



Département de Physique

Filière SMP – Semestre 5 - PHYSIQUE DES MATERIAUX 1

CHAPITRE 6

CONSTANTES D'ELASTICITE ET ONDES ELASTIQUES

Pr. A. Belayachi
belayach@fsr.ac.ma

SOMMAIRE

1. Introduction
2. Analyse des contraintes
3. Analyse des déformations
 - 3.1 Déformation uniforme
 - 3.2 Déformation non uniforme
 - 3.3 Remarque
 - 3.4 Dilatation
4. Loi de Hooke et constantes d'élasticité
5. Propagation des ondes élastiques dans les cristaux cubiques
6. Déterminations expérimentales des constantes d'élasticité
7. Application

1. Introduction

Une déformation peut être **plastique** si le solide reste déformé après arrêt de l'action de la force d'une contrainte, et elle peut être **élastique** si le solide **reprend sa forme initiale** après l'arrêt de l'action des forces. L'élasticité en physique des solides est la qualité d'un solide à être déformable tout en reprenant sa forme d'origine lorsque la contrainte qu'on lui applique disparaît. Aucun matériau n'est parfaitement élastique, généralement la déformation est élastique pour les efforts suffisamment faibles, puis devient plastique à partir d'un certain seuil de contrainte.

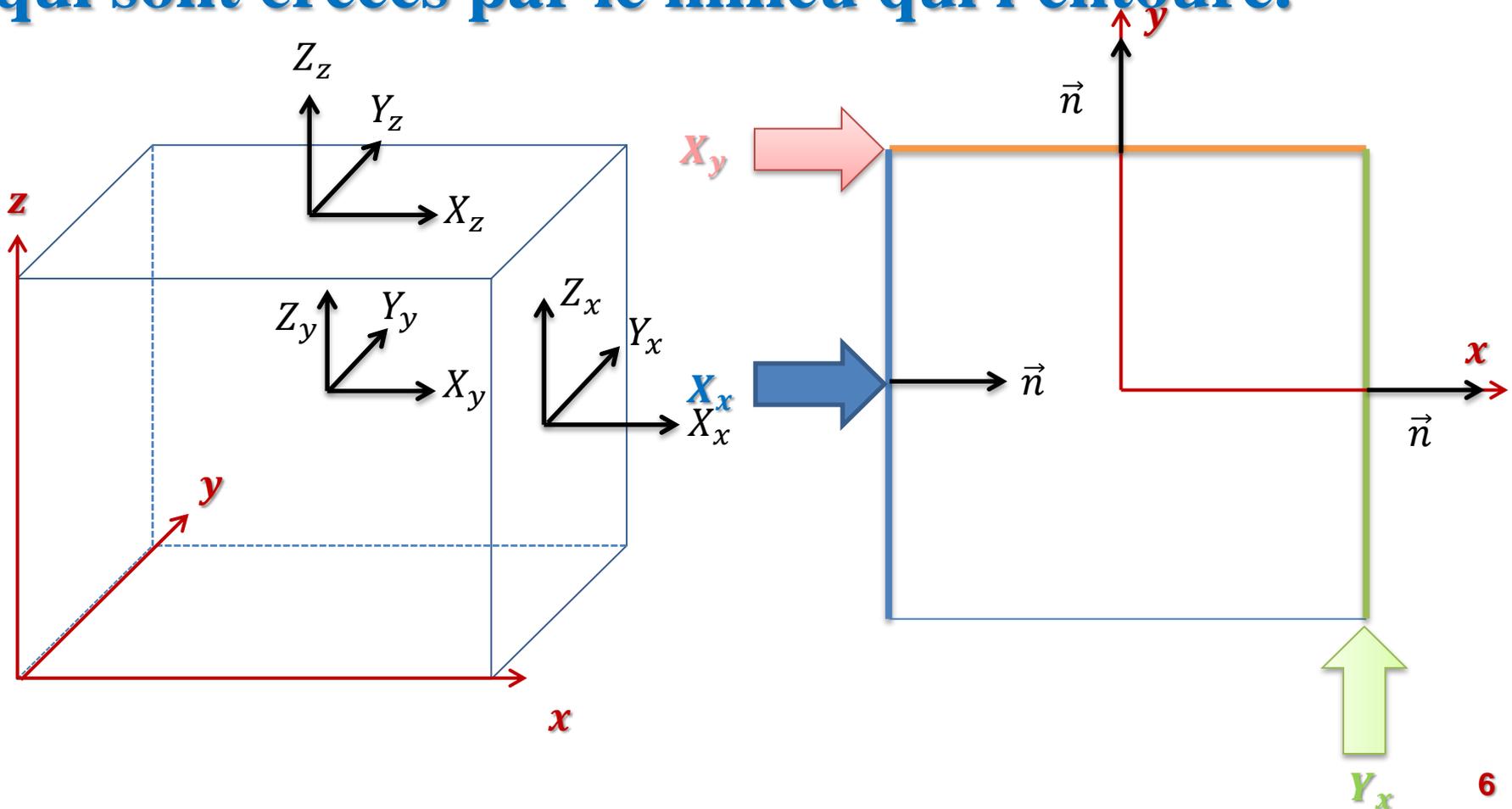
Dans cette étude le solide sera considéré comme un milieu continu homogène et non comme un réseau périodique d'atomes. Les **constantes d'élasticité** sont des grandeurs macroscopiques reliant, dans les solides homogènes, les contraintes aux déformations. Elles permettent donc d'évaluer la vitesse de propagation des ondes élastiques, mais le résultat obtenu n'est valable que lorsque la longueur des ébranlements est grande devant la distance qui sépare les atomes, c'est-à-dire $\lambda > 10^{-6} \text{ cm}$ soit des fréquences inférieures à $10^{11} - 10^{12} \text{ Hz}$.

Le domaine de fréquence où l'approximation continue est valable permet l'utilisation des **ondes ultrasonores** pour **mesurer** les **constantes d'élasticité** et étudier les défauts des réseaux (Méthodes d'Analyses Non Destructives **M.A.N.D**). Ce domaine de fréquences utilisé constitue donc la limite ($k \rightarrow 0$) vers laquelle tendra l'étude des vibrations du réseau (**Chapitre 7: Phonons et vibrations des réseaux**).

La formulation des résultats peut paraître complexe à cause de l'inévitable multiplicité des indices, mais les méthodes physiques utilisées sont simples: la **loi de Hooke** et la **deuxième loi de Newton**.

2. Analyse des contraintes

- Ce sont les **forces** qui, **par unité d'aire**, s'exercent sur la surface d'un élément du solide et qui sont créées par le milieu qui l'entoure.



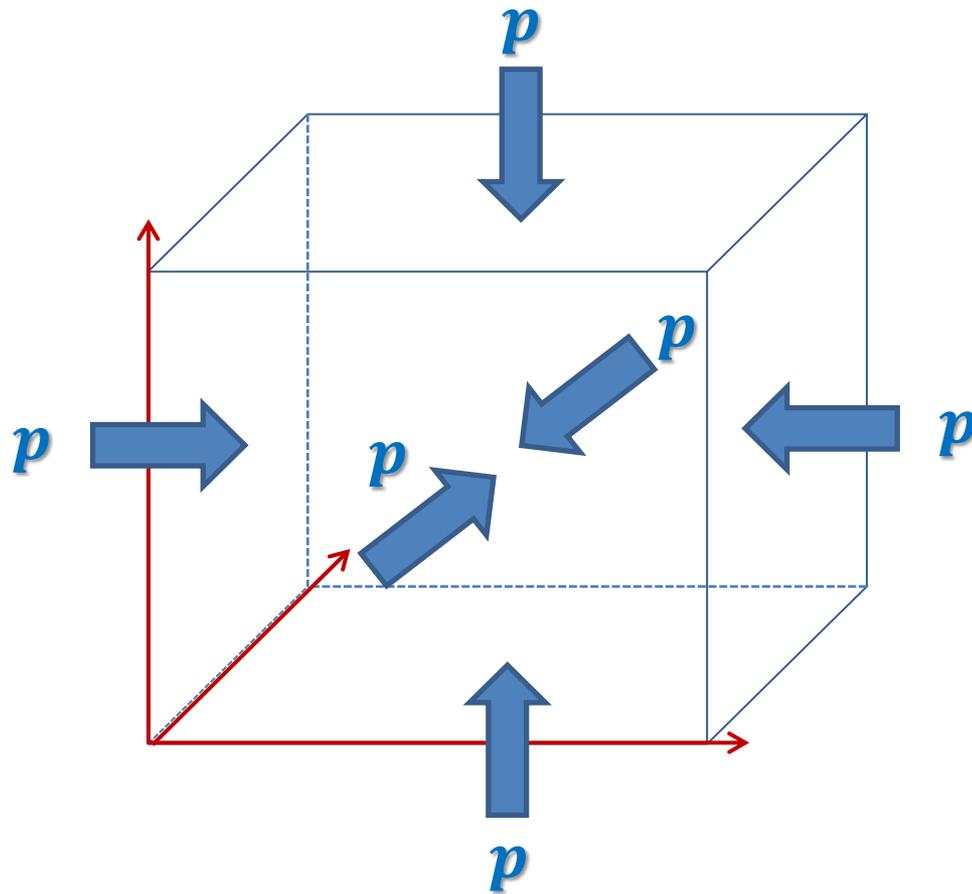
- On définit la contrainte par ses composantes normale et tangentielle, et on la présente par neuf composantes $X_x, X_y, X_z, Y_x, Y_y, Y_z, Z_x, Z_y$ et Z_z . Les lettres capitales indiquent la direction de la force et les indices correspondent à la normale au plan sur lequel s'applique la force (X_x est une force appliquée dans la direction x sur une unité d'aire dont la normale est colinéaire à x , X_y est une force appliquée dans la direction x sur une unité d'aire dont la normale est colinéaire à y).
- Pour un corps en équilibre statique la somme des forces dans les directions X et Y est nulle. La résultante est nulle. Alors le couple totale par rapport à l'origine est nul si $Y_x = X_y$.

- En utilisant le fait que $Y_z = Z_y$; $Z_x = X_z$ et $Y_x = X_y$, la contrainte qui s'exerce sur un solide peut être décrite par **6 composantes indépendantes**.

- Dans le cas d'une contrainte uniaxiale, le tenseur des contraintes est symétrique et se réduit à la matrice carrée suivante :

$$\begin{pmatrix} X_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Soit un matériau de forme parallélépipédique soumis à une pression uniforme P_0 . On le soumet à une augmentation de pression p . Les contraintes σ sur chaque paire de face sont identiques et $\sigma = -p$.



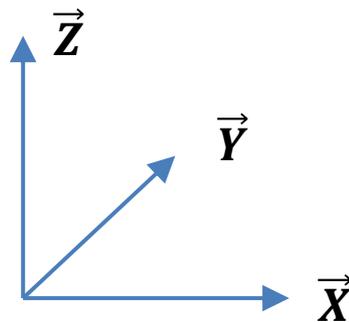
Le tenseur de contraintes s'écrit:

$$\begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

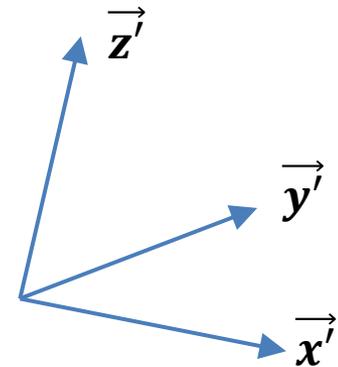
3. Analyse des déformations

Le **déplacement** est un mouvement de translation ou de rotation et parfois les deux au même temps, sans modification ni de la forme ni des dimensions de l'objet. La **déformation** implique un **changement** de la **forme** ou/et des **dimensions** de l'objet. On supposera que les 3 vecteurs **orthogonaux** \vec{X} , \vec{Y} , \vec{Z} de longueur unité sont liés au solide non déformé.

Avant déformation



Après déformation



3.1 Déformation uniforme

Après une petite **déformation uniforme** qui sera la **même** sur chaque **maille élémentaire** du cristal, les axes \vec{X} , \vec{Y} et \vec{Z} changent d'orientation et de longueur. On exprime les nouveaux axes \vec{x}' , \vec{y}' et \vec{z}' en fonction des anciens.

$$\begin{aligned}\vec{x}' &= (1 + \varepsilon_{xx})\vec{X} + \varepsilon_{xy}\vec{Y} + \varepsilon_{xz}\vec{Z} \\ \vec{y}' &= \varepsilon_{yx}\vec{X} + (1 + \varepsilon_{yy})\vec{Y} + \varepsilon_{yz}\vec{Z} \\ \vec{z}' &= \varepsilon_{zx}\vec{X} + \varepsilon_{zy}\vec{Y} + (1 + \varepsilon_{zz})\vec{Z}\end{aligned}\quad (1)$$

Les coefficients $\varepsilon_{\alpha\beta}$ définissent la déformation. Ils sont sans dimension et leur valeur est très petite devant 1 si la déformation est faible.

On cherche à trouver l'effet de la déformation sur un atome repéré par son vecteur position \vec{r} par rapport à l'origine prise sur un atome quelconque:

$$\vec{r} = x\vec{X} + y\vec{Y} + z\vec{Z}$$

Si la déformation est uniforme, l'atome occupera la position:

$$\vec{r}' = x\vec{x}' + y\vec{y}' + z\vec{z}'$$

Le déplacement \vec{R} de la déformation est défini par :

$$\vec{R} = \vec{r}' - \vec{r} = x(\vec{x}' - \vec{X}) + y(\vec{y}' - \vec{Y}) + z(\vec{z}' - \vec{Z})$$

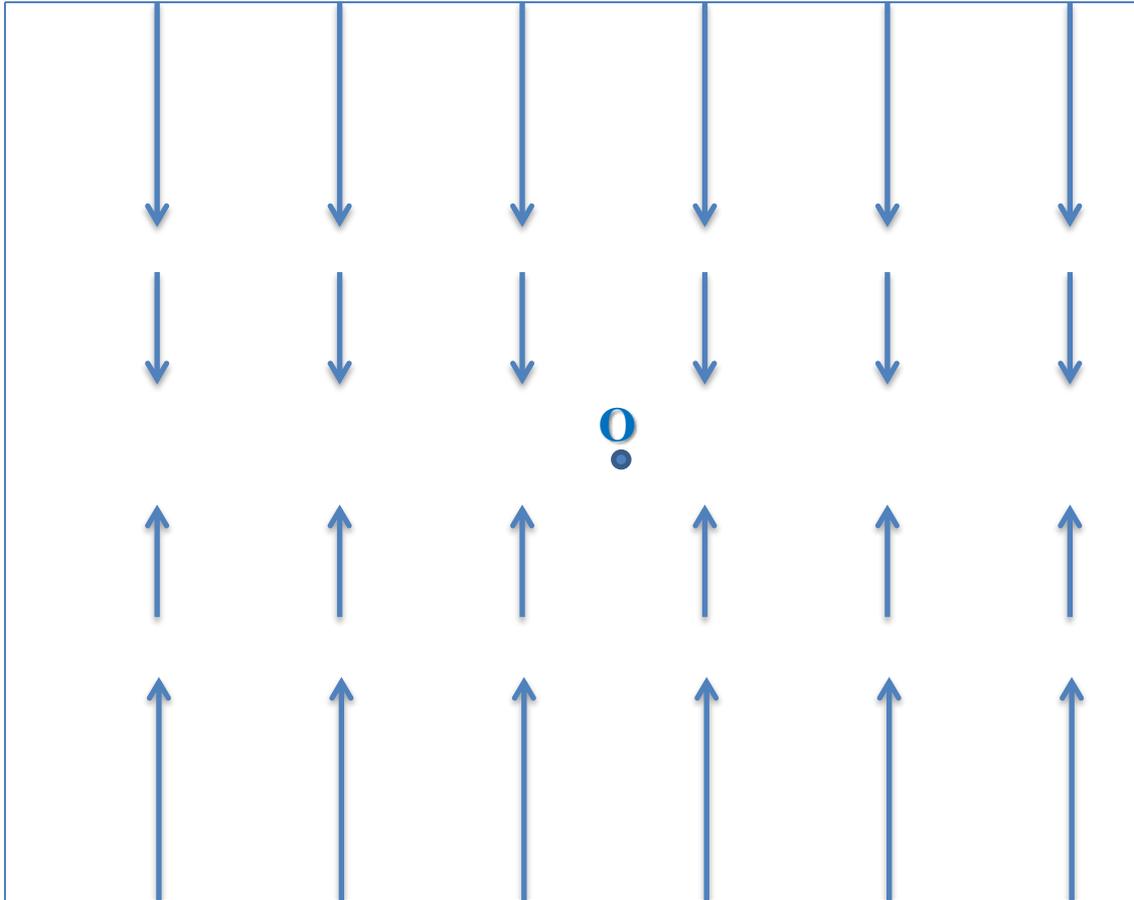
En remplaçant \vec{x}' , \vec{y}' et \vec{z}' on peut écrire le vecteur \vec{R} en fonction des coefficients de la déformation.

$$\begin{aligned} \vec{R}(r) = & (x\varepsilon_{xx} + y\varepsilon_{yx} + z\varepsilon_{zx})\vec{X} \quad (2) \\ & + (x\varepsilon_{xy} + y\varepsilon_{yy} + z\varepsilon_{zy})\vec{Y} \\ & + (x\varepsilon_{xz} + y\varepsilon_{yz} + z\varepsilon_{zz})\vec{Z} \end{aligned}$$

En introduisant les paramètres u , v et w on pourra simplifier l'expression précédente et l'écrire sous la forme :

$$\vec{R}(r) = u(r)\vec{X} + v(r)\vec{Y} + w(r)\vec{Z} \quad (3)$$

Avec $u(r)$, $v(r)$, et $w(r)$ sont les trois coordonnées du déplacement correspondant aux 3 directions de l'espace X , Y et Z .



Vecteurs de déplacement \vec{R} de l'équation (3) avec
une déformation uniforme

3.2 Déformation non uniforme

Nous prendrons l'origine de \vec{r} dans le voisinage de la zone qui nous intéresse, en reliant u , v et w aux déformations locales. On développe \vec{R} en série de Taylor avec $\vec{R}(\mathbf{0}) = \vec{0}$, en utilisant les équations (2) et (3):

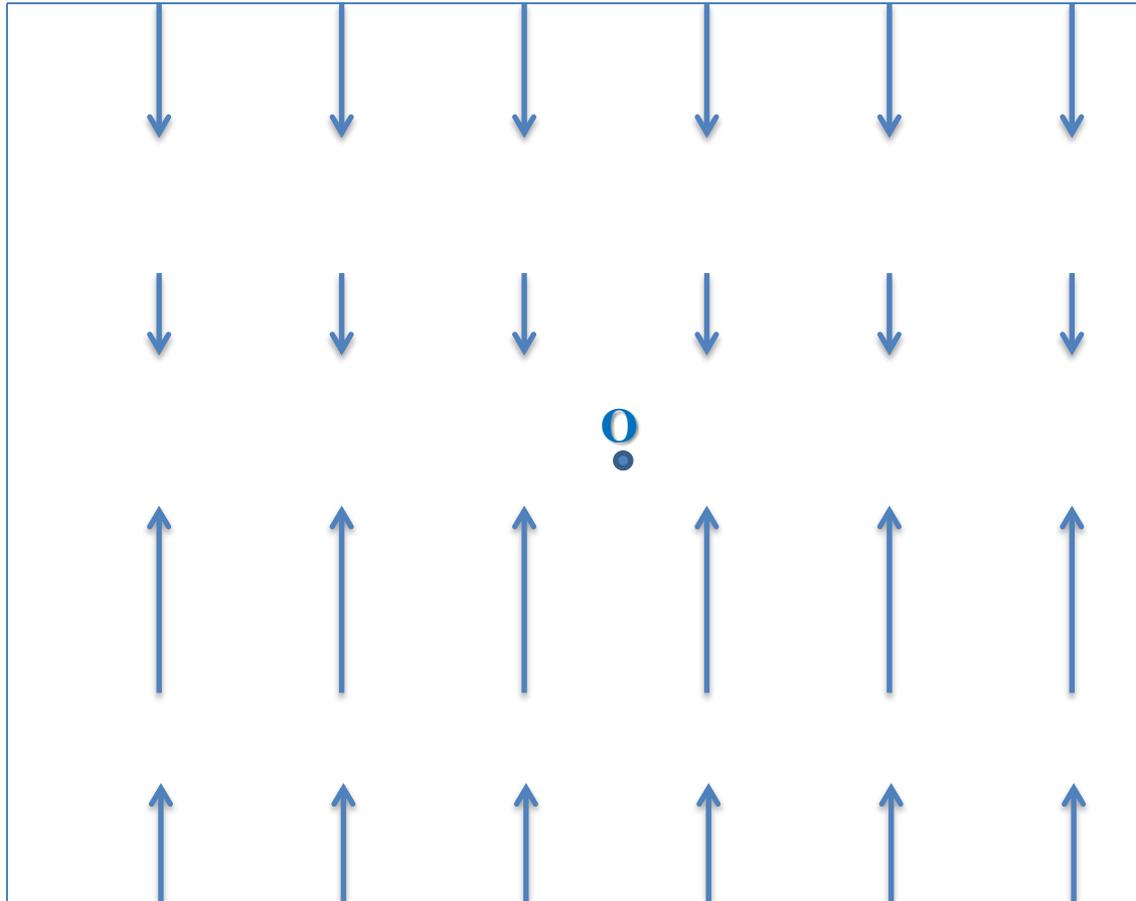
$$\begin{aligned}x\varepsilon_{xx} &\approx x \frac{\partial u}{\partial x}, & y\varepsilon_{yx} &\approx y \frac{\partial u}{\partial y}, & z\varepsilon_{zx} &\approx z \frac{\partial u}{\partial z} \\x\varepsilon_{xy} &\approx x \frac{\partial v}{\partial x}, & y\varepsilon_{yy} &\approx y \frac{\partial v}{\partial y}, & z\varepsilon_{zy} &\approx z \frac{\partial v}{\partial z} \\x\varepsilon_{xz} &\approx x \frac{\partial w}{\partial x}, & y\varepsilon_{yz} &\approx y \frac{\partial w}{\partial y}, & z\varepsilon_{zz} &\approx z \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned} \quad (4)$$

Généralement la déformation est décrite avec les coefficients $e_{\alpha\beta}$ au lieu de $\varepsilon_{\alpha\beta}$. Les composantes de la déformation sont données par:

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, e_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (5)$$

Les composantes e_{xy} , e_{yz} , e_{zx} sont définies comme étant les variations des angles entre les axes, ils sont sans dimension et ils définissent complètement la déformation.

$$\begin{aligned} e_{xy} = x' \cdot y' &\approx \varepsilon_{yx} + \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ e_{yz} = y' \cdot z' &\approx \varepsilon_{zy} + \varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ e_{zx} = z' \cdot x' &\approx \varepsilon_{zx} + \varepsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \quad (6)$$



Vecteurs de déplacement \vec{R} de l'équation (3) avec une déformation non uniforme

3.3 Remarque

On peut exprimer les composantes de la déformation sous la forme du tenseur d'ordre 2 suivant (7):

$$e = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Les éléments diagonaux définissent les déformations d'élongation.

3.4 Dilatation

L'augmentation relative du volume associée à la déformation est appelée dilatation. La dilatation est négative dans le cas d'une pression hydrostatique.

$$V = \vec{X} \cdot (\vec{Y} \wedge \vec{Z})$$
$$V' = \vec{x}' \cdot (\vec{y}' \wedge \vec{z}')$$

Si on néglige les termes du deuxième ordre, la **dilatation δ** est donnée par:

$$\delta = \frac{V' - V}{V} \approx e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} \quad (8)$$

Ainsi la somme des 3 éléments diagonaux du tenseur déformation correspond alors à la **dilatation δ** :

$$\delta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (9)$$

Les éléments en dehors de la diagonale définissent les déformations qui ne sont pas dans l'axe de l'élongation, ce sont les déformations de cisaillement. Dans ce qui suit nous allons faire une analyse des déformations, dans le cas de petits déplacements des particules d'un solide après l'action d'une contrainte afin de déterminer les composantes de la déformation $e_{xx}, e_{yy}, e_{zz}, e_{xy}, e_{yz}, e_{zx}$, en fonction des composantes de la contrainte réduits $X_x, Y_y, Z_z, Y_z, Z_x, X_y$.

4. Loi de Hooke et constantes d'élasticité

L'approximation de Hooke (valable quand on est très en deçà de la limite d'élasticité) admet que les déformations sont fonctions linéaires des contraintes ce qui à trois dimensions conduit aux relations linéaires suivantes (10):

$$\begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \\ e_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ S_{51} & S_{52} & S_{53} & S_{54} & S_{55} & S_{56} \\ S_{61} & S_{62} & S_{63} & S_{64} & S_{65} & S_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_x \\ Y_y \\ Z_z \\ Y_z \\ Z_x \\ X_y \end{pmatrix}$$

Inversement les composantes de la contrainte sont des fonctions linéaires des composantes de la déformation.

$$\begin{pmatrix} X_x \\ Y_y \\ Z_z \\ Y_z \\ Z_x \\ X_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \\ e_{xy} \end{pmatrix} \quad (11)$$

Les quantités S_{11}, S_{12}, \dots sont appelées **constantes d'élasticité**, et ils ont la dimension d'une $\frac{[Surface]}{[Force]}$ ou d'un $\frac{[Volume]}{[Energie]}$.

Les quantités C_{11}, C_{12}, \dots sont appelées **modules d'élasticité**, et ils ont la dimension d'une $\frac{[Force]}{[Surface]}$ ou d'une $\frac{[Energie]}{[Volume]}$.

Dans l'approximation de Hooke on définit la densité d'énergie élastique U qui découle de la définition de l'énergie potentielle comme étant une fonction quadratique des déformations. Sachant que les contraintes sont linéairement proportionnelles aux déformations, cette proportionnalité permet d'écrire:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \sigma_i e_j \quad (12)$$

Où les indices de 1 à 6 sont définis par :

$$1 \equiv xx ; 2 \equiv yy ; 3 \equiv zz ; 4 \equiv yz ; 5 \equiv zx ; 6 \equiv xy$$

Et σ_i désignent les composantes de la contrainte soit:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= X_x, \sigma_2 = Y_y, \sigma_3 = Z_z, \\ \sigma_4 &= Y_z, \sigma_5 = Z_x, \sigma_6 = X_y \end{aligned}$$

La loi de Hooke permet d'exprimer la densité de l'énergie en fonction des déformations seules ou des constantes seules, on trouve que :

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \sigma_i e_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \tilde{C}_{ij} \sigma_i \sigma_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 \tilde{C}_{ij} e_i e_j$$

Les \tilde{C} sont reliés aux modules d'élasticité C par les relations $C_{ij} = \frac{1}{2} (\tilde{C}_{ij} + \tilde{C}_{ji})$. On en déduit que les modules d'élasticité C sont symétriques:

$$C_{ij} = C_{ji}$$

La définition de la densité d'énergie permet de trouver les composantes de la contrainte par de simples dérivées partielles par rapport aux composantes des déformations correspondantes.

$$\begin{aligned}
X_x &= \frac{\partial U}{\partial e_{xx}} \equiv \frac{\partial U}{\partial e_1} = \tilde{c}_{11}e_1 + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^6 (\tilde{c}_{1j} + \tilde{c}_{j1})e_j \\
Y_y &= \frac{\partial U}{\partial e_{yy}} \equiv \frac{\partial U}{\partial e_2} = \tilde{c}_{22}e_2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 2}}^6 (\tilde{c}_{2j} + \tilde{c}_{j2})e_j \\
Z_z &= \frac{\partial U}{\partial e_{zz}} = \frac{\partial U}{\partial e_3} = \tilde{c}_{33}e_3 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 3}}^6 (\tilde{c}_{3j} + \tilde{c}_{j3})e_j \\
Y_z &= \frac{\partial U}{\partial e_{yz}} = \frac{\partial U}{\partial e_4} = \tilde{c}_{44}e_4 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 4}}^6 (\tilde{c}_{4j} + \tilde{c}_{j4})e_j \\
Z_x &= \frac{\partial U}{\partial e_{zx}} = \frac{\partial U}{\partial e_5} = \tilde{c}_{55}e_5 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq 5}}^6 (\tilde{c}_{5j} + \tilde{c}_{j5})e_j \\
X_y &= \frac{\partial U}{\partial e_{xy}} = \frac{\partial U}{\partial e_6} = \tilde{c}_{66}e_6 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^5 (\tilde{c}_{6j} + \tilde{c}_{j6})e_j
\end{aligned} \tag{13}$$

- Les 36 modules d'élasticité sont réduits à 21 coefficients indépendants dans un cristal triclinique.
- Dans le cas d'un cristal cubique, d'autres éléments de symétrie s'ajoutent, donc le nombre des modules d'élasticité indépendants peut encore être réduit et devient égal à 3 si le cristal cubique est isotrope.
- Pour un cristal cubique l'expression de la densité d'énergie élastique peut s'écrire sous la forme:

$$\begin{aligned}
 U = & \frac{1}{2} C_{11} (e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + e_{zz}^2) \\
 & + \frac{1}{2} C_{44} (e_{yz}^2 + e_{zx}^2 + e_{xy}^2) \\
 & + C_{12} (e_{yy}e_{zz} + e_{zz}e_{xx} + e_{xx}e_{yy})
 \end{aligned} \tag{14}$$

Ceci permet d'aboutir aux relations linéaires simplifiées des modules et des constantes d'élasticité:

$$\begin{pmatrix} X_x \\ Y_y \\ Z_z \\ Y_z \\ Z_x \\ X_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \\ e_{xy} \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \\ e_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_x \\ Y_y \\ Z_z \\ Y_z \\ Z_x \\ X_y \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$C_{44} = \frac{1}{S_{44}} ; C_{11} - C_{12} = \frac{1}{S_{11} - S_{12}} ; \quad (17)$$

$$C_{11} + 2C_{12} = \frac{1}{S_{11} + 2S_{12}} ; C_{44} = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})$$

Il ne reste plus que deux composantes indépendantes.

$$\begin{cases} \lambda = C_{12} \\ \mu = C_{44} \end{cases} \rightarrow C_{11} = 2\mu + \gamma \quad (18)$$

λ est le module de cisaillement et μ le module d'incompressibilité. Dans les corps isotropes, il est souvent préférable d'utiliser des coefficients qui ont une signification physique plus directe tels que le module de Young E et le coefficient de Poisson ν ou les coefficients de Lamé λ et μ , sans oublier le module compressibilité B.

$$\begin{pmatrix} X_x \\ Y_y \\ Z_z \\ Y_z \\ Z_x \\ X_y \end{pmatrix}$$

(19)

$$= \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu) & \gamma & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & (\gamma + 2\mu) & \gamma & 0 & 0 & 0 \\ \gamma & \gamma & (\gamma + 2\mu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \\ e_{xy} \end{pmatrix}$$

Toutes les propriétés élastiques se résument donc dans les deux coefficients λ et μ .

Si nous avons accès aux composantes de la contrainte, nous pouvons en déduire les valeurs des constantes élastiques. Par exemple, si nous imposons un allongement selon x (seul e_{xx} est non nul), nous avons donc :

$$\begin{cases} X_x = C_{11} \cdot e_{xx} \\ Y_y = C_{12} \cdot e_{xx} \\ Z_z = C_{12} \cdot e_{xx} \\ Y_z = 0 \\ Z_x = 0 \\ X_y = 0 \end{cases} \quad (20)$$

De même, on impose une distorsion telle que e_{xy} est non nul, on obtient :

$$\begin{cases} X_x = 0 \\ Y_y = 0 \\ Z_z = 0 \\ Y_z = 0 \\ Z_x = 0 \\ X_y = C_{44} \cdot e_{xy} \end{cases} \quad (21)$$

Pour une dilatation uniforme δ :

$$e_{xx} = e_{yy} = e_{zz} = \frac{1}{3} \delta \quad (22)$$

δ désigne la dilatation.

Dans ce cas l'expression de la densité d'énergie d'un cristal cubique devient :

$$U = \frac{1}{6} (C_{11} + 2C_{12}) \delta^2 \quad (23)$$

Le module de compression B permet d'exprimer la relation de proportionnalité entre la densité d'énergie et les composantes de la déformation. Par définition:

$$U = \frac{1}{2} B \delta^2 = \frac{1}{6} (C_{11} + 2C_{12}) \delta^2 \quad (24)$$

L'expression du module de compression B est donc:

$$B = \frac{1}{3} (C_{11} + 2C_{12}) \quad (25)$$

La compressibilité K est l'inverse du module de compression *B*, soit :

$$K = \frac{1}{B} = \left[\frac{1}{3} (C_{11} + 2C_{12}) \right]^{-1} \quad (26)$$

5. Propagation des ondes élastiques dans les cristaux cubiques

5.1 Introduction

● Une **onde** est un champ scalaire ou vectoriel, défini dans un domaine de l'espace, dont les dépendances spatiales et temporelles sont couplées par des équations aux dérivées partielles, appelées **équations d'onde**. L'onde est alors caractérisée au point M et à l'instant t par la valeur du champ de scalaire (ou de vecteurs):

$$\psi(M, t) = \psi(x, y, z, t) \quad (27)$$

appelée fonction d'onde. Par définition une onde est plane si la fonction d'onde $\psi(M, t)$ (scalaire ou vectorielle) ne dépend que d'une coordonnée cartésienne d'espace.

- Une onde plane progressive est une onde plane qui se propage dans une direction et un sens bien déterminé.
- Une onde plane progressive **monochromatique** (ou **harmonique**) se propageant dans une direction parallèle à l'axe (Ox) dans le sens des x croissants a pour équation d'onde:

$$\psi(x, t) = \psi_0(x) \exp i(\omega t - kx) \quad (28)$$

Elle est caractérisée par sa pulsation ω et son vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{e}_x$, et possède une période temporelle T , une fréquence ν et une période spatiale λ définies par:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu} \quad (29)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (30)$$

- La vitesse de propagation d'une onde plane progressive monochromatique (harmonique) est égale à la vitesse de propagation de sa phase, ou vitesse de phase:

$$v_{\varphi} = \frac{\omega}{k} \quad (31)$$

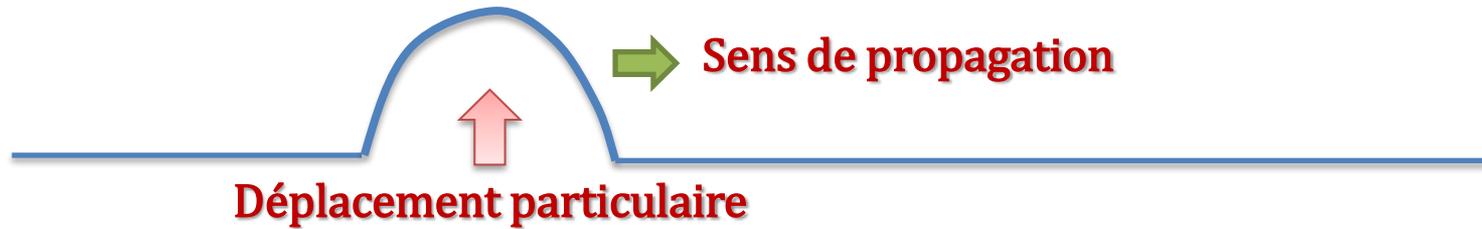
- L'équation de propagation impose une relation, qui lie k et ω appelée relation de dispersion.
- L'onde plane monochromatique est un outil d'analyse de phénomène de propagation. Elle ne saurait décrire à elle seule un phénomène physique observable.
- On appelle paquet d'ondes localisé dans le temps et dans l'espace une superposition d'ondes planes progressives monochromatiques à **répartition continue de fréquence**.

Un paquet d'ondes de faible largeur spectrale autour d'une valeur moyenne ω_m se propage dans un milieu où la dispersion n'est pas très importante, à la vitesse de groupe v_g égale à:

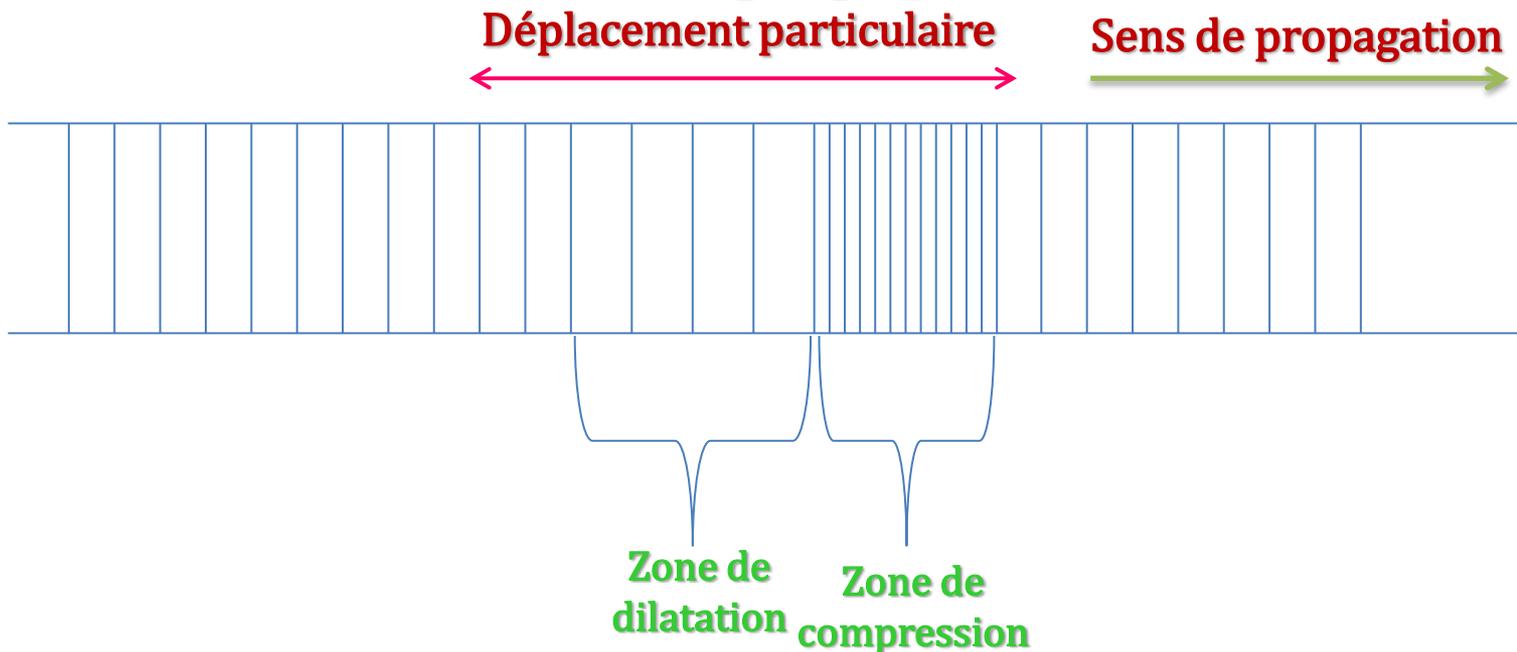
$$v_g = \left(\frac{d\omega}{dk} \right)_{\omega_m} \quad (32)$$

• Notons que d'un point de **vue qualitatif**, une onde est définie comme une grandeur physique continue qui varie dans le temps et dans l'espace, de façon non aléatoire sans transport de matière mais avec transport d'énergie (corde vibrante, onde sonore, onde électromagnétique etc.).

- Une onde mécanique progressive est dite «**transversale**» si le déplacement des points du milieu atteints par la propagation est perpendiculaire à la direction de la propagation.



- Une onde mécanique progressive est dite «**longitudinale**» si le déplacement des points du milieu atteints par la propagation est parallèle à la direction de la propagation.



5.2 Equation de propagation

Dans un solide la propagation d'une onde génère une contrainte dynamique qui déforme localement le solide, la grandeur principale caractérisant la propagation est la célérité, c'est-à-dire la vitesse de propagation de l'onde dans le solide considéré. Le solide est considéré comme un milieu continu. Considérons un élément de volume du cristal:

$$V = \Delta x \Delta y \Delta z \quad (33)$$

En appliquant le principe fondamental de la dynamique on obtient les équations de propagation de l'onde dans le solide.

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{44} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\
&\quad + (C_{12} + C_{44}) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) \\
\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= C_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_{44} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\
&\quad + (C_{12} + C_{44}) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) \\
\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= C_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + C_{44} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
&\quad + (C_{12} + C_{44}) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} \right)
\end{aligned} \tag{34}$$

ρ : masse volumique du cristal, u , v et w les déplacements suivant les directions X , Y et Z respectivement et les C_{ij} les modules d'élasticités.

5.3 Propagation dans la direction [100]

Dans ce cas on considère une onde se propageant suivant l'axe des x , et générant des vibrations uniquement suivant les directions x et y . On aura donc deux solutions, une suivant x donnée par une onde longitudinale, et une deuxième solution suivant l'axe y donnée par une onde transversale.

● Pour une onde longitudinale on aura un déplacement u d'une particule suivant la direction des x , la solution de l'équation s'écrit sous forme :

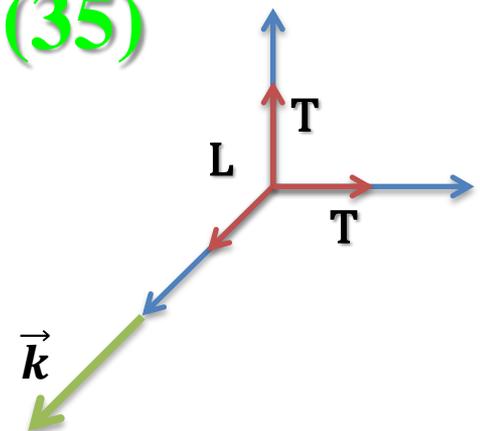
$$u = u_0 \exp[i(kx - \omega t)] \quad (35)$$

u_0 : amplitude de l'onde ;

k : le vecteur d'onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$;

ω : pulsation angulaire $\omega = 2\pi\nu$;

ν : fréquence de l'onde.



On substitue cette expression dans l'équation de propagation, on obtient alors:

$$\omega^2 \rho = C_{11} k^2 \quad (36)$$

Par conséquent la vitesse de propagation d'une onde longitudinale dans la direction [100] est :

$$v_L = \frac{\omega}{k}$$
$$v_L [100] = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}} \quad (37)$$

• Pour une onde transversale on aura un déplacement v d'une particule suivant la direction des y , la solution de l'équation s'écrit sous forme :

$$v = v_0 \exp[i(kx - \omega t)]$$

Par substitution dans l'équation de propagation:

$$\omega^2 \rho = C_{44} k^2 \quad (38)$$

La vitesse de propagation v_T d'une onde transversale dans la direction [100] est :

$$v_T [100] = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} \quad (39)$$

On obtient une vitesse identique si les particules oscillent dans la direction z. Donc pour \vec{k} parallèle à [100], les 2 ondes de cisaillement indépendantes ont des vitesses de propagation égales ceci n'est pas vrai si \vec{k} parallèle à une direction quelconque du cristal.

5.5 Propagation dans la direction [110]

• Dans le cas d'une onde longitudinale, se propageant dans le long de l'axe [110] l'expression de la vitesse est donnée par:

$$v_L[110] = \sqrt{\frac{C_{11} + C_{12} + 2C_{44}}{2\rho}} \quad (40)$$

• Dans le cas d'une onde transversale, se propageant dans le plan (x, y) , générant des vibrations qui introduisent un déplacement particulière w parallèle à z . On aura donc la solution particulière:

$$w = w_0 \exp[i(k_x x + k_y y - \omega t)]$$

On remplace dans l'équation de propagation, on obtient alors:

$$\omega^2 \rho = C_{44}(k_x^2 + k_y^2) = C_{44}k^2 \quad (41)$$

Ce résultat est indépendant de la direction de propagation dans le plan.

Considérons d'autres ondes qui se propagent dans le plan (x, y) , cette fois les particules vibrent dans le plan (x, y) :

$$u = u_0 \exp i(k_x x + k_y y - \omega t)$$

$$v = v_0 \exp [i(k_x x + k_y y - \omega t)]$$

Les équations de propagation s'écrivent:

$$\begin{aligned}
\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= C_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C_{44} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\
&\quad + (C_{12} + C_{44}) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) \\
\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= C_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + C_{44} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \\
&\quad + (C_{12} + C_{44}) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right)
\end{aligned} \tag{42}$$

En substituant les expressions de u et v dans les deux équations de propagation on obtient un système de deux équations à deux inconnues u et v (43):

$$\begin{aligned}
\omega^2 \rho u &= (C_{11} k_x^2 + C_{44} k_y^2) u + (C_{12} + C_{44}) k_x k_y v \\
\omega^2 \rho v &= (C_{11} k_y^2 + C_{44} k_x^2) v + (C_{12} + C_{44}) k_x k_y u
\end{aligned}$$

Pour une onde de direction [110] les équations précédentes ont une solution particulièrement simple pour laquelle:

$$k_x = k_y = \frac{k}{\sqrt{2}} \quad (44)$$

$$\begin{cases} -\omega^2 \rho u + (C_{11} + C_{44})k^2 \frac{u}{2} + (C_{12} + C_{44})k^2 \frac{v}{2} = 0 \\ -\omega^2 \rho v + (C_{11} + C_{44})k^2 \frac{v}{2} + (C_{12} + C_{44})k^2 \frac{u}{2} = 0 \end{cases}$$

C'est un système d'équations homogènes d'inconnues u et v .

Ce système n'a de solution non nulles que si le déterminant est nul.

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 \rho + \frac{1}{2}(C_{11} + C_{44})k^2 & \frac{1}{2}(C_{12} + C_{44})k^2 \\ \frac{1}{2}(C_{12} + C_{44})k^2 & -\omega^2 \rho + \frac{1}{2}(C_{11} + C_{44})k^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (45)$$

On obtient une équation dont les solutions sont:

$$\omega^2 \rho = \frac{1}{2}(C_{11} + C_{12} + 2C_{44})k^2 \quad (46)$$

$$\omega^2 \rho = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})k^2 \quad (47)$$

La première racine décrit une onde longitudinale, la deuxième une onde transversale.

□ La première racine permet de retrouver la vitesse de propagation des ondes longitudinales donnée par (40).

$$v_L[110] = \sqrt{\frac{C_{11} + C_{12} + 2C_{44}}{2\rho}} \quad (48)$$

La première racine substituée dans l'équation de propagation donne:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(C_{11} + C_{12} + 2C_{44})k^2 u \\ &= \frac{1}{2}(C_{11} + C_{44})k^2 u + \frac{1}{2}(C_{12} + C_{44})k^2 v \end{aligned} \quad (49)$$

Donc les composantes du déplacement satisfont $u = v$. Par conséquent le déplacement particulière est parallèle à $[110]$ et parallèle aussi au vecteur \vec{k} .

□ La seconde racine substituée dans l'équation de propagation donne la relation ci-dessous:

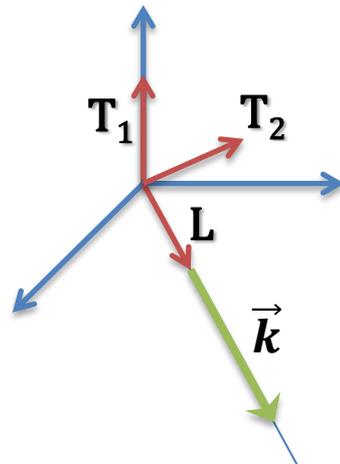
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12})k^2 u & \quad (50) \\ & = \frac{1}{2}(C_{11} + C_{44})k^2 u + \frac{1}{2}(C_{12} + C_{44})k^2 v \end{aligned}$$

D'où $u = -v$. Le déplacement particulaire est parallèle à $[1\bar{1}0]$ et perpendiculaire au vecteur \vec{k} . Les vitesses de propagation des ondes transversales sont déduites des relations (41) et (47) par:

$$v_{T_1}[110] = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} \quad (51)$$

$$v_{T_2}[\mathbf{110}] = \sqrt{\frac{C_{11} - C_{12}}{2\rho}} \quad (52)$$

Les ondes qui se propagent dans une direction parallèle à une diagonale de face d'un cristal sont d'un intérêt particulier, car les trois constantes élastiques peuvent s'obtenir simplement à partir de trois vitesses de propagation dans cette direction.



5.6 Onde dans la direction [111]

Pour une onde de direction [111] on obtient des solutions particulièrement simple pour lesquels les composantes du déplacement satisfont la relation $u = v = w$. Les composantes du vecteur d'onde vérifient:

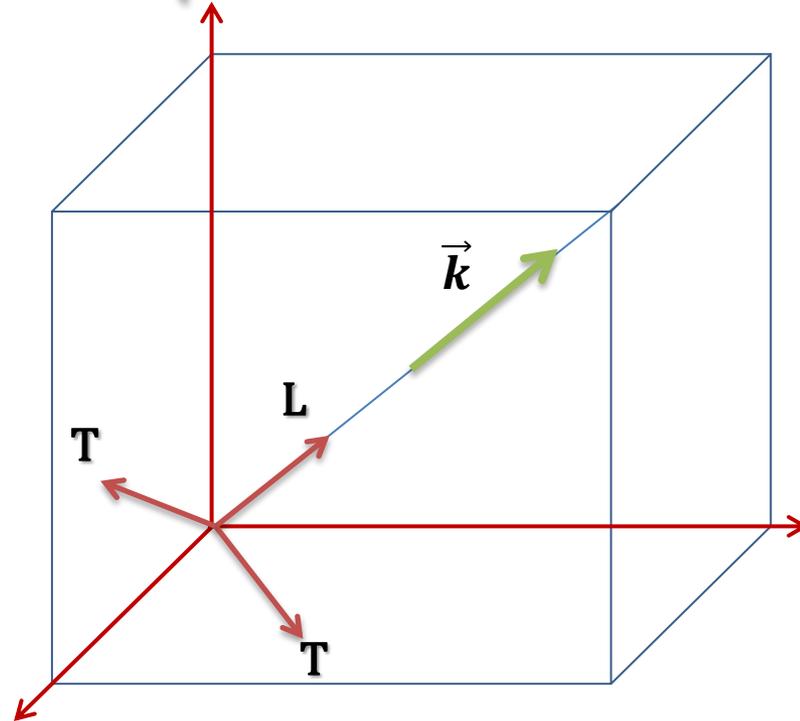
$$k_x = k_y = k_z = \frac{k}{\sqrt{3}} \quad (53)$$

La vitesse de propagation des ondes longitudinales le long de l'axe [111] est donnée par:

$$v_L = \sqrt{\frac{C_{11} + 2C_{12} + 4C_{44}}{3\rho}} \quad (54)$$

La vitesse de propagation des ondes transversales est donnée par:

$$v_T = \sqrt{\frac{C_{11} - C_{12} + C_{44}}{3\rho}} \quad (55)$$



5.7 Remarques

- Dans le cas d'un cristal isotrope, les modules d'élasticité sont liés par la relation:

$$C_{11} - C_{12} = 2C_{44} \quad (56)$$

Les vitesses s'écrivent alors:

$$v_L[100] = v_L[110] = v_L[111] = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}} \quad (57)$$

$$v_T[100] = v_T[110] = v_T[111] = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} \quad (58)$$

- Pour les directions de propagation $[100]$ et $[111]$ les deux modes transversaux sont dégénérés ce qui n'est pas le cas pour la direction $[110]$.

● Il existe **trois modes normaux** de propagation d'onde dans un cristal pour une amplitude et une direction données du vecteur d'onde \vec{k} . En général, les polarisations (déplacements particulières) ne sont pas exactement parallèles ou perpendiculaire à \vec{k} . Ce qui n'est pas le cas pour les directions particulières [100], [110] et [111] d'un cristal cubique, où pour un \vec{k} donné suivant une de ces directions deux des trois modes sont tels que le mouvement des particules est transverse à \vec{k} et le troisième mode est parfaitement longitudinal (parallèle à \vec{k}).

6. Déterminations expérimentales des constantes d'élasticité

Il existe plusieurs méthodes pour la mesure du module de Young E :

- ① **Mesure de traction dans le domaine élastique: c'est une technique facile à mettre en œuvre.**
- ② **Mesure de la première fréquence propre de vibration d'une tige d'un matériau, maintenue à ses extrémités.**
- ③ **Mesure la vitesse du son dans le matériau en vibrations longitudinales et transversales.**

6.1 Méthode de traction

- La contrainte σ est donnée par:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (59)$$

F : force appliquée, A : aire de la section du fil.

- La déformation ε est donnée par:

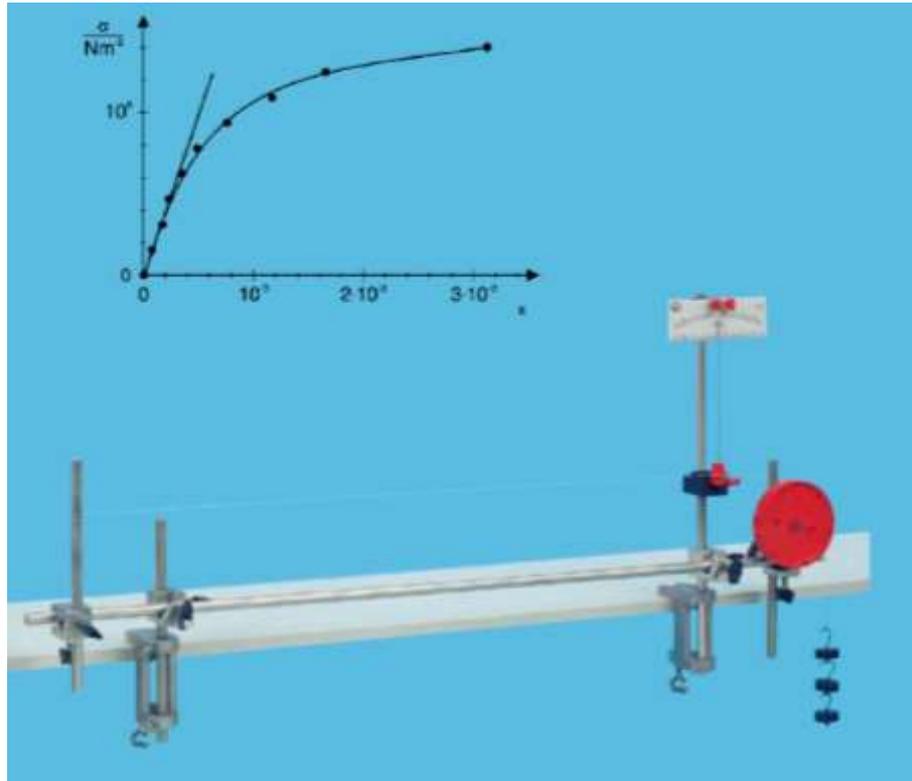
$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad (60)$$

L : longueur du fil; ΔL : variation de la longueur du fil.



- Le module d'Young est donné dans la partie linéaire par:

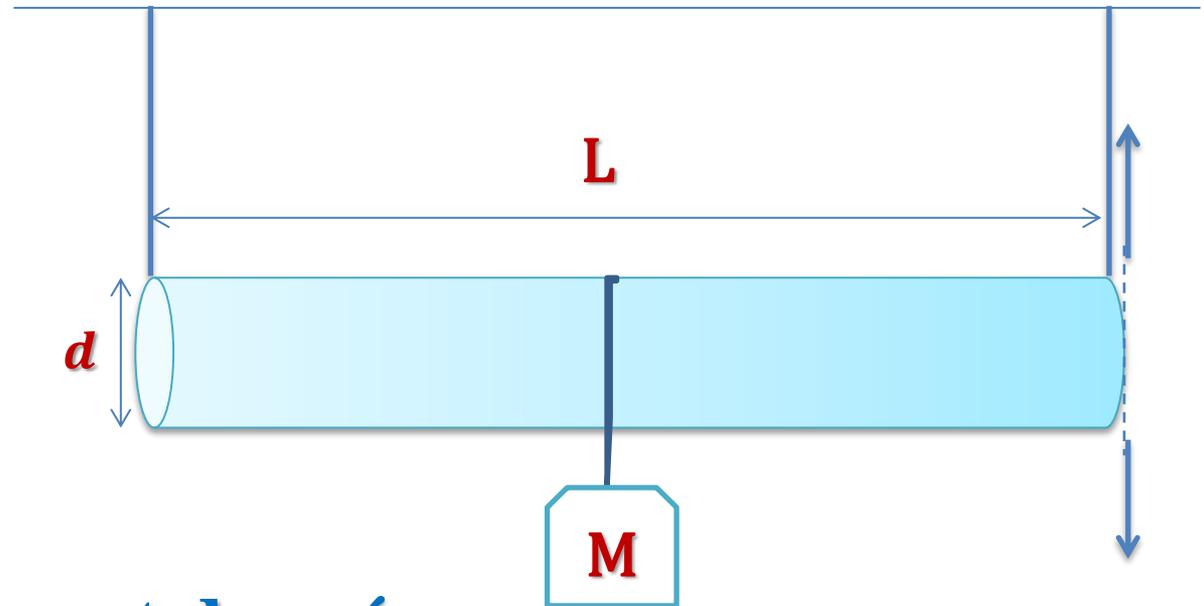
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$



Dispositif commercialisé par le groupe © Leybold-Didactic GmbH permet de mesurer le module d'Young de fils métalliques.

6.2 Méthode de vibration

On accroche une masse M à une tige de masse m ($m \ll M$), de longueur L et de diamètre d . La tige est mise en oscillation sous l'action de M . On mesure de la première fréquence propre de vibration de la tige maintenue à ses extrémités.

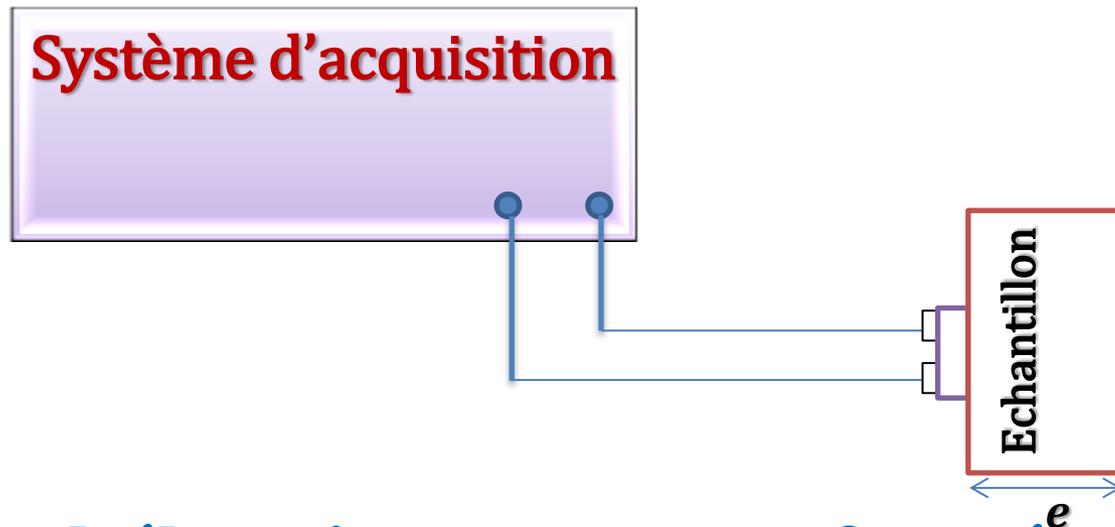


Le module de young est donné par:

$$E = \frac{16 \times \pi \times M \times L^3 \times f^2}{3 \times d^4} \quad (62)$$

6.2 Méthode de propagation des ultrasons

- Le figure ci-dessous donne un schéma synoptique d'un dispositif permettant de mesurer la vitesse de propagation des ultrasons dans les solides.



- Un signal électrique est transformé en onde de déformation par un transducteur piézoélectrique. Cette onde se propage dans l'échantillon puis se réfléchit et refait le chemin inverse.

● On mesure le temps τ entre deux échos successifs sur le système d'acquisition et on en déduit la vitesse des ondes ultrasonores. L'utilisation de transducteurs qui génèrent des ondes longitudinales ou transversales permet de remonter aux caractéristiques du matériau élastique linéaire et isotrope par les deux vitesses associées v_L et v_T .

● Les vitesses de propagation des ondes ultrasonores sont des constantes des matériaux, pour les matériaux isotropes, elles sont fonctions du module d'élasticité ou module de Young E et du coefficient de Poisson, selon les formules données ci-dessous.

$$E = \frac{v_L^2 \times \rho \times (1 + \nu) \times (1 - 2\nu)}{1 - \nu} \quad (63)$$

$$E = 2 \times v_T^2 \times \rho \times (1 + \nu) \quad (64)$$

ρ : la masse volumique du matériau;

ν : le coefficient de poisson;

v_L : vitesse de propagation de l'onde longitudinale;

v_T : vitesse de propagation de l'onde transversale.

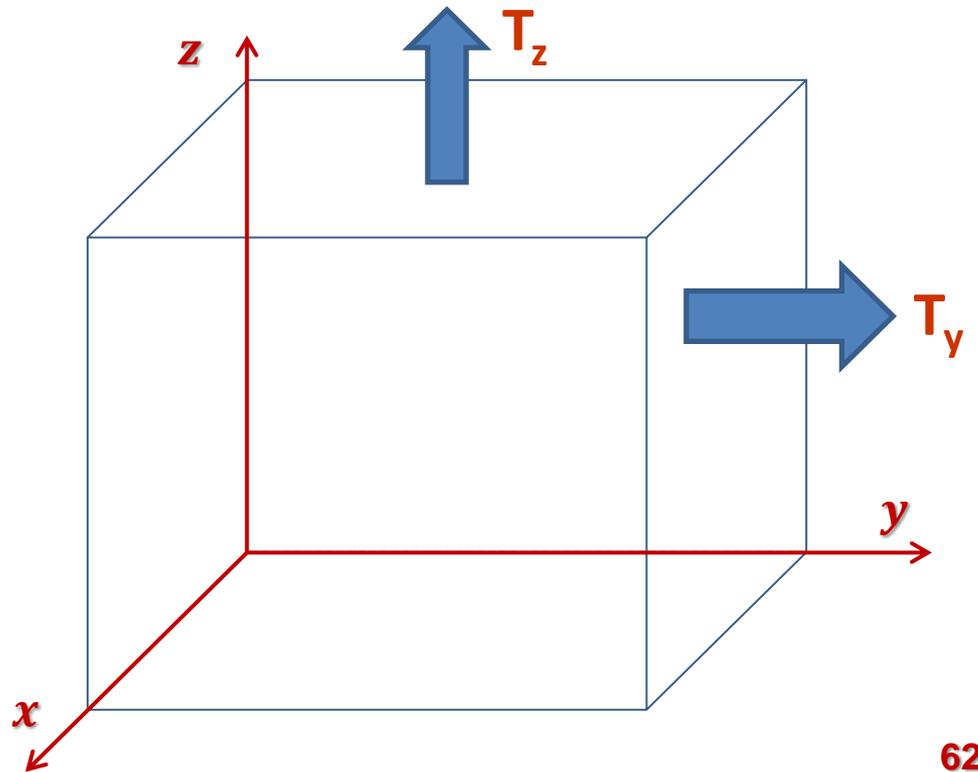
D'après l'équation de la vitesse transversale on obtient les expressions ν et E :

$$\nu = \frac{v_L^2 - 2v_T^2}{2v_L^2 - 2v_T^2} \quad (65)$$

7. Application

Anisotropie des cristaux hexagonaux

Dans un repère $(O; x, y, z)$ on considère, en forme d'un parallélépipède rectangle de dimensions a , b et c , un cristal homogène dont le réseau de Bravais est hexagonal.



On exerce une tension T_z colinéaire à z , on observe une contraction relative des dimensions latérales tels que:

$$\frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b}$$

Par contre une tension T_y parallèle y s'exerçant perpendiculairement à la face (a,c) entraîne des contractions relatives différentes:

$$\frac{\Delta a}{a} \neq \frac{\Delta c}{c}$$

On admet que le tenseur des constantes d'élasticité est symétrique, c'est à dire:

$$S_{ij} = S_{ji}$$

1. En tenant compte des symétries du problème, montrer que le tenseur des constantes d'élasticité s'écrit:

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} \end{pmatrix}$$

2. Donner les expressions des compressibilités linéaires et volumiques:

$$\beta_\ell = -\frac{1}{\ell} \left(\frac{\Delta \ell}{\Delta P} \right)_T$$

$$\beta_V = -\frac{1}{V} \left(\frac{\Delta V}{\Delta P} \right)_T$$

en fonction des S_{ij} , ΔP étant la pression hydrostatique.

3. Le zinc cristallise dans une structure hexagonale compacte. Les constantes d'élasticité du zinc sont les suivantes ($\times 10^{-12} \text{ m}^2 \cdot \text{N}^{-1}$):

$$S_{11} = 8,40 ; S_{12} = 1,10 ;$$

$$S_{13} = -7,80 ; S_{33} = 28,7$$

a. Préciser les valeurs numériques des modules de Young $E_{\parallel c}$ et $E_{\perp c}$:

$$E = \sigma / \varepsilon$$

b. Même question avec les différents coefficients de poisson $\nu_{\parallel c}$ et $\nu_{\perp c}$.

c. Donner les valeurs numériques des compressibilités linéaires et volumique.

1. l'anisotropie des propriétés élastiques dans le plan xOy se traduit par le fait que les axes Ox et Oy jouent le même rôle donc:

$$S_{11} = S_{22}$$

$$S_{13} = S_{23}$$

Le tenseur est complètement déterminé par les constantes élastiques S_{11} , S_{12} , S_{13} et S_{33} .

$$\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} \\ S_{13} & S_{13} & S_{33} \end{pmatrix}$$

2. Quand on soumet le cristal à une pression hydrostatique ΔP la variation relative des longueurs

est donnée par:

$$\frac{\Delta a}{a} = -(S_{11} + S_{12} + S_{13}) \times \Delta P$$

On en déduit:

$$\beta_{\perp c} = -\frac{1}{a} \frac{\Delta a}{\Delta P} = -\frac{1}{a} \frac{\Delta b}{\Delta P} = S_{11} + S_{12} + S_{13}$$

$$\beta_{\parallel c} = -\frac{1}{a} \frac{\Delta c}{\Delta P} = -\frac{1}{a} \frac{\Delta b}{\Delta P} = S_{33} + 2S_{13}$$

La compressibilité en volume est telle que:

$$\frac{\Delta V}{V} = 2 \frac{\Delta a}{a} + \frac{\Delta c}{c}$$

$$\beta_V = 2\beta_{\perp c} + \beta_{\parallel c} = 2S_{11} + 2S_{12} + 3S_{13} + S_{33}$$

3. Les paramètres demandés pour le zinc.

a. Les modules de Young:

$$E_{\parallel c} = \frac{1}{S_{33}} = 3,5 \times 10^{10} \text{ Pa}$$

$$E_{\perp c} = \frac{1}{S_{33}} = 1,2 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

b. Les coefficients de Poisson:

$$\nu_{\parallel c} = -\frac{\frac{\Delta a}{a}}{\frac{\Delta c}{c}} = \frac{1}{\nu_{\perp c}} = -\frac{S_{13}}{S_{33}} = 0,27$$

$$\nu_{\perp c}(b) = -\frac{\frac{\Delta b}{b}}{\frac{\Delta a}{a}} = -\frac{S_{12}}{S_{11}} = -0,13$$

c. Les compressibilités:

$$\beta_{\perp c} = S_{11} + S_{12} + S_{13} = 1,75 \times 10^{-12} \text{ m}^2 \cdot \text{N}^{-1}$$

$$\beta_{\parallel c} = S_{33} + 2S_{13} = 13,1 \times 10^{-12} \text{ m}^2 \cdot \text{N}^{-1}$$

$$\beta_V = 2\beta_{\perp c} + \beta_{\parallel c} = 16,5 \times 10^{-12} \text{ m}^2 \cdot \text{N}^{-1}$$

Bibliographie

1. INTRODUCTION A LA PHYSIQUE DE L'ETAT SOLIDE

Charles Kittel - Dunod-Université (3^{ème} édition)

2. INITIATION A LA PHYSIQUE DU SOLIDE - EXERCICES COMMENTES

J. CAZAUX - Masson Editeur

3. CATALOGUE GENERAL D'EXPERIENCES DE PHYSIQUE - PHYWE

4. CATALOGUE GENERAL D'EXPERIENCES DE PHYSIQUE - LEYBOLD-DIDACTIC