$ n'a pas d'antécédent par g, g n'est pas surjective et par suite g n'est pas bijective.

4) On a $\operatorname{Im} f = D$, en effet, Soit $y \in \operatorname{Im} f$, alors il existe $(x,a) \in (\mathbb{Z} \times A)$: $y = f((x,a))$ d'où il existe $(x,a) \in (\mathbb{Z} \times A)$: $y = \frac{x}{a}$ ainsi $y \in D$ et donc $\operatorname{Im} f \subset D$. Inversement, soit $y \in D$, alors il existe $(x,a) \in (\mathbb{Z} \times A)$: $y = \frac{x}{a}$ alors il existe $(x,a) \in (\mathbb{Z} \times A)$: $y = f((x,a))$ d'où $y \in f(\mathbb{Z} \times A)$ ainsi $D \subset \operatorname{Im} f$ et donc $D = \operatorname{Im} f$.
D'après le cours, l'application $\widetilde{f} : (\mathbb{Z} \times A)/\mathcal{R} \to D$, $\overline{(x,a)} \mapsto f((x,a)) = \frac{x}{a}$ est bijective.

Solution de l'exercice 25. ***(Bonus)****On suppose que f est surjective ; alors pour tout $x \in E$, il existe $x' \in E$ tel que $x = f(x')$ car f est surjective donc $x = f(x') = f \circ f(x')$ car $f = f \circ f$ d'où $x = f(f(x')) = f(x)$ car $f(x') = x$ ainsi $f = id_E$.*

Rattrapage/2018-2019

Solution de l'exercice 26. *Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$:*
Pour $n = 2$, on a $1 + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4} > \frac{6}{5} = \frac{3.2}{2.2+1}$ donc la propriété est vraie pour $n = 2$.
Supposons que la propriété est vraie à un rang $n \geq 2$ fixé, i.e., $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$ d'où $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$. En calculant $\frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{3(n+1)}{2(n+1)+1}$, on obtient $\frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{3(n+1)}{2(n+1)+1} = \frac{n(n+2)}{(2n+1)(2n+3)(n+1)^2} > 0$ alors $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} > \frac{3(n+1)}{2(n+1)+1}$ donc la propriété est vraie au rang $n+1$ et par suite pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, $1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} > \frac{3n}{2n+1}$.

Solution de l'exercice 27. *Soit n un entier naturel impair.*

1) Puisque n est impair, alors $n \equiv 1$ ou 3 ou 5 ou $7 \pmod 8$ ainsi $n^2 \equiv 1 \pmod 8$.

2) D'après 1), $8/n^2-1$ d'où $8/n(n^2-1)$. Aussi, on a, d'après le petit théorème de Fermat, $n^3 \equiv n \pmod 3$ d'où $3/n(n^2-1)$ donc $24 = 3.8$ divise $n(n^2-1)$ car $3 \wedge 8 = 1$.

Solution de l'exercice 28. *Soit E un ensemble non vide.*

1) Soit F et G deux parties de E. On a $F \cap G = \emptyset$ si, et seulement si, $\forall x \in G, x \notin F$, si, et seulement si, $\forall x \in G, x \in \overline{F}$ si, et seulement si, $G \subset \overline{F}$.

2) a) Soit $X \in \mathcal{P}(E)$. On a X est solution de l'équation si, et seulement si, $(X \cap A) \cup (\overline{X} \cap B) = \emptyset$ si, et seulement si, $X \cap A = \emptyset$ et $\overline{X} \cap B = \emptyset$ (*) ; ainsi, d'après 1), on a (*) si, et seulement si, $B \subset \overline{\overline{X}}$ et $X \subset \overline{A}$ si, et seulement si, $B \subset X \subset \overline{A}$ (car $\overline{\overline{X}} = X$). donc l'ensemble de solutions de l'équation est $S = \{X \in \mathcal{P}(E)/B \subset X \subset \overline{A}\}$.
On a $A \cap B = \emptyset$ d'où, d'après 1), $B \subset \overline{A}$ alors $B \in S$ donc $S \neq \emptyset$ (**).

b) Si $A \cap B \neq \emptyset$, alors l'équation $(X \cap A) \cup (\overline{X} \cap B) = \emptyset$ n'a pas de solutions, en effet, supposons que l'équation possède une solution X, alors, d'après (**), $B \subset X \subset \overline{A}$ d'où $B \subset \overline{A}$ ainsi $A \cap B \neq \emptyset$, ce qui est contredit l'hypothèse.

Solution de l'exercice 29. *On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2 - 2x$.*

1) Soit $y \in f(\mathbb{R})$, alors il existe $x \in \mathbb{R} : y = f(x)$ d'où $y = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$ et il vient que $y \geq -1$ ainsi $y \in [-1, +\infty[$ et par suite $f(\mathbb{R}) \subset [-1, +\infty[$. Inversement, soit $y \in [-1, +\infty[$ alors $y + 1 \geq 0$ alors il existe $x = \sqrt{y+1} + 1 \in \mathbb{R} : f(x) = y$ donc $[-1, +\infty[\subset f(\mathbb{R})$ et ainsi $f(\mathbb{R}) = [-1, +\infty[$
Comme $f(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$, alors f n'est pas surjective.

2) f n'est pas injective, en effet, $f(0) = f(2) = 0$ mais $2 \neq 0$.

3) On considère la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ et associée à f.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$.
On a $x \in \overline{0}$ si, et seulement si, $x\mathcal{R}0$ si, et seulement si, $f(x) = f(0)$ si, et seulement si, $f(x) = 0$ si, et seulement si,$x \in \{0, 2\}$. Ainsi, $\overline{0} = \{0, 2\}$.
On a $x \in \overline{1}$ si, et seulement si, $x\mathcal{R}1$ si, et seulement si, $f(x) = f(1)$ si, et seulement si, $x^2 - 2x = -1$ si, et seulement si,$x \in \{1\}$. Ainsi, $\overline{1} = \{1\}$.

On a $2 \in \overline{0}$ *d'où* $\overline{2} = \overline{0}$ *donc* $\overline{2} \cup \overline{0} = \overline{0} = \{0, 2\}$.
On a $f(3) = 3 \neq 8 = f(4)$ *d'où* 3 *et* 4 *ne sont pas en relation donc* $\overline{3} \cap \overline{4} = \emptyset$.

b) *Soit* $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ *et* $x \in \mathbb{R}$. *On a* $x \in \overline{a}$ *si, et seulement si,* $x\mathcal{R}a$ *si, et seulement si,* $f(x) = f(a)$ *si, et seulement si,* $x^2 - 2x = a^2 - 2a$ *si, et seulement si,* $(x - a)(x - a + 2) = 0$ *si, et seulement si,* $x = a$ *ou* $x = 2 - a$ *ainsi* $\overline{a} = \{a, 2 - a\}$.

c) $x \in \mathbb{R}$. *D'après 3)a) et b), si* $x = 1$, $\overline{x} = \{1\}$ *et si* $x \neq 1$, $\overline{x} = \{x, 2 - x\}$ *donc l'ensemble quotient* $\mathbb{R}/\mathcal{R} = \{\{x, 2 - x\}/x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\} \cup \{\{1\}\}$. *Aussi, d'après 1),* $\operatorname{Im} f = [-1, +\infty[$ *ainsi, d'après le cours,* $\widetilde{f} : (\mathbb{R}/\mathcal{R}) = \{\{x, 2 - x\}/x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\} \cup \{\{1\}\} \to \operatorname{Im} f = [-1, +\infty[$, $\overline{t} \mapsto f(t) = t^2 - 2t$ *est une bijection.*

Solution de l'exercice 30. *On suppose que* f *est injective. Soit* $x \in E$, *comme* $f = f \circ f$, *alors* $f(f(x)) = f(x)$ *donc* $f(x) = x$ *car* f *est injective, ceci pour tout* $x \in E$, *ainsi* $f = id_E$.