

I) NOTIONS DE TOPOLOGIE SUR $\mathbb{R}^n$ **1) Normes sur $\mathbb{R}^n$:****a) Définition:**

On appelle norme sur $\mathbb{R}^n$ toute application $x \rightarrow \|x\|$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que :

$$(i) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(ii) \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

$$(iii) \forall (x, y) \in E^2 \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \text{ (l'inégalité triangulaire)}$$

L'espace $\mathbb{R}^n$ étant muni de la norme $\|\cdot\|$ est dit espace normé.

b) Exemples:

Sur $\mathbb{R}$ l'application valeur absolue $x \rightarrow |x|$ est une norme.

Sur $\mathbb{R}^n$ les applications $\|\cdot\|_1 : x \rightarrow \sum_{k=1}^n |x_k|$, $\|\cdot\|_2 : x \rightarrow (\sum_{k=1}^n |x_k|^2)^{1/2}$ et

$\|\cdot\|_\infty : x \rightarrow \sup_{1 \leq k \leq n} |x_k|$ sont des normes.

Remarque: Dans l'espace $\mathbb{R}^n$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty \leq n \|x\|_1,$$

Plus généralement, nous verrons plus tard que deux normes quelconques sur $\mathbb{R}^n$

$\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalentes dans le sens suivant :

$$\exists \alpha, \beta > 0 \text{ tel que : } \alpha \|x\|' \leq \|x\| \leq \beta \|x\|'$$

c) Boules ouvertes et fermées de $\mathbb{R}^n$

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$. Pour tout point x de $\mathbb{R}^n$ et tout $r > 0$, la boule ouverte (respectivement fermée) de centre x et de rayon r est définie par :

$$B(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n / \|x - y\| < r\} \text{ (respectivement } \overline{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n / \|x - y\| \leq r\}).$$

Dans $\mathbb{R}$ les boules ouvertes (respectivement fermées) sont les intervalles centrés ouverts (respectivement fermés).

Exercice . Déterminer les boules unités de $\mathbb{R}^2$ centrées à l'origine des trois normes fondamentales définies ci-dessus.

d) Intérieur, adhérence d'une partie de $\mathbb{R}^n$

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dite ouverte si elle est soit vide soit non vide et si pour tout point x de A il existe $r > 0$ telle que la boule de centre x et de rayon r soit contenue dans A ($B(x, r) \subset A$). Soit A une partie quelconque de $\mathbb{R}^n$; un point a de A est dit point intérieur de A s'il existe une boule centrée en a et contenu dans A . L'intérieur d'une partie A quelconque de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des points intérieurs de A et c'est le plus grand ouvert de $\mathbb{R}^n$ contenu dans A , il est noté A° . A titre d'exemple, les boules ouvertes et plus généralement les réunions quelconques de boules ouvertes sont des ouverts.

Une partie B de $\mathbb{R}^n$ est dite fermée si elle est le complémentaire d'une partie ouverte A , soit $B = \mathbb{R}^n \setminus A$. Soit B une partie quelconque de $\mathbb{R}^n$; un point a de $\mathbb{R}^n$ est dit point adhérent à B si pour tout $r > 0$ on a $B(x, r) \cap B$ non vide. L'adhérence d'une partie B quelconque de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des points adhérents à B , c'est le plus petit fermé contenant B , noté $\overline{B}$. Une réunion finie de boules fermées est un exemple de fermé.

Exemple: L'intérieur de la boule fermée $\overline{B}(x,r)$ est la boule ouverte $B(x,r)$. L'adhérence de la boule ouverte $B(x,r)$ est la boule fermée $\overline{B}(x,r)$.

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dite bornée s'il existe $r > 0$, tel que A soit contenue dans la boule fermée $\overline{B}(0,r)$:

$$\exists r > 0, \forall x \in A, \|x\| \leq r$$

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dite connexe si elle n'est pas réunion de deux ouverts disjoints de $\mathbb{R}^n$:

$$\nexists A_1, A_2 \text{ ouverts de } \mathbb{R}^n : A = A_1 \cup A_2 \text{ avec } A_1 \cap A_2 = \emptyset$$

Dans $\mathbb{R}$, une partie est connexe si et seulement si c'est un intervalle.

Remarque: Du fait que deux normes quelconques de $\mathbb{R}^n$ sont toujours équivalentes, les notions définies dans ce paragraphe (ouvert, fermé,...) ne dépendent pas de la norme choisie dans $\mathbb{R}^n$.

2) Suites dans $\mathbb{R}^n$

Définition. Une suite (x_m) d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est dite convergente vers $x \in \mathbb{R}^n$, si l'on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N} : m > m_0 : \|x_m - x\| < \varepsilon$$

Proposition 1

La limite d'une suite convergente dans $\mathbb{R}^n$ est unique.

Proposition 2

Soit (x_m) une suite d'éléments d'une partie A de $\mathbb{R}^n$. Nous avons :

$$x_m = (x_m^1, x_m^2, \dots, x_m^n)$$

Alors la suite (x_m) converge dans $\mathbb{R}^n$ si et seulement si chaque suite réelle (x_m^k) ($k \in \{1, \dots, n\}$) converge dans $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} x_m = (\lim_{m \rightarrow +\infty} x_m^1, \lim_{m \rightarrow +\infty} x_m^2, \dots, \lim_{m \rightarrow +\infty} x_m^n)$$

Propriétés :

Soient $(u_m), (v_m)$ deux suites convergentes de $\mathbb{R}^n$ et λ réel, alors grâce aux propriétés des suites réelles, nous avons :

$$\text{i) } \lim_{m \rightarrow +\infty} (u_m + v_m) = \lim_{m \rightarrow +\infty} u_m + \lim_{m \rightarrow +\infty} v_m$$

$$\text{ii) } \lim_{m \rightarrow +\infty} \lambda u_m = \lambda \lim_{m \rightarrow +\infty} u_m$$

Remarques: 1) La convergence d'une suite ne dépend pas de la norme choisie dans $\mathbb{R}^n$.

2) On peut montrer que l'adhérence d'une partie A quelconque de $\mathbb{R}^n$, est égal à l'ensemble des limites de suites d'éléments de A .

e) Compacité:

Définition:

Une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dite compacte si toute suite d'éléments de A on peut en extraire une sous suite convergente dans A .

Théorème 1 :

Une partie de $\mathbb{R}^n$ est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée dans $\mathbb{R}^n$.

Exemple: Toute boule fermée ou sphère de $\mathbb{R}^n$ est compacte.

II) FONCTIONS CONTINUES DE $\mathbb{R}^n$ DANS $\mathbb{R}^p$

1) Notion de limite:

a) Définition. Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in \overline{A}$, on dit que f admet une limite en a de valeur $l \in \mathbb{R}^p$ quand x tend vers a , si l'on a :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A \text{ et } \|x - a\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - l\| < \varepsilon.$$

On écrit alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

b) Remarque:

Avec les hypothèses de la définition ci-dessus, comme la fonction f est à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, nous écrivons $f = (f_1, \dots, f_p)$. En prenant la même démarche que pour la proposition 2, nous pouvons montrer que la fonction f admet une limite l en a si et seulement si les fonctions composantes $f_1, \dots, f_p$ admettent des limites $l_1, \dots, l_p$ et l'on a alors :

$$l = (l_1, \dots, l_p)$$

Ceci ramène l'étude des limites de fonctions sur $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ aux limites de fonctions à valeurs réelles.

c) Propriétés des limites:

Soient f et g deux fonctions définies sur $A \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs réelles et admettant une limite en un point $a \in \overline{A}$, nous avons alors les propriétés:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\text{ii) } \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

iii) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) / g(x)] = [\lim_{x \rightarrow a} f(x)] / [\lim_{x \rightarrow a} g(x)]$, à condition que $g(x) \neq 0$ pour x voisin de a .

Exercice: Calculer $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x/(x^2 + y^2)$

2) Continuité

a) Définition: Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. On dit que f est continue en un point a appartenant à l'intérieur de A , si l'on a :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

ce qui se traduit par :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A \text{ et } \|x - a\| < \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| < \varepsilon.$$

b) Remarque:

Grâce à la remarque II) 1) b), étudier la continuité de $f = (f_1, \dots, f_p)$ au point a se ramène à l'étude de la continuité des fonctions composantes $f_1, \dots$, et f_p en ce point.

c) Théorème 2

Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Alors f est continue au point a si et seulement si pour toute suite (x_m) d'éléments de A qui converge vers a la suite $(f(x_m))$ converge vers $f(a)$.

Remarque : Soit f une fonction définie et continue sur une partie A de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$, en fixant $(x_2, \dots, x_n)$ l'application $x_1 \rightarrow f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ est continue. Même résultat pour les autres fonctions partielles de f . La réciproque de cette propriété est fausse, voici un contre-exemple avec la fonction définie dans $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x,y) = \begin{cases} x y/(x^2 + y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

d) Proposition 3: Continuité globale

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$. Alors nous avons l'équivalence:

- i) f est continue en tout point de $\mathbb{R}^n$.
- ii) L'image réciproque par f de tout ouvert (respectivement fermé) de $\mathbb{R}^p$ est un ouvert (respectivement fermé) de $\mathbb{R}^n$.

e) Proposition 4:

Toute application linéaire u de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, est continue et vérifie une inégalité de la forme suivante :

$$\|u(x)\| \leq M\|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

où M est une constante dépendante de u .

f) Exemple:

Soit à étudier la continuité de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y/(x^2 + y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est clair que f est continue en tout point (x,y) non nul. Passons en coordonnées polaires, nous obtenons :

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = r \cos^2 \theta \sin \theta$$

d'où

$$|f(r \cos \theta, r \sin \theta)| \leq r$$

donc

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

g) Proposition 5:

Soit f une fonction définie sur une partie ouverte A de $\mathbb{R}^2$ et $(a,b) \in A$. Alors f est continue au point (a,b) si et seulement si pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, nous avons :

$$\lim_{r \rightarrow 0} f(a + r \cos \theta, b + r \sin \theta) = f(a,b)$$

Exercice. Discuter la continuité de l'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} |x|^\alpha |y|^\beta / (x^2 + y^2) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

selon les paramètres réels α et β .

h) Propriétés algébriques :

Soient f et g deux fonctions définies sur $A \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs réelles et qui sont continues en un point a intérieur de A , alors les fonctions somme $f+g$, produit $f.g$ et rapport f/g (si $g(a) \neq 0$) sont continues en a .

La preuve découle du théorème 2, et des propriétés des suites réelles convergentes.

Un autre corollaire de ce théorème affirme que si f est continue en a et si g est continue en $b = f(a)$, alors la fonction composée $g \circ f$ est continue en a .

k) Propriétés topologiques des fonctions continues :

Théorème 3:

Soit f une fonction définie et continue sur une partie A de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Alors l'image par f de tout compact K de A est compact dans $\mathbb{R}^p$.

Corollaire

Toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont deux à deux équivalentes.

Théorème

L'image de toute partie connexe de $\mathbb{R}^n$ par une application continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ est connexe.

III) CALCUL DIFFERENTIEL

1) Dérivées partielles

a) **Définition:** Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $a = (a_1, \dots, a_n) \in U$. On dit que $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ admet une dérivée partielle par rapport à la variable x_i au point a si la fonction f_i définie dans un voisinage de a_i par $f_i(x) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)$ est dérivable au point a_i , c'est à dire que le rapport :

$$\frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_n)}{h}$$

admet une limite finie quand h tend vers 0. Cette limite est notée $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ et appelée la dérivée partielle de f par rapport à x_i , au point a .

b) Exemples:

i) La fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 y^3$ admet des dérivées partielles par rapport à x et y en tout point de $\mathbb{R}^2$, données par :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^3, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 y^2$$

ii) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x, y) = \begin{cases} x y / (x^2 + y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{On a } \lim_{h \rightarrow 0} [f(h, 0) - f(0, 0)]/h = \lim_{h \rightarrow 0} [f(0, h) - f(0, 0)]/h = 0$$

Donc f admet des dérivées partielles par rapport à x et y en $(0, 0)$ et on a $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

c) Matrice jacobienne:

Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. Pour $x \in U$, nous avons $f(x) = (f_1(x), \dots, f_p(x))$, où $f_1, \dots, f_p$ sont des fonctions sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$, appelées les fonctions composantes de f . Soit $i \in \{1, \dots, n\}$, on dit que f admet des dérivées partielles par rapport à x_i en un point a de U , si chacune des fonctions $f_1, \dots, f_p$ admet une dérivée partielle par rapport à x_i au point a .

Si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la fonction f admet au point a des dérivées partielles par rapport à x_i , la matrice à p lignes et à n colonnes

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial f_p}{\partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

notée $J(f)(a)$ est appelée la matrice jacobienne de f au point a .

2) Dérivées partielles d'ordre supérieur

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une fonction définie sur U à valeurs réelles et $a \in U$. Soient $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Supposons que f admette une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ au voisinage du point a . Si la fonction $x \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ admet une dérivée partielle par rapport à x_i au point a , on dit que la fonction f admet une dérivée partielle seconde par rapport à x_i et x_j au point a , notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)}{\partial x_i}(a)$. Si $i = j$, on écrit $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a)$ au lieu de $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}(a)$.

Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{N}^k$, on définit de proche en proche les dérivées partielles d'ordre $|\alpha|$, quand elles existent par :

$$\partial^\alpha f(a) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_{i_1}^{\alpha_1} \dots \partial x_{i_k}^{\alpha_k}}(a)$$

où $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$ et $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_k$.

Théorème 4 (Théorème de Schwarz)

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une fonction définie sur U à valeurs réelles et admettant des dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ définies au voisinage d'un point a de U . Si les fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ sont continues au point a , on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$.

Remarques: i) Si la fonction $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ (ou $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$) n'est pas continue au point, la relation $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ n'est pas satisfaite a priori. Voici un contre-exemple:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par:

$$f(x, y) = \begin{cases} x y (x^2 - y^2) / (x^2 + y^2) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = (y(x^4 - y^4) + 4x^2 y^3) / (x^2 + y^2)^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = (x(x^4 - y^4) - 4x^2 y^3) / (x^2 + y^2)^2$$

ce qui donne :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = -1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 1$$

ii) Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ admet des dérivées partielles continues jusqu'à un ordre $k \geq 2$, alors d'après le théorème de Schwarz, on peut changer l'ordre des dérivations partielles par rapport à $x_1, \dots, x_n$.

3) Différentiabilité

Définition . Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une fonction définie sur U à valeurs dans $\mathbb{R}^p$. On dit que f est différentiable au point x de U s'il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ telle que :

$$f(x+h) = f(x) + L(h) + \|h\| \varepsilon(h)$$

où ε est une fonction définie au voisinage de 0 telle que $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

L'application linéaire L dépend de f et de x , elle est notée $df(x)$ et s'appelle la différentielle de f au point x . La différentiabilité de f peut s'exprimer de la façon suivante : il existe une application linéaire $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ telle que :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} [f(x+h) - f(x) - L(h)] = 0$$

Exemples :

i) Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Toute fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable au sens classique en un point x est différentiable et l'on a :

$$df(x)(h) = f'(x)h$$

où $f'(x)$ désigne la dérivée de f au point x .

ii) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une application linéaire. Alors f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^n$ et l'on a pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $df(x) = f$. En effet, nous avons pour tout $(x, h) \in (\mathbb{R}^n)^2$ la relation $f(x+h) = f(x) + f(h)$.

Théorème 5

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une fonction définie sur U à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, et $f_1, \dots, f_p$ les composantes de f . Alors f est différentiable en un point x de U si et seulement si $f_1, \dots, f_p$ sont différentiables au point x et nous avons :

$$df(x) = (df_1(x), \dots, df_p(x))$$

Théorème 6

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une fonction définie sur U à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, et $f_1, \dots, f_p$ les composantes de f . Si f est différentiable en un point x de U alors pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, la fonction composante f_i admet des dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$ pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$. De plus, la matrice associée à l'application linéaire $df(x)$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathbb{R}^p$ est la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n}$ de f au point x .

Remarque

La réciproque du théorème 6 n'est pas toujours vraie. Etudier le contre-exemple suivant :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = \begin{cases} x y / \sqrt{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f admet des dérivées partielles nulles à l'origine mais qu'elle n'est pas différentiable en ce point.

Théorème 7

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une fonction définie sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$ et admettant des dérivées partielles continues en un point a de U , alors f est différentiable au point a .

Définition

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est de classe C^k sur U , k un entier non nul, si f admet des dérivées partielles $\partial^\alpha f$ continues pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ tel que $|\alpha| \leq k$.

4) Différentiabilité dans une direction

Définition. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\vec{u}$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$. Une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est dite différentiable dans la direction de $\vec{u}$ en un point a de U si le rapport $\frac{f(a+t\vec{u})-f(a)}{t}$ admet une limite quand t tend vers 0. Cette limite, quand elle existe, est notée $D_{\vec{u}}f(a)$.

Théorème 8

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable en un point a de U , et $\vec{u} = (u_1, \dots, u_n)$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^n$. Alors f admet une dérivée au point a dans la direction de $\vec{u}$ donnée par :

$$D_{\vec{u}}f(a) = df(a)(\vec{u})$$

5) Opérations sur les fonctions différentiables

Théorème 9

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et deux fonctions $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}^p$. Si f et g sont différentiables en un point a de U , alors :

i) $f+g$ est différentiable au point a et on a :

$$d(f+g)(a) = df(a) + dg(a) \quad (\text{et } J(f+g)(a) = J(f)(a) + J(g)(a))$$

ii) Si $p = 1$, alors $f \cdot g$ est différentiable au point a et on a :

$$d(f \cdot g)(a) = g(a)df(a) + f(a)dg(a)$$

iii) Si $p = 1$ et $g(a) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est différentiable au point a et on a :

$$d\left(\frac{f}{g}\right)(a) = \frac{1}{g(a)^2} [g(a)df(a) - f(a)dg(a)]$$

Théorème 10

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ et deux fonctions $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$ telles que $f(U) \subset V$. Soit a un point de U , alors si f est différentiable au point a et si g est différentiable au point $f(a)$ alors $g \circ f$ est différentiable au point a et on a :

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a) \quad (\text{et } J(g \circ f)(a) = J(g)(f(a)) \cdot J(f)(a))$$

soit

$$\left(\frac{\partial (g_i \circ f)}{\partial x_j} (a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq p, \\ 1 \leq j \leq m}} = \left(\frac{\partial g_i}{\partial y_k} (f(a)) \right)_{\substack{1 \leq i \leq p, \\ 1 \leq k \leq n}} \left(\frac{\partial f_k}{\partial x_j} (a) \right)_{1 \leq j \leq m}$$

Exemples :

1) Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(U) \subset V$. Supposons que f et g soient différentiables sur U et V respectivement. Nous avons :

$$J(f)(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

et

$$J(g)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$$

d'où

$$J(g \circ f)(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}(f_1(u, v), f_2(u, v)) & \frac{\partial g}{\partial y}(f_1(u, v), f_2(u, v)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial f_1}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial f_2}{\partial u}(u, v) & \frac{\partial f_2}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(f(u, v))}{\partial u} &= \frac{\partial g}{\partial x}(f(u, v)) \frac{\partial f_1}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial g}{\partial y}(f(u, v)) \frac{\partial f_2}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial g(f(u, v))}{\partial v} &= \frac{\partial g}{\partial x}(f(u, v)) \frac{\partial f_1}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial g}{\partial y}(f(u, v)) \frac{\partial f_2}{\partial v}(u, v) \end{aligned}$$

2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable. Posons $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, alors nous avons :

$$\frac{\partial f(x(r, \theta), y(r, \theta))}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \frac{\partial y}{\partial r}(r, \theta)$$

et

$$\frac{\partial f(x(r, \theta), y(r, \theta))}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \frac{\partial x}{\partial \theta}(r, \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta)) \frac{\partial y}{\partial \theta}(r, \theta)$$

ce qui donne

$$\frac{\partial f(x(r, \theta), y(r, \theta))}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) + r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta))$$

et

$$\frac{\partial f(x(r, \theta), y(r, \theta))}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x}(x(r, \theta), y(r, \theta)) + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}(x(r, \theta), y(r, \theta))$$

Exercice

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer que les fonctions ϕ et ψ définies sur $\mathbb{R}^2$ par $\phi(x, y) = f(x + y)$ et $\psi(x, y) = f(x - y)$ sont différentiables et calculer leurs dérivées partielles.

6) Théorème des accroissements finis

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit que U est convexe si pour tout couple $(a, b) \in U^2$, le segment $[a, b] = \{x = a + \lambda(b - a) / \lambda \in [0, 1]\}$ est inclus dans U .

Théorème 11

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur U . Alors pour tout couple $(x, x + h) \in U^2$ il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que :

$$f(x + h) - f(x) = df(x + \theta h)(h) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x + \theta h) h_i$$

Remarque:

Le théorème des accroissements finis n'est pas toujours valable si la fonction f est à valeurs dans un espace $\mathbb{R}^p$ avec $p \geq 2$. Néanmoins, nous avons le résultat du théorème suivant qui donne une inégalité des accroissements finis :

Théorème 12

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction différentiable sur U telle que $\|df(x)\| \leq k$ (k une constante) pour tout $x \in U$. Alors, quels que soient les points x, y de U , on a :

$$\|f(y) - f(x)\| \leq k\|y - x\|$$

Corollaire

Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction différentiable sur U . Alors f est constante sur U si et seulement si sa différentielle est nulle sur U ($df(x) = 0$).

Le résultat est également vrai dans le cas où U est connexe.

7) Développement limités et Formule de Taylor:

Théorème 13

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

A l'ordre 1:

Si f est de classe C^1 . Pour tout $a \in U$, nous avons le développement limité suivant, au voisinage du point a :

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + o(\|h\|)$$

A l'ordre 2:

Si f est de classe C^2 , nous avons le développement limité suivant, au voisinage du point a de U :

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j \right) + o(\|h\|^2)$$

8) Extremums

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Définitions. On dit que f présente un maximum (respectivement minimum) local en un point x_0 de U , s'il existe une boule $B(x_0, r)$ contenue dans U telle que :

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ pour tout } x \in B(x_0, r) \\ (\text{respectivement } f(x) \geq f(x_0), \text{ pour tout } x \in B(x_0, r))$$

$$\text{Un point } x_0 \text{ de } U \text{ tel que } \nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix} = \vec{0}$$

est dit point critique de f .

Théorème 14

Si f est différentiable au point $x_0 \in U$ et présente un extremum local en ce point, alors x_0 est un point critique de f .

Définition

Soit $M = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n réelle et symétrique ($a_{ij} = a_{ji}$ pour tout couple d'entiers $(i, j) \in [1, n]^2$). On dit que M est positive si, pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, nous avons :

$$(Mh, h) \geq 0$$

Elle est dite définie positive si

$$(Mh, h) > 0$$

pour tout $h \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{Avec } h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}, \text{ on a } Mh = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j} h_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj} h_j \end{pmatrix} \text{ d'où}$$

$$(Mh, h) = \sum_{j=1}^n a_{jj} h_j^2 + 2 \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} h_i h_j$$

Exemples:

1) Une matrice réelle symétrique d'ordre 2, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ est positive si et

seulement si $a, c \geq 0$ et $\det M \geq 0$. M est définie positive ssi $a, c > 0$ et $\det M > 0$.

2) Soit A une matrice réelle d'ordre $n \geq 1$, alors $M = {}^t A A$ (où ${}^t A$ la transposée de A) est positive. En effet, nous avons :

$$({}^t A A h, h) = (Ah, Ah) = \|Ah\|^2 \geq 0.$$

M est définie positive si A est inversible, soit ssi $\det A \neq 0$.

Remarque:

On peut montrer qu'une matrice symétrique réelle d'ordre n est positive (respectivement définie positive) ssi ses valeurs propres sont positives (respectivement strictement positives).

Théorème 15

Soit M une matrice réelle carrée d'ordre n , symétrique définie positive, alors il existe une constante $c > 0$ telle que:

$$(Mx, x) \geq c \|x\|^2$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Définition

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. de classe C^2 . On appelle hessienne de f au point $x_0 \in U$ la matrice symétrique:

$$H(f)(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

Rappel sur la dimension 1:

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de classe C^2 sur I . Soit $x_0 \in I$ tel que $f'(x_0) = 0$. Alors nous avons les résultats suivants:

- Si $f''(x_0) > 0$, alors f présente un minimum strict en x_0 .
- Si $f''(x_0) < 0$, alors f présente un maximum strict en x_0 .
- Si $f''(x_0) = 0$, on ne peut rien dire.

Théorème 16

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. de classe C^2 sur U et $x_0 \in U$, un point critique de f . Alors :

- i) Si la matrice $H(f)(x_0)$ est définie positive, alors f présente un minimum local au point x_0 .
- ii) Si la matrice $-H(f)(x_0)$ est définie positive, alors f présente un maximum local au point x_0 .

Théorème 17 (Cas de la dimension 2)

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. de classe C^2 sur U et $(x_0, y_0) \in U$, un point critique de f . On pose $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$ et

$s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$. Alors nous avons les résultats suivants:

- Si $rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, f admet en (x_0, y_0) un minimum local .
- Si $rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, f admet en (x_0, y_0) un maximum local .
- Si $rt - s^2 < 0$, f n'admet pas d'extremum local en (x_0, y_0) .
- Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure directement.

Exemple:

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$

Etudier la nature des points critiques de cette fonction.

