Université Mohammed V
Faculté des Sciences -Rabat
Département de Physique

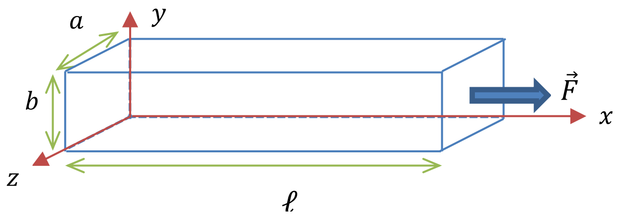
Année universitaire 2015-2016
Sciences de la Matière Physique
Semestre 5

Module 30 - Physique des Matériaux I
Série 6 : Constantes d'élasticité et ondes élastiques
Correction du devoir 6

Exercice 3 : Traction et compression dans un milieu isotrope (Devoir 6)
On rappelle les formules générales relatives liant les contraintes et les déformations :

$$\begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_x \\ Y_y \\ Z_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} X_x \\ Y_y \\ Z_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \end{pmatrix}$$



1. Les expressions des composantes de la déformation e_{xx}, e_{yy} et e_{zz} :

$$e_{xx} = \frac{\Delta \ell}{\ell} \quad (1), e_{yy} = \frac{\Delta b}{b} \quad (2), e_{zz} = \frac{\Delta a}{a} \quad (3)$$

En tenant compte de l'isotropie :

$$e_{yy} = e_{zz} = \frac{\Delta b}{b} = \frac{\Delta a}{a}$$

Cette propriété entraîne l'égalité des constantes d'élasticité :

$$S_{12} = S_{21} = S_{13} = S_{31} = S_{23} = S_{32}$$
$$S_{22} = S_{33} = S_{11}$$

De même pour les modules d'élasticité :

$$C_{12} = C_{21} = C_{13} = C_{31} = C_{23} = C_{32}$$
$$C_{22} = C_{33} = C_{11}$$

2. Les relations liant les contraintes et les déformations :

$$e_{xx} = S_{11}\frac{F}{S} \quad (4)$$

$$e_{yy} = S_{12}\frac{F}{S} \quad (5)$$

$$e_{zz} = S_{12}\frac{F}{S} \quad (6)$$

Remarque : on peut écrire les relations en fonction des modules d'élasticité.

$$\frac{F}{S} = C_{11}e_{xx} + 2C_{12}e_{yy} \qquad (7)$$
$$0 = C_{12}e_{xx} + (C_{11} + C_{12})e_{yy} \quad (8)$$

3. Le module de Young E et le coefficient de Poisson ϑ se déduisent :

$$E = \frac{F}{S} \times \frac{\ell}{\Delta \ell} = \frac{1}{S_{11}} \qquad (9)$$

$$\vartheta = \frac{\Delta a / a}{\Delta \ell / \ell} = -S_{12}E = -\frac{S_{12}}{S_{11}} \quad (10)$$

En fonction des modules d'élasticité :

$$E = C_{11} - 2C_{12}\vartheta \qquad (11)$$
$$0 = C_{12} - \vartheta(C_{11} + C_{12}) \qquad (12)$$

4. A partir de la relation (12) :

$$\sigma = \frac{C_{12}}{C_{11} + C_{12}}$$

En remplaçant le coefficient de Poisson on déduit le module de Young :

$$E = \frac{(C_{11} - C_{12}) \times (C_{11} + 2C_{12})}{C_{11} + C_{12}}$$

5. On rappelle :

$$\frac{\Delta V}{V} = e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = e_{xx} + 2e_{yy} = \frac{\Delta \ell}{\ell} + 2\frac{\Delta b}{b}$$

$$\frac{F}{S} = \lambda\left(\frac{\Delta \ell}{\ell} + 2\frac{\Delta b}{b}\right) + 2\mu\frac{\Delta \ell}{\ell}$$

En tenant compte des relations (7) et (8), on déduit :

$$\lambda = C_{12} = -\frac{S_{12}}{(S_{11} - S_{12})(S_{11} + S_{12})} = E\frac{\vartheta}{(1+\vartheta)(1-2\vartheta)}$$

$$\mu = \frac{C_{11} - C_{12}}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{S_{11} - S_{12}} = \frac{1}{2}\frac{E}{1+\vartheta}$$

6. La barre est soumise à une pression hydrostatique qui entraîne une variation du volume, l'expression du module de compressibilité B s'écrit :

$$B = -V\frac{\Delta P}{\Delta V}$$

Le coefficient de compressibilité

$$K = -\frac{1}{V}\frac{\Delta V}{\Delta P}$$

7. Lorsque le solide est soumis à une pression hydrostatique, la variation relative du volume du solide soumis aux efforts normaux suivant les directions x, y et z est négative et multipliée par le facteur 3 :

$$\frac{\Delta V}{V} = -3\left(\frac{\Delta \ell}{\ell} + 2\frac{\Delta b}{b}\right)$$

On en déduit le coefficient de compressibilité :

$$K = 3(S_{11} + 2S_{12}) = \frac{3}{C_{11} + 2C_{12}}$$

$$K = \frac{3(1-2\vartheta)}{E} = \frac{3}{3\lambda + 2\mu}$$

$$B = \frac{1}{K} = \frac{1}{3(S_{11} + 2S_{12})} = \frac{C_{11} + 2C_{12}}{3}$$

$$B = \frac{1}{K} = \frac{3(1-2\vartheta)}{E} = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}$$

On retrouve les formules (25) et (26) du cours.

8. Pour l'aluminium, les modules d'élasticité sont : $C_{11} = 1{,}07 \times 10^{11}\ Pa$ et $C_{12} = 0{,}610 \times 10^{11}\ Pa$. On obtient :

$$\vartheta = 0{,}363$$
$$E = 62{,}7 \text{ GPa}$$
$$\lambda = 60{,}9 \text{ GPa}$$
$$\mu = 23 \text{ GPa}$$
$$K = 1{,}31 \times 10^{-11} \text{ m}^2.\text{N}^{-1}$$
$$B = 76{,}3 \text{ GPa}$$