Université Mohammed V Agdal
Faculté des Sciences Rabat
Département de Physique

Année universitaire 2014-2015
Science de la Matière Physique
Semestre 5

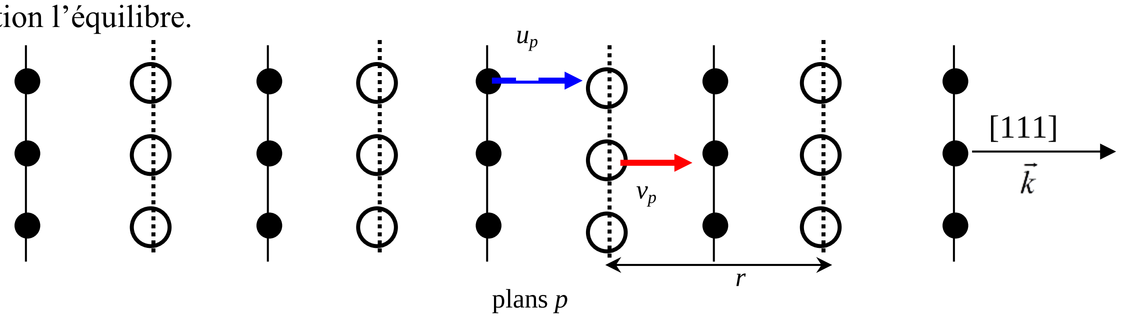
# Physique des Matériaux I
## Devoir 5 Phonons et vibrations du réseau- Correction

### Exercice 3 : Vibrations dans un cristal cubique diatomique

**1.** Les résultats obtenus pour le chlorure de potassium sont :
**a.** Réseau de Bravais C.F.C.
**b.** Le paramètre de la maille $a$ = 6,30 $10^{-10}$ m.
**c.** Chaque plan contient un seul type d'atome.
**d.** La distance séparant deux plans consécutifs contenant le même type d'atome est :

$$r = \frac{a}{\sqrt{3}} = 3{,}64\ 10^{-10}\ \text{m}$$

**2.** Si une vibration se propage dans ce cristal suivant la direction [111] tous les plans perpendiculaires à cette direction se déplacent en phase et on peut décrire le déplacement par une seule coordonnée $u_p$ d'un type de plan $p$ par rapport à la position l'équilibre et $v_p$ le déplacement de l'autre type de plan $p$ par rapport à la position l'équilibre.




On suppose que chaque plan n'interagit qu'avec ses deux plans adjacents, en appliquant la deuxième loi de newton à chacun des plans $p$ on obtient :

$$\begin{cases} m_K \dfrac{d^2 u_p}{dt^2} = C\left(v_p + v_{p-1} - 2u_p\right) \\ m_{Cl} \dfrac{d^2 v_p}{dt^2} = C\left(u_p + u_{p-1} - 2v_p\right) \end{cases}$$

**3.** On considère des solutions sous forme d'ondes planes monochromatique :

$$u_p = u_0\, exp\, i\left(\omega t - pkr\right)$$
$$v_p = v_0\, exp\, i\left(\omega t - pkr\right)$$

On calcule les dérivées secondes et on peut simplifier par le terme $exp(i\omega t).exp(ipkr)$, on obtient alors :

$$\begin{cases} -m_K\omega^2 u_0 = Cv_0\left(1+exp(-ikr)\right) - 2Cu_0 \\ -m_{Cl}\omega^2 v_0 = Cu_0\left(1+exp(ikr)\right) - 2Cv_0 \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} \left(m_K\omega^2 - 2C\right)u_0 + C\left(1+exp(-ikr)\right)v_0 = 0 \\ C\left(1+exp(ikr)\right)u_0 + \left(m_{Cl}\omega^2 - 2C\right)v_0 = 0 \end{cases}$$

C'est un système de deux équations à deux inconnues $u_0$ et $v_0$, pour qu'il admette des solutions non nulles il faut que le déterminant du système soit nul :

$$\begin{vmatrix} \left(m_K\omega^2 - 2C\right) & C\left(1+exp(-ikr)\right) \\ C\left(1+exp(ikr)\right) & \left(m_{Cl}\omega^2 - 2C\right) \end{vmatrix} = 0$$

$$m_K m_{Cl}\omega^4 - 2C\left(m_K + m_{Cl}\right)\omega^2 + 2C^2\left(1 - cos\, kr\right) = 0$$

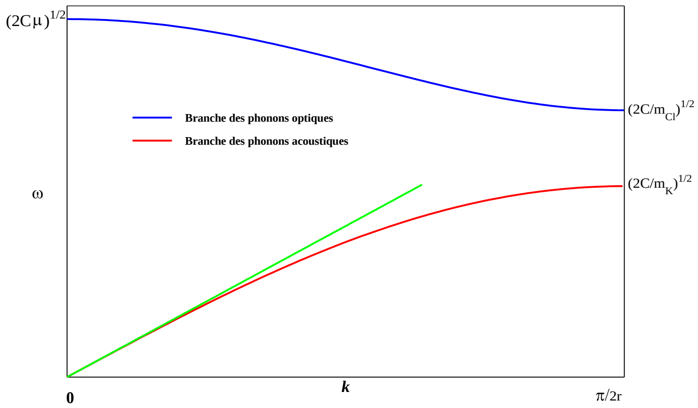
**4.** On effectue les changements de variable en fonction de $\mu$ et $M$ définies au début de la question **2.** et on remplace le cosinus par le sinus. L'équation précédente devient :

$$\mu^{-1} M\omega^4 - 2CM\omega^2 + 4C^2 sin^2\left(\frac{kr}{2}\right) = 0$$

C'est une équation bicarrée dont les solutions sont :

$$\omega_1^2 = C\mu + C\left[\mu^2 - 4M\mu^{-1}.sin^2\left(\frac{kr}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \text{ et } \omega_2^2 = C\mu - C\left[\mu^2 - 4M\mu^{-1}.sin^2\left(\frac{kr}{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

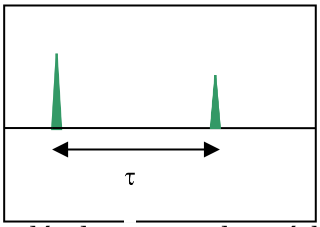
**5.** Les représentations graphiques pour ω sont données sur la figure suivante :




**6.** D'après la figure précédente on voit qu'il existe un intervalle de fréquences à la limite de la première zone de Brillouin pour lequel la vibration ne peut pas se propager. La largeur de cette bande de fréquences est :

$$\Delta\omega = \omega_u - \omega_d = \sqrt{\frac{2C}{m_{Cl}}} - \sqrt{\frac{2C}{m_K}}$$

**7.** Dans le montage une impulsion ultrasonore est engendrée par le transducteur piézoélectrique, elle se réfléchit successivement sur les faces elle est ensuite détectée.




Connaissant l'épaisseur *e* du cristal et le décalage entre deux échos successifs on obtient :

$$v_s = \frac{2e}{\tau} = \frac{2\times 1{,}00\ 10^{-2}}{2{,}40\ 10^{-6}} = 8{,}33\ 10^3 \text{ m.s}^{-1}$$

Remarque : Pour la distance parcourue par l'impulsion ultrasonore il faut compter l'aller et le retour !

Pour déterminer Δω, il faut déterminer la constante de rappel *C*. La vitesse du son le long de la rangée [111] est égale au coefficient directeur de la tangente à l'origine (courbe en vert). On obtient :

$$v_s = r\sqrt{\frac{2C}{M}} \ , \ C = \frac{v_s^2 M}{2r^2}$$

On effectue une analyse dimensionnelle de C, on a alors :

$$[C] = M.T^{-2}$$

Donc *C* s'exprime en $kg.s^{-2}$ homogène au $N.m^{-1}$.

$$C = \frac{\left(8{,}33\ 10^3\right)^2 \times 74{,}6\ 10^{-3}}{2\times 6{,}02\ 10^{23}\times\left(3{,}64\ 10^{-10}\right)^2} = 32{,}5 \text{ N.m}^{-1}$$

On peut ainsi calculer :

$$\omega_u = \sqrt{\frac{2C}{m_{Cl}}} = \sqrt{\frac{2\times 32{,}5\times 6{,}02\ 10^{23}}{35{,}5\ 10^{-3}}} = 3{,}32\ 10^{13} \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\omega_d = \sqrt{\frac{2C}{m_K}} = \sqrt{\frac{2\times 32{,}5\times 6{,}02\ 10^{23}}{39{,}1\ 10^{-3}}} = 3{,}16\ 10^{13} \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\Delta\omega = 1{,}6\ 10^{12} \text{ rad.s}^{-1}$$

Soit $\mathscr{E}$ la largeur de cette bande interdite :

$$\mathscr{E} = \frac{h\times\Delta\omega}{2\pi} = 1{,}69\ 10^{-22} \text{ J} = 1{,}06\ 10^{-3} \text{ eV} = 1{,}06 \text{ meV}$$