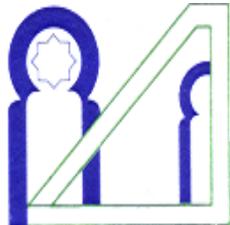


CHAPITRE III

Diffraction



H. EL RHALEB

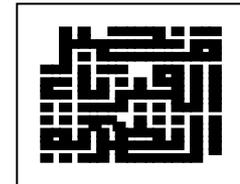
Université Mohammed V, Rabat, Agdal

Faculté des Sciences,

Département de Physique,

Laboratoire de Physique Théorique

elrhaleb@fsr.ac.ma

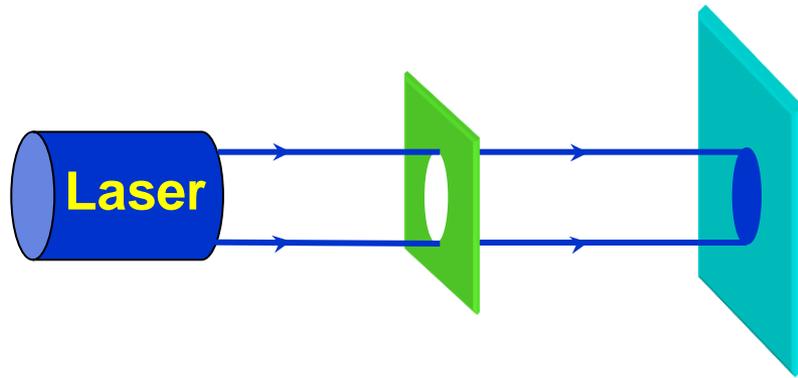


Filière SMP, année 2011-2012

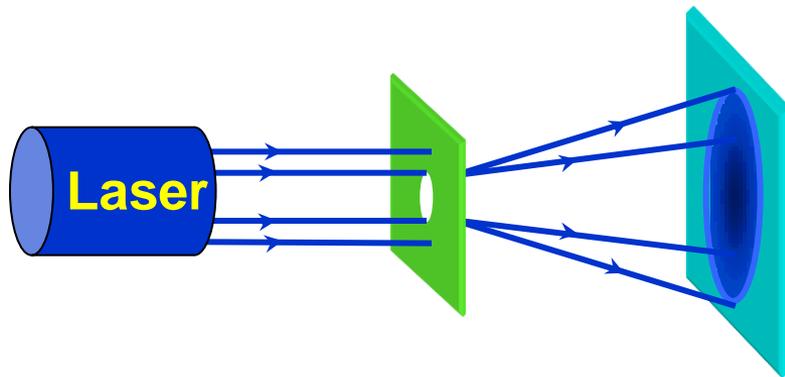
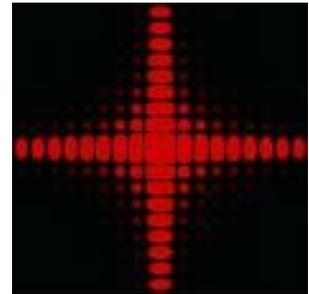
"Toute déviation des rayons lumineux de leur trajet rectiligne qui ne peut s'expliquer ni par une réflexion ni par une réfraction est due à la *diffraction*"

L'étude de la diffraction, dans le cas général, est complexe, un certain nombre d'approximations s'imposent alors.

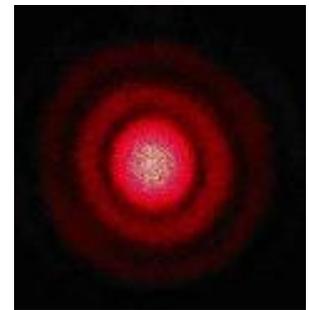
I – Mise en évidence de la diffraction



carré

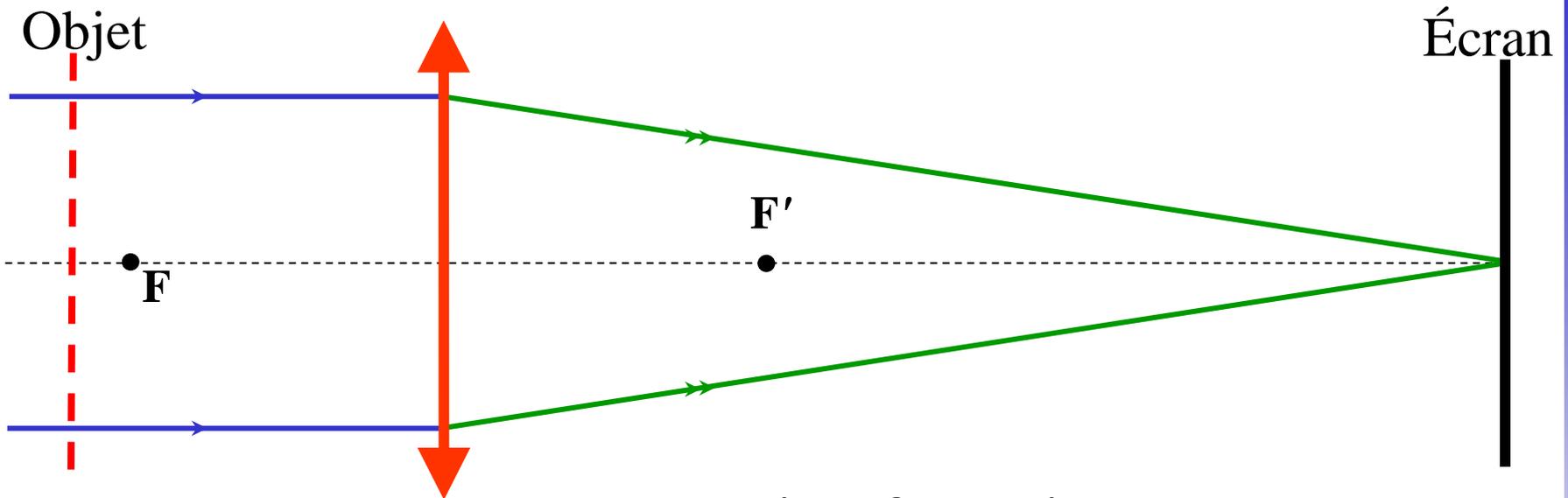


circulaire



Lorsque les dimensions des obstacles sont de l'ordre de la longueur d'onde, il convient d'utiliser le modèle ondulatoire.

I.1 – Phénomène de strioscopie

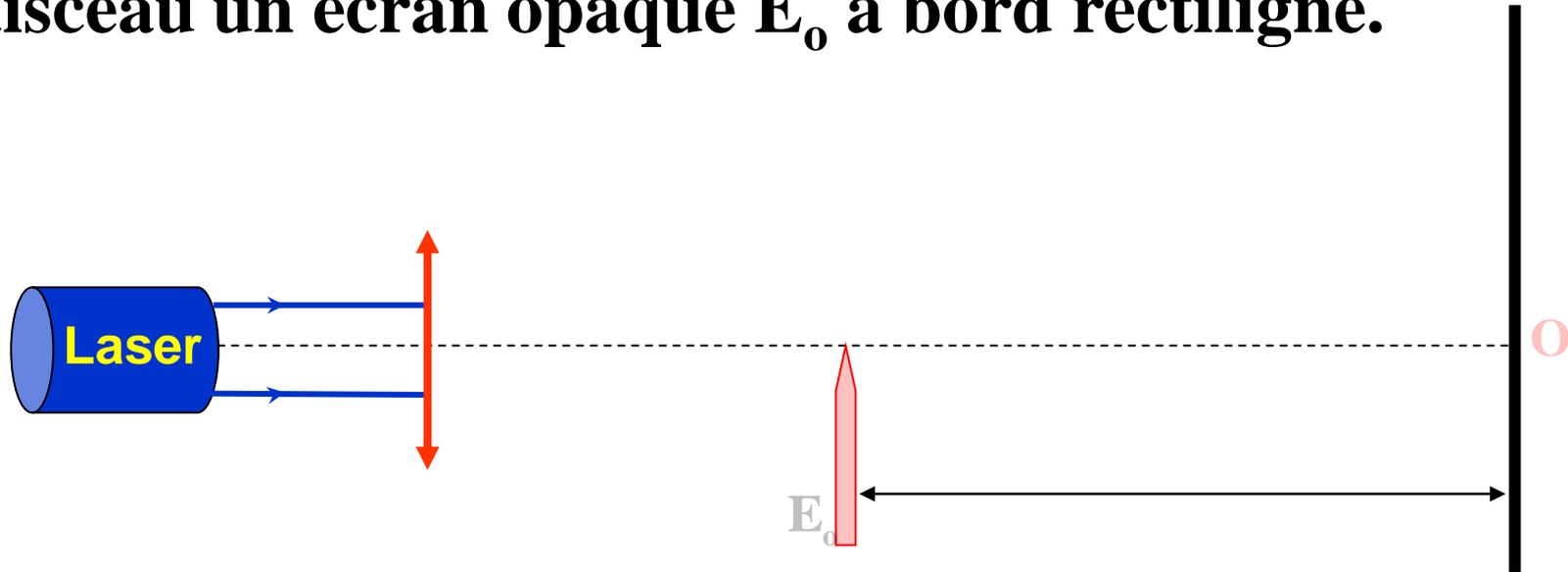


En plaçant un cache au point focal image , aucune lumière n'apparaît sur l'écran. En plaçant sur le faisceau parallèle un objet (structure très fine), on observe sur l'écran l'image de cet objet.

On peut interpréter cette expérience en supposant que l'objet éclairé se comporte comme une " " et diffracte la lumière sans passer par F' .

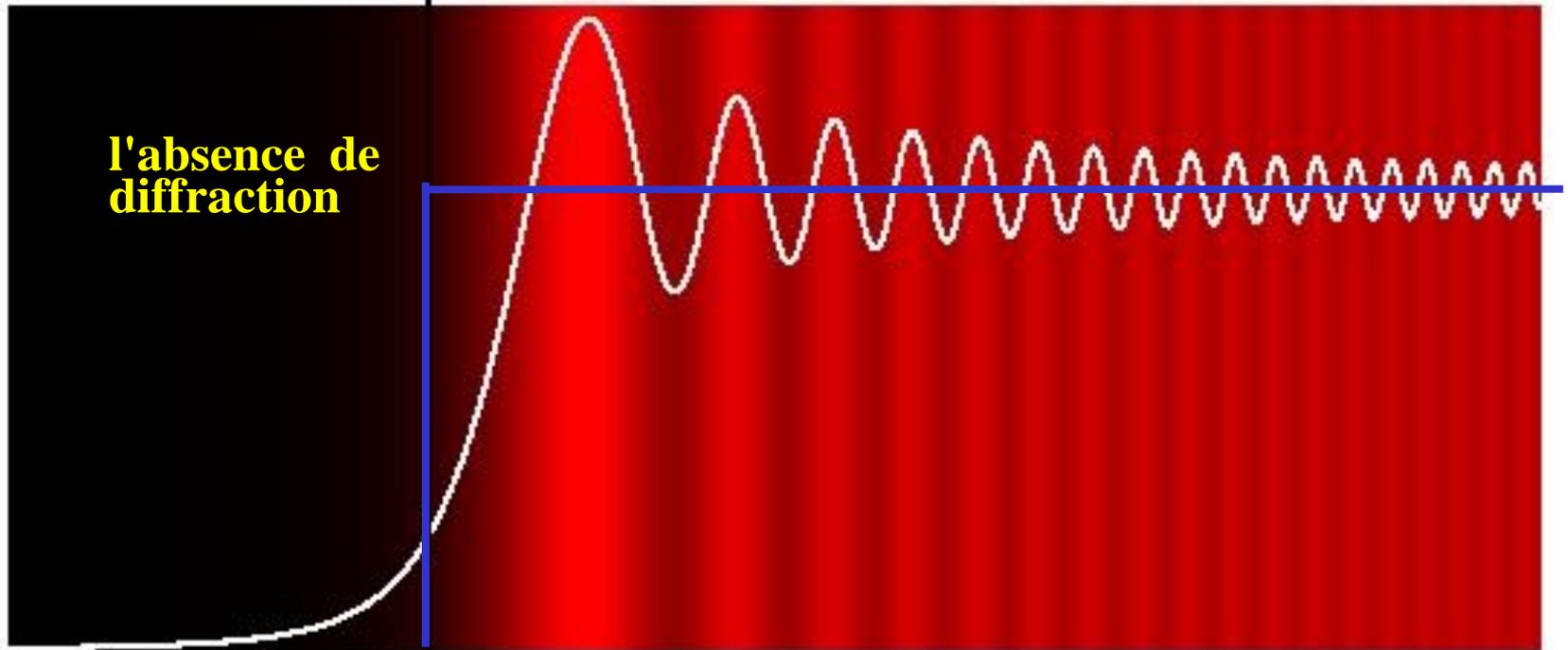
I.2 – Diffraction par le bord d'un écran

Un faisceau laser éclaire un écran. On interpose sur ce faisceau un écran opaque E_0 à bord rectiligne.



Expérimentalement, au lieu de passer de l'ombre à la pleine lumière, on observe autour de **O** des franges correspondant à la répartition d'intensité lumineuse indiqué sur la figure.

la limite de l'ombre géométrique

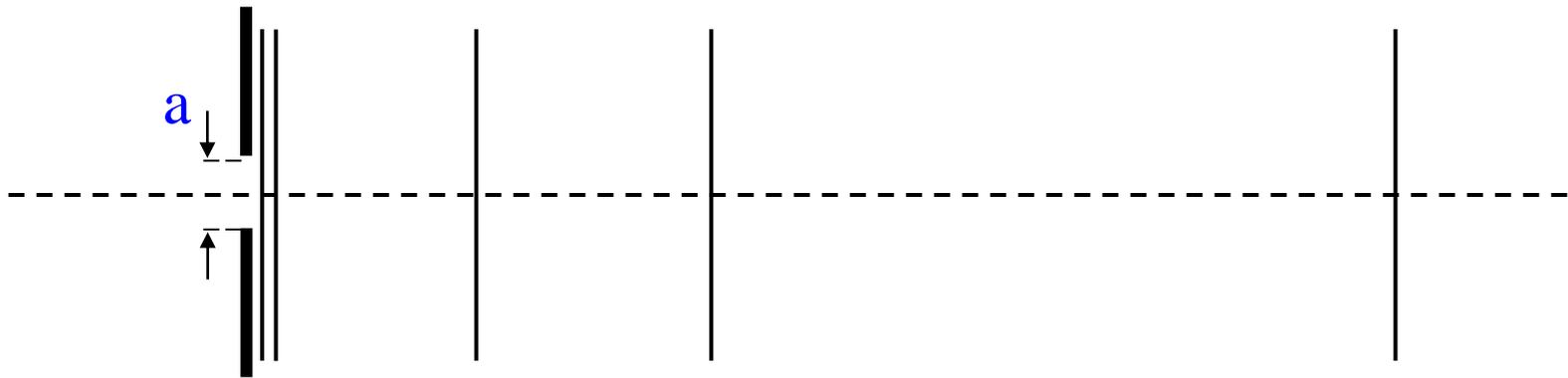


La courbe représente l'intensité de la lumière diffractée par un bord d'écran. La largeur de la première oscillation est de l'ordre de $\sqrt{\lambda D}$, et les autres oscillations sont plus rapides et moins marquées.

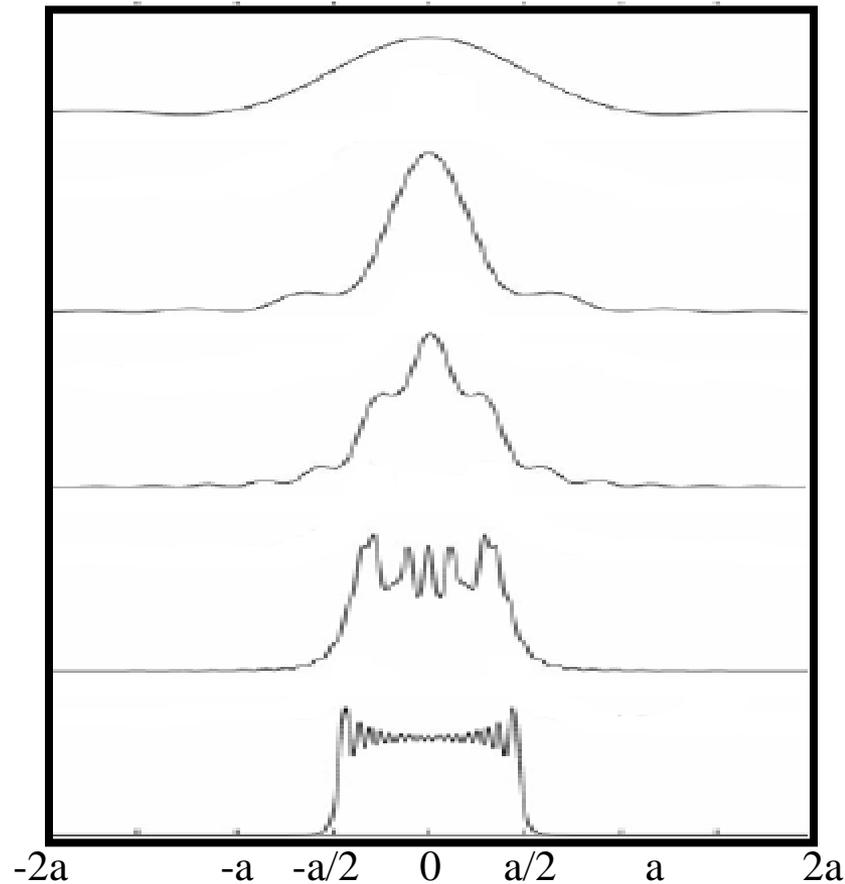
I.3 – Diffraction suivant l'emplacement

Considérons une fente de largeur a éclairé par une source ponctuelle monochromatique placée à l'infini.

Après la fente, on observe la répartition de l'éclairement aux différents emplacements 1,2, ..,5.



On observe juste après la fente l'image projetée de celle-ci avec des oscillations (franges) de période proche de λ . C'est la diffraction .



En s'éloignant, la taille des franges croît.

En 5, la figure de diffraction ne ressemble plus à la fente, nous sommes dans la situation de .

I.4 – Problématique

Pratiquement, le problème de la diffraction est le suivant : Comment déterminer la répartition d'intensité lumineuse après traversée de la pupille, connaissant la répartition d'amplitude au niveau de la pupille et la forme de celle-ci ?

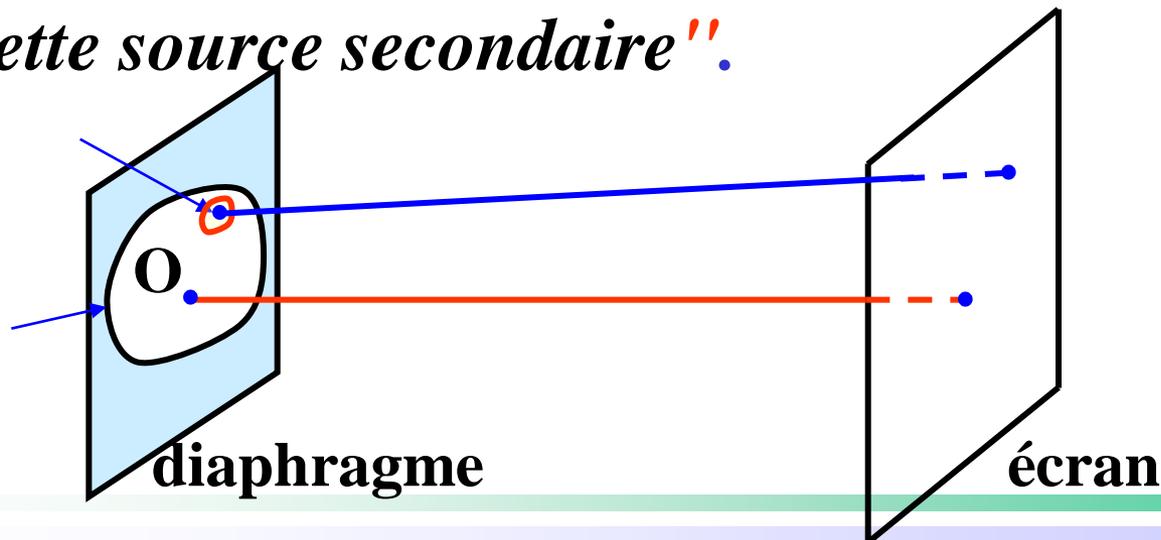
En principe il faut résoudre les équations de $\nabla^2 u = -k^2 u$ avec les conditions aux limites pour différentes polarisations.

En fait ce problème est quasi-insoluble analytiquement et souvent difficile numériquement. Pour simplifier le problème on utilise un champ scalaire avec des conditions aux limites triviales.

II – Principe de Huyghens-Fresnel

a précisé le principe de de la manière suivante :

*"L'amplitude de la vibration lumineuse en un point M est la **somme** des amplitudes produites par toutes les sources secondaires. L'état vibratoire d'une source secondaire est proportionnel à celui de l'onde incidente et à l'élément de surface dS entourant le point P où est située cette source secondaire".*



Soit $A(P)$ l'amplitude de l'onde au point P de l'ouverture de surface S :

D'après le principe de Huygens-Fresnel, le point P émet une ondelette sphérique.

L'amplitude au point M de l'écran est de la forme :

C est un facteur de proportionnalité.

Pour tout les points P de l'ouverture, au point M , nous devons effectuer la somme de toutes les contributions élémentaires :

Additionner ces amplitudes est une conséquence de la linéarité des équations de *Maxwell*. On dit que les vibrations interfèrent pour donner en **M** une vibration résultante.

On montre que le facteur **C** est quasiment une constante et que la variable **r** du dénominateur peut être confondue avec **D**.

La formulation pratique du principe de *Huyghens-Fresnel* est donc :

$$\text{avec } \mathbf{K} = \frac{\mathbf{C}}{\mathbf{D}} = \text{cte}$$

Par suite

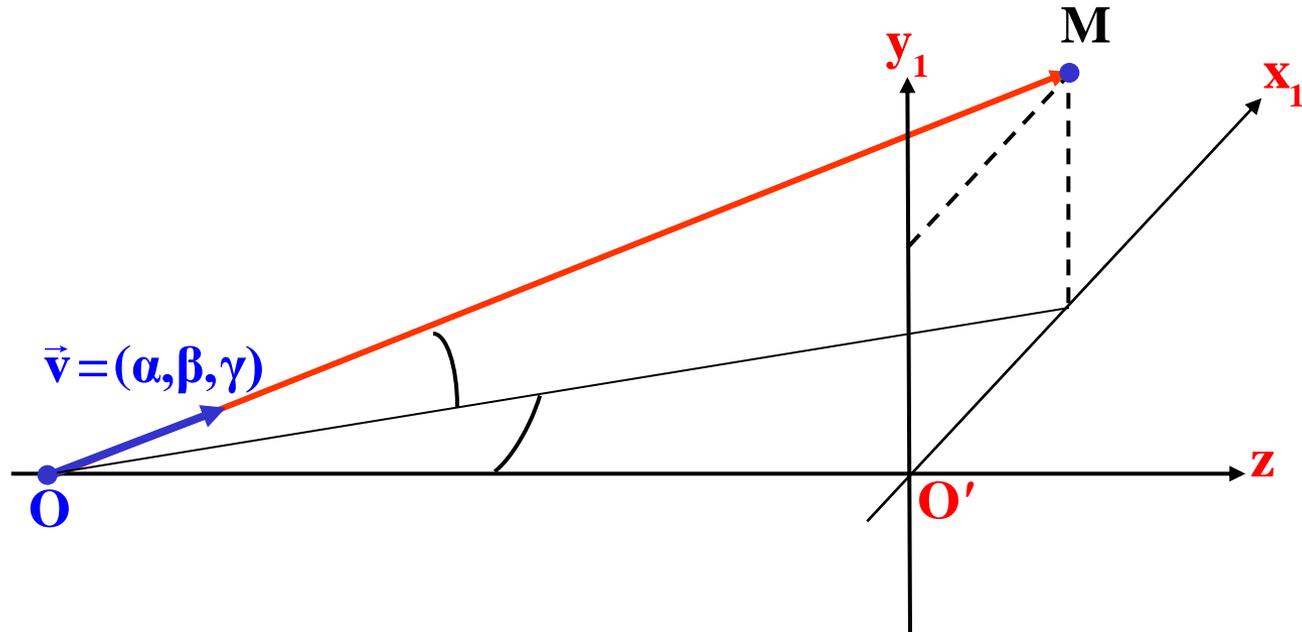
Si on suppose que $\rho \ll R$ on peut écrire :

En utilisant les coordonnées de R et ρ , on déduit :

L'amplitude au point M s'écrit donc (1) :

$$A(M) = Ke^{ikR} \iint_S A(P) \exp\left[\frac{-ik(x_1x + y_1y)}{R}\right] \exp\left[\frac{ik(x^2 + y^2)}{2R}\right] dS$$

On introduit les sinus directeur (α, β, γ) :



L'expression précédente s'écrit (2) :

$$A(M) \approx K e^{ikR} \iint_S A(P) \exp -ik(\alpha x + \beta y) \exp \left[\frac{ik(x^2 + y^2)}{2R} \right] dS$$

III.2 – Approximation de Fresnel et Fraunhofer

L'expression (2) est l'approximation fondamentale de la diffraction dans l'approximation de *Fresnel*.

Dans certaines conditions on simplifie parfois cette expression en écrivant :

Lorsque

c.à.d R petit.

$$A(M) \approx K e^{ikR} \iint_S A(P) \exp -ik(\alpha x + \beta y) \exp \left[\frac{ik(x^2 + y^2)}{2R} \right] dS$$

Nous sommes dans le cas de la diffraction à distance finie ou (le calcul de (3) est généralement difficile).

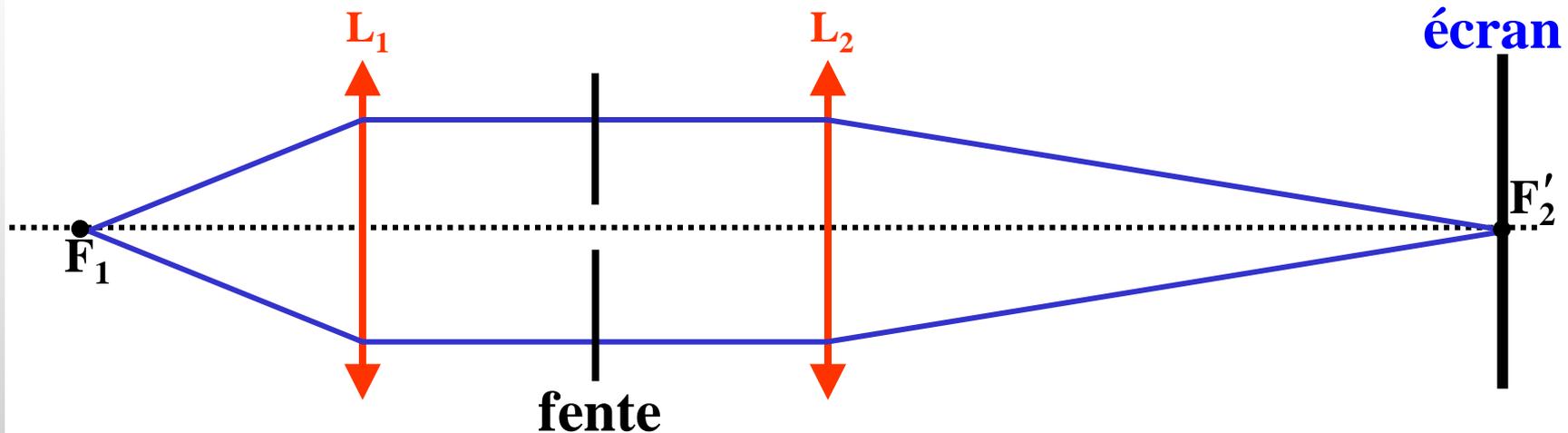
Lorsque le terme quadratique devient négligeable devant le terme linéaire et l'expression (2) devient :

$$A(M) \simeq K \cdot e^{ikR} \iint_S A(P) \exp(-ik(\alpha x + \beta y)) dS$$

Nous sommes dans le cas de la diffraction à l'infini ou

•

Dans la pratique, on réalise la diffraction à l'infini en se plaçant dans le plan focal F' d'une lentille convergente.



On place en F_1 , un objet ponctuel. L'ouverture de diffraction reçoit donc une onde plane. On observe le phénomène de diffraction à l'infini dans le plan focal image de la lentille L_2 .

III.3 – Transformation de Fourier

Considérant l'expression de la diffraction de Fraunhofer . L'amplitude sur le diaphragme s'écrit $A(x,y)$, alors que sur l'écran est $A(x_1,y_1)$.

Le terme de phase peut s'écrire :

$$\text{avec } u = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{x_1}{\lambda R} \quad \text{et} \quad v = \frac{\beta}{\lambda} = \frac{y_1}{\lambda R} \quad \text{fréquences spatiales}$$

L'amplitude diffractée prend la forme :

$$A(u, v) = \iint_S A(x, y) \exp(-2i\pi(ux + vy)) dx dy$$

Or, nous savons que $A(x, y) = 0$ si $(x, y) \notin S$ et ailleurs.

Nous pouvons donc étendre le domaine d'intégration jusqu'à l'infini :

$$A(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \exp(-2i\pi(\mathbf{u}\mathbf{x} + \mathbf{v}\mathbf{y})) d\mathbf{x}d\mathbf{y}$$

Cette équation définit une opération mathématique appelée *transformation de Fourier* :

$$\hat{A}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \iint A(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \exp(-2i\pi(\mathbf{u}\mathbf{x} + \mathbf{v}\mathbf{y})) d\mathbf{x}d\mathbf{y}$$

On peut dire qu'à un facteur multiplicatif près, la répartition d'amplitude à l'infini d'une onde diffractée est égale à la transformée de *Fourier* de la répartition d'amplitude dans le plan de l'objet diffractant.

IV – Les exemples

On se limite à la diffraction de *Fraunhofer*.

IV.1 – Diffraction par une fente

IV.1.1 – Expression de l'amplitude diffractée

Considérant une fente fine rectangulaire de largeur **a** et de longueur **b** ($a \ll b$), éclairée uniformément par un faisceau monochromatique parallèle à l'axe **oz**.

Sachant que $A(P) = A(x,y) = \text{Cte}$ (éclairage uniforme), la relation suivante :

s'écrit :

$$A(M) = \iint_S A(P) \exp(-ik(\alpha x + \beta y)) dS$$

En utilisant la relation

on obtient :

C = constante

Ou encore

puisque $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Cette expression est de a forme : $A = C \cdot \frac{\sin U}{U} \frac{\sin V}{V}$

IV.1.2 – Etude de la fonction sinc(U)

1/ pour $U = k\pi$

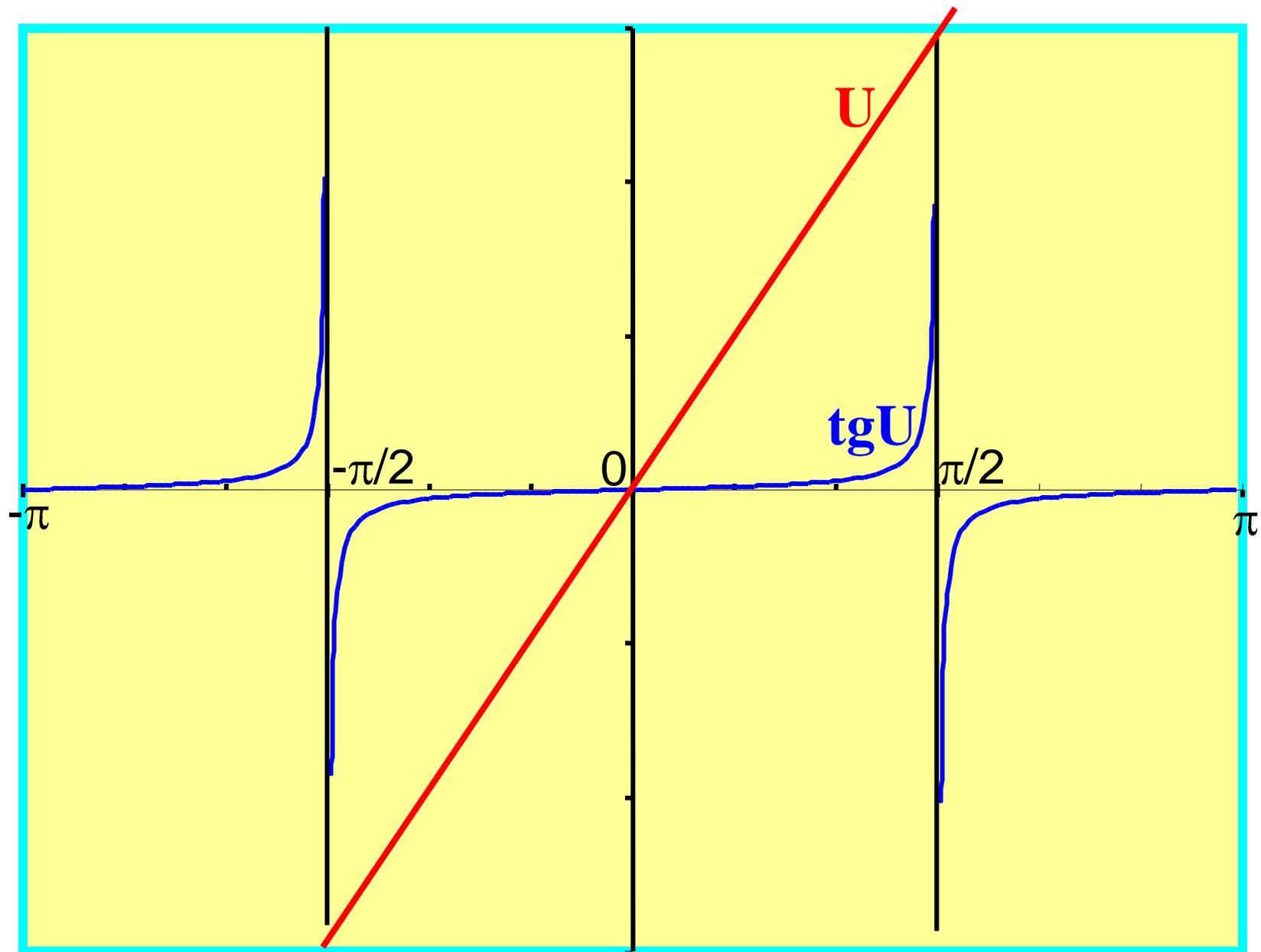
2/ pour $U = 0$

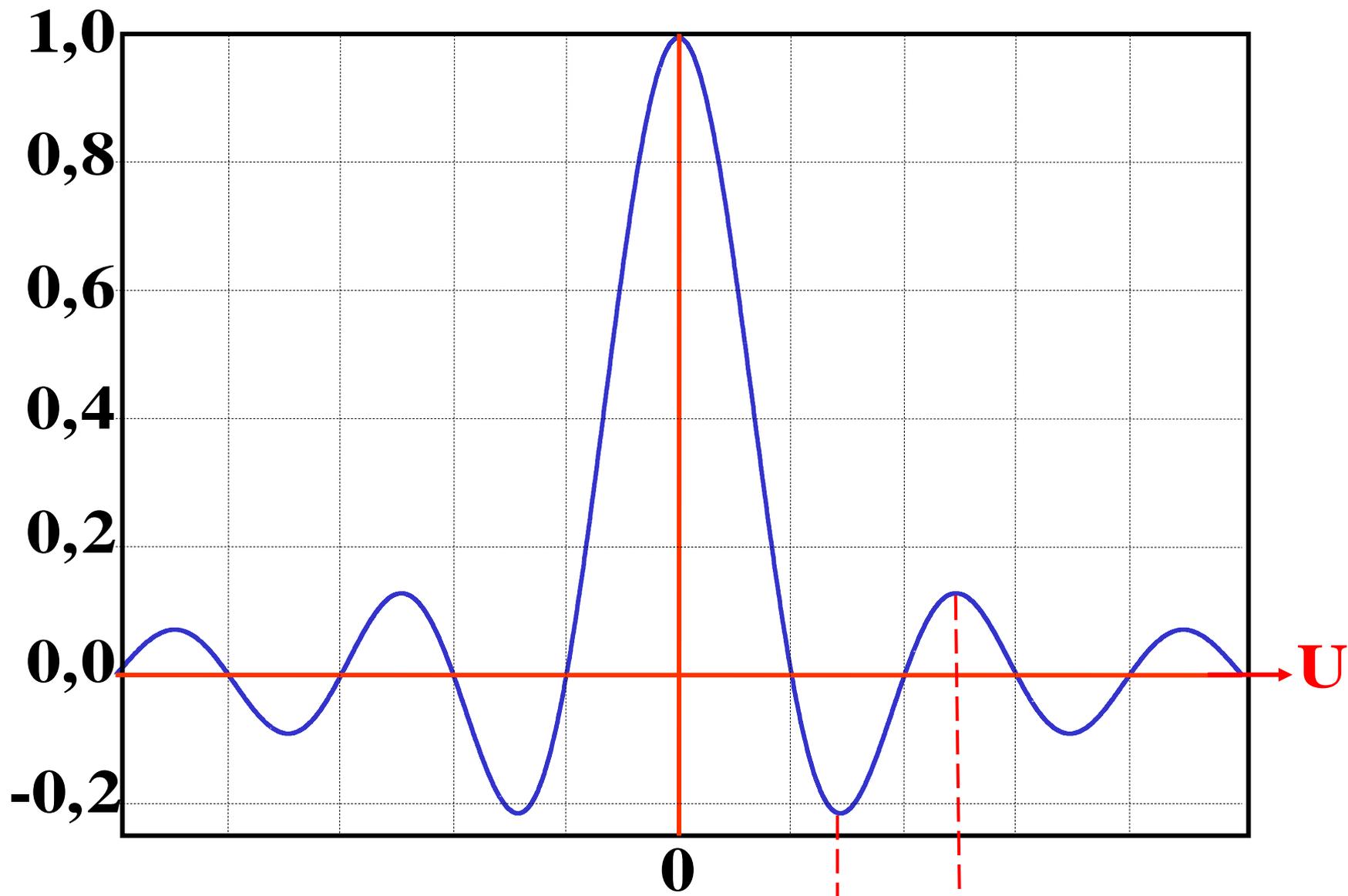
3/ est maximum ($U \neq 0$) pour $U = \tan U$

soit $U = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$

et a pour valeur :

$$\left(\frac{\sin U}{U}\right)_{\max} = \frac{2(-1)^n}{(2n + 1)\pi} \quad (\text{avec } n \neq 0 \text{ et } -1)$$





IV.1.3 – Répartition de l'intensité dans le plan focale d'une lentille

Sachant que $\alpha = \cos\psi\sin\theta$ et $\beta = \sin\psi$ on peut écrire :

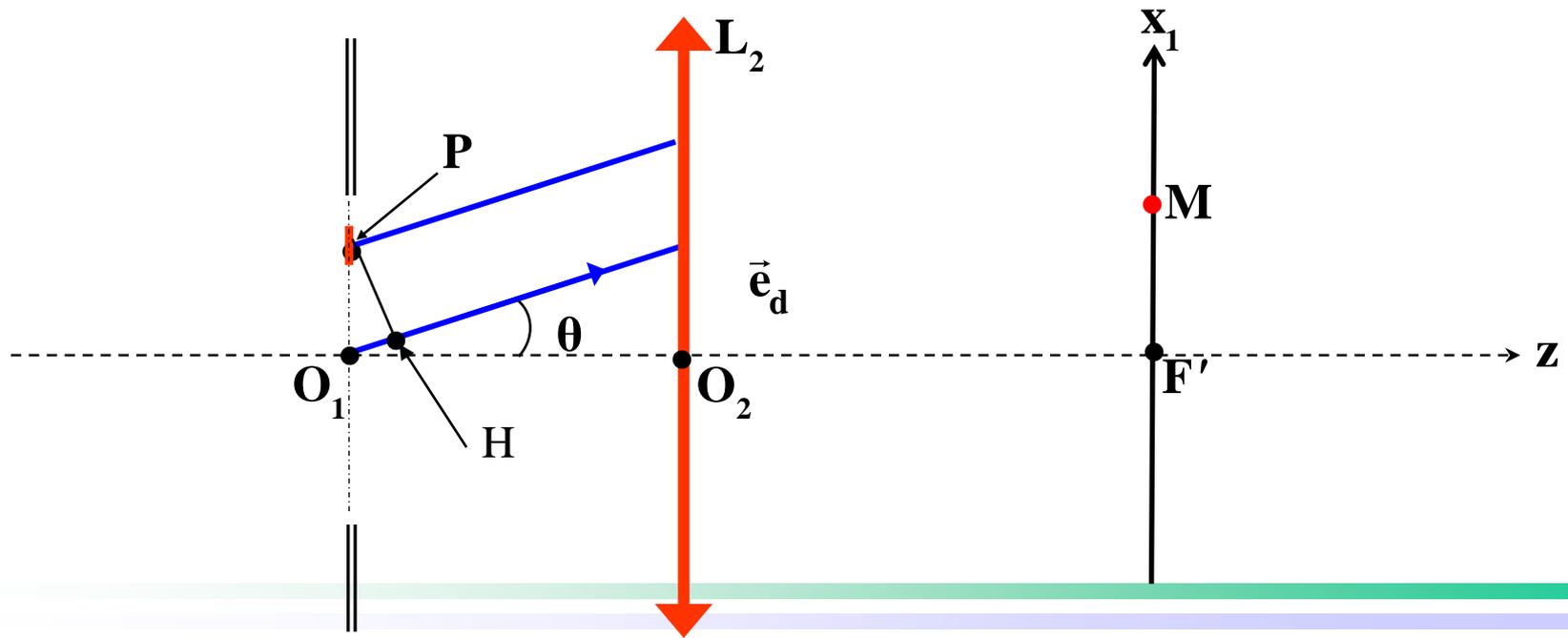
$$A(\alpha, \beta) \approx A(\psi, \theta) = C.ab \frac{\sin\left[\frac{\pi a \cos(\psi)\sin(\theta)}{\lambda}\right]}{\frac{\pi a \cos(\psi)\sin(\theta)}{\lambda}} \frac{\sin\left[\frac{\pi b \sin(\psi)}{\lambda}\right]}{\frac{\pi b \sin(\psi)}{\lambda}}$$

Si nous supposons que $\psi \approx 0$, la situation devient unidimensionnelle et on obtient : $A(\psi, \theta) \rightarrow A(\theta)$ avec :

$$A(\theta) = A_0 \frac{\sin\left[\frac{\pi a \sin(\theta)}{\lambda}\right]}{\frac{\pi a \sin(\theta)}{\lambda}}$$

où A_0 est une constante proportionnelle à la surface de la fente . Cette expression représente l'amplitude de l'onde diffracté par une fente fine de largeur a suivant θ .

Si nous nous plaçons dans le plan focal de la lentille de distance focale , il nous faut remplacer la variable θ par la variable x_1 . Un calcul préalable est nécessaire :



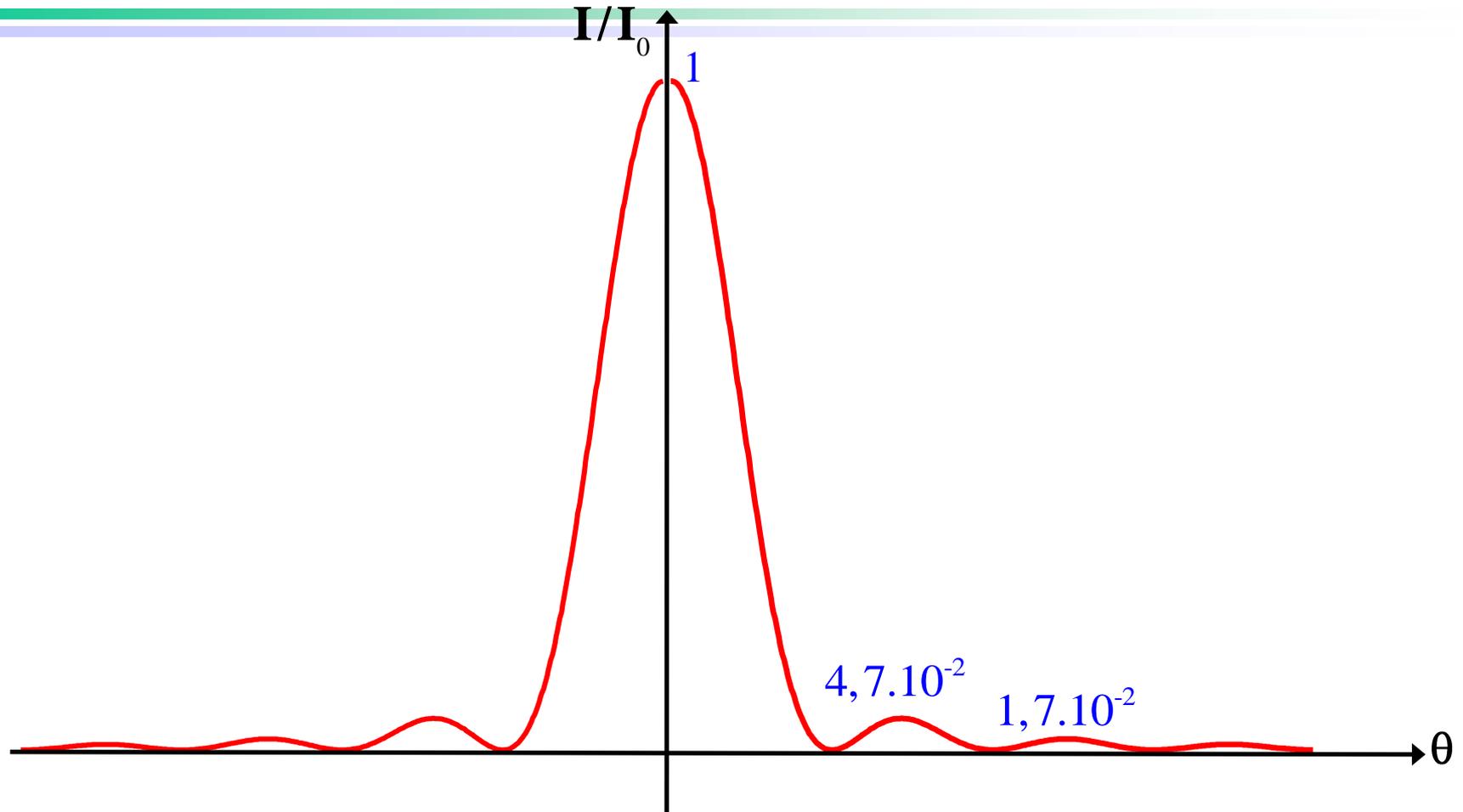
La point M dans le plan focal a pour abscisse :

**Les angles de diffraction étant toujours "petits"
(hypothèse initiales) nous pouvons écrire :**

Par suite la répartition de l'amplitude à l'infini (plan focal) $A(x_1)$ et la répartition d'intensité $I(x_1) = AA^*$ s'écrivent :

$$A(x_1) = A_0 \frac{\sin(p)}{p} \quad \text{avec} \quad p = \frac{\pi a x_1}{\lambda f}$$

$$I(x_1) = I_0 \left[\frac{\sin(p)}{p} \right]^2 \quad \text{avec} \quad I_0 = A_0 A_0^*$$



On constate que le maximum central est très intense par rapport aux maximums secondaires.

Le rapport entre ce maximum et le premier maximum secondaire est de l'ordre de $1/0,047 = 21$.

IV.1.4 – Cas d'une ouverture rectangulaire

A partir de l'expression (5) Il est facile d'obtenir l'expression de l'intensité diffracté à l'infini par une ouverture rectangulaire :

$$\text{avec } p = \frac{\pi a x_1}{\lambda f} \quad q = \frac{\pi b y_1}{\lambda f} \quad \text{et} \quad I_0 = C^2 \cdot a^2 b^2$$

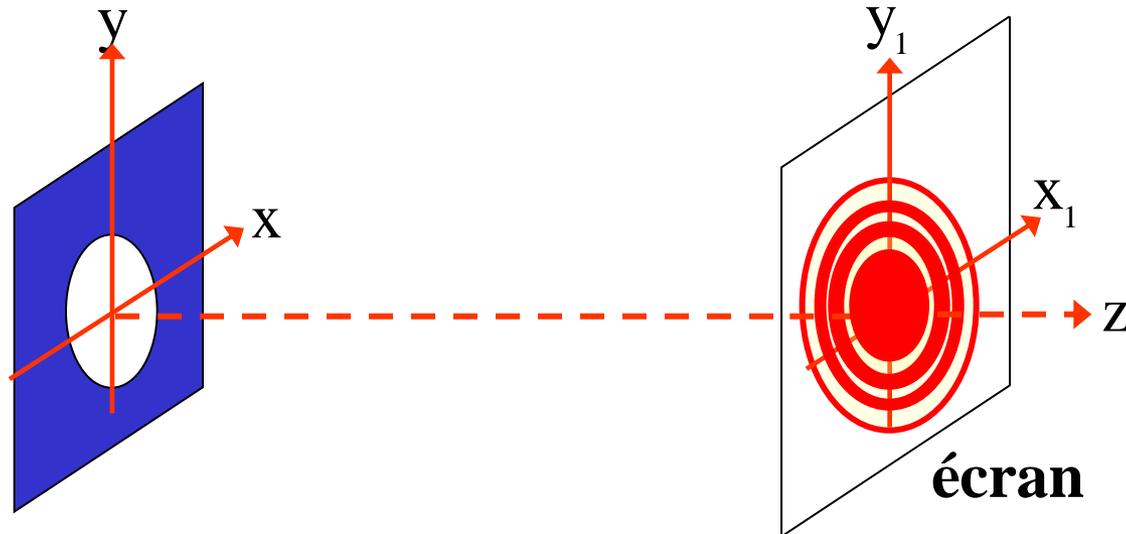
La répartition a la forme d'une croix.

La tache centrale est plus large dans la direction où la fente est plus étroite et inversement.

IV.2 – Diffraction par une ouverture circulaire

Les diaphragmes circulaires sont très utilisés en optique. La diffraction par une ouverture circulaire est donc très importante.

Soit une ouverture circulaire de rayon r centré sur l'axe Oz .



La symétrie de révolution implique que la figure de diffraction aura cette même symétrie. On observera des *anneaux* alternativement lumineux et sombres.

On effectue le changement de variables suivant :

et

\Rightarrow

Puisqu'il y a une symétrie de révolution, on peut se placer dans un plan contenant l'axe optique Oz (exemple xOz).

L'amplitude diffractée à l'infini s'écrit :

Cette expression ne s'intègre pas au moyen des fonctions élémentaires mais nécessite l'introduction des fonctions de *Bessel*.

L'intensité s'exprime alors :

$$I = I_0 \left[\frac{2J_1(m)}{m} \right]^2$$

Où $J_1(m)$ est une fonction de *Bessel* de premier ordre,

et
$$m = \frac{2\pi d \sin\theta}{\lambda}$$

Remarque

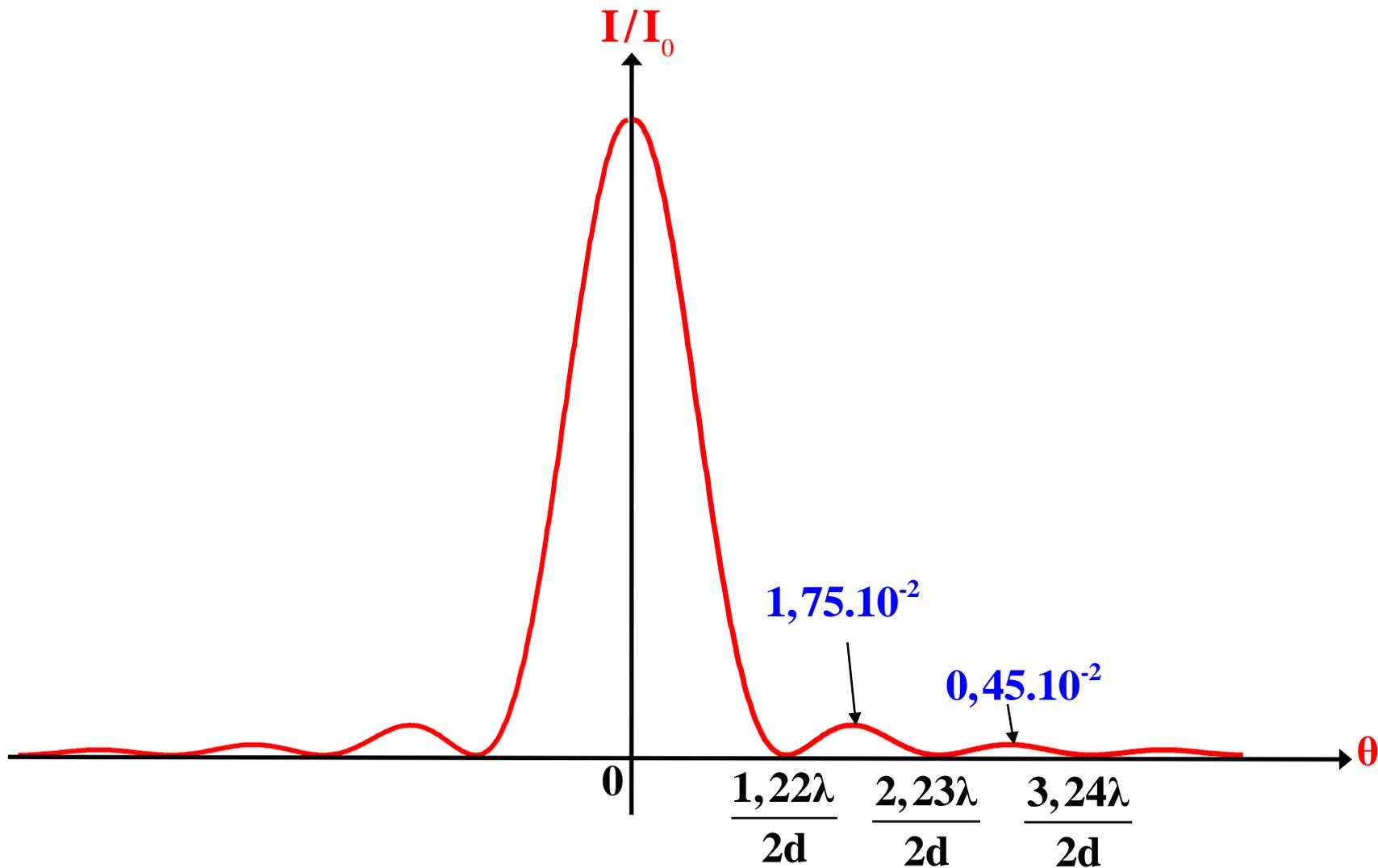
On peut aussi aborder l'intégration par des développements en série. En posant $x = \pi d \cdot \sin(\theta) / \lambda$ et en intégrant l'exponentielle en fonction de x et en intégrant terme à terme. Ce qui permet de faire des calculs numériques.

La tache centrale porte souvent le nom de Airy , son importance est grande dans la théorie de formation des images et c'est en elle que se trouve concentrée "presque toute la lumière".

On retiendra que les minimums nuls ne sont pas équidistants.

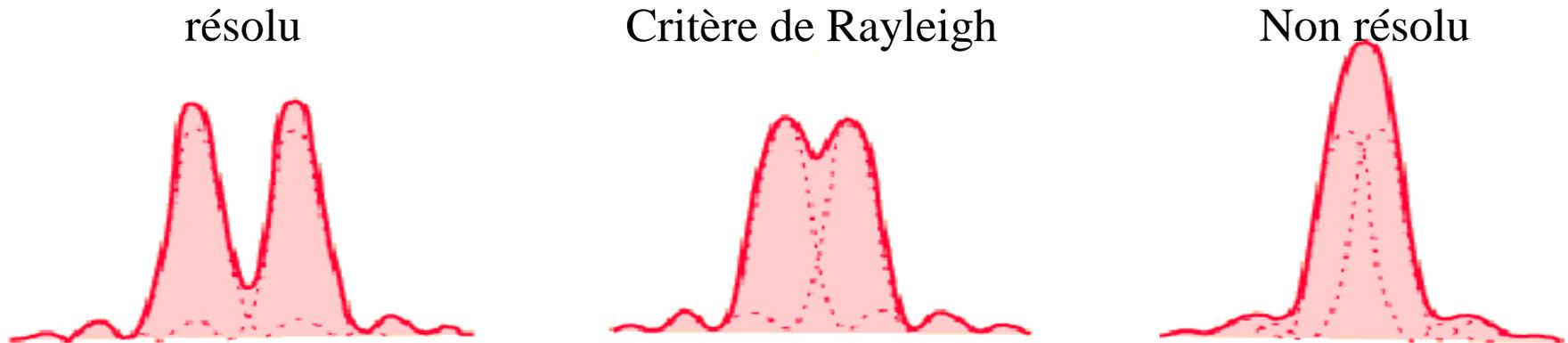
Le premier minimum nul s'obtient pour $m = 3,832$ c.à.d pour :

Le premier anneau lumineux a une intensité relative de $1,75 \cdot 10^{-2}$.

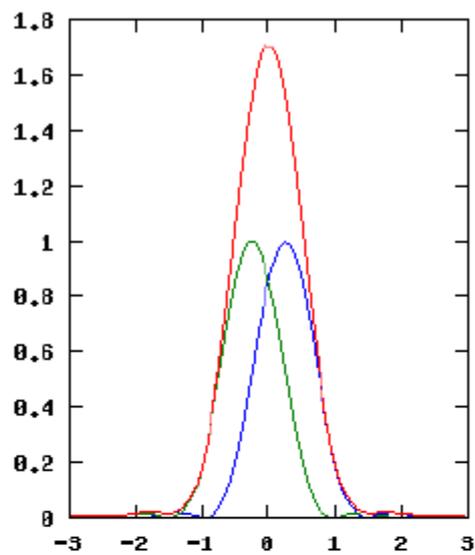


**Ce phénomène est responsable de la limitation du
des instruments d'optique.**

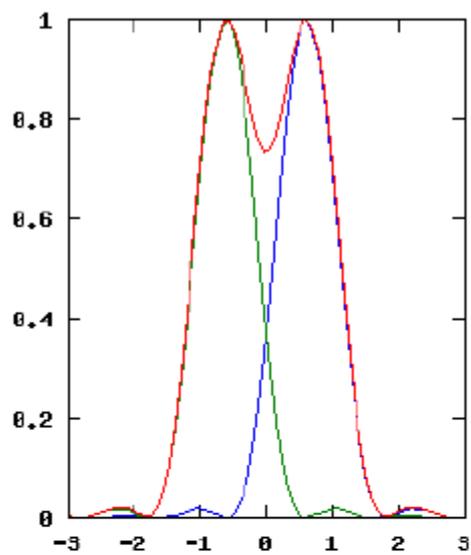
**Selon le critère de Lord Rayleigh, *deux points sont
séparés par l'objectif lorsque le centre de la figure de
diffraction du premier se trouve sur le premier anneau
sombre de l'image de diffraction de l'autre.***



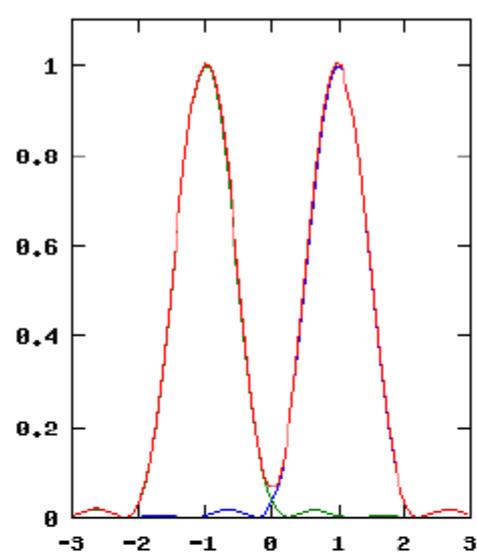
**Remarque : Ce critère n'est toutefois rigoureux que si
les sources sont incohérentes ; si elles sont cohérentes, il
faut tenir compte des interférences.**



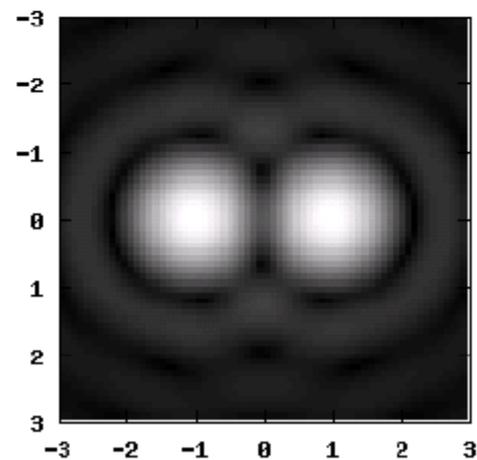
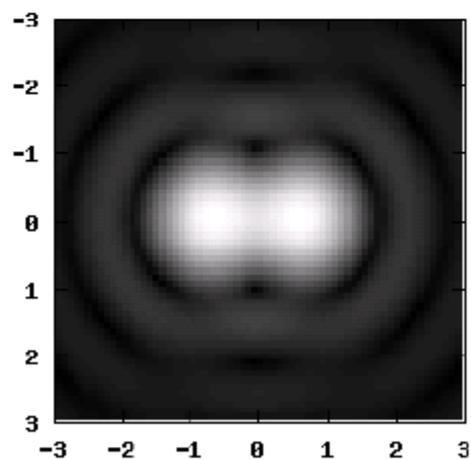
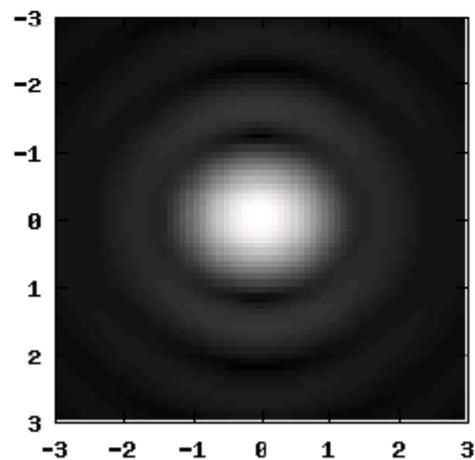
$\theta < 1.22\lambda D$



$\theta = 1.22\lambda D$ Limite de Rayleigh



$\theta > 1.22\lambda D$



IV.3 – Relation entre l'objet diffractant et la figure de diffraction

Nous prenons comme modèle l'objet diffractant, la fente rectangulaire éclairée par un faisceau monochromatique parallèle à l'axe optique.

L'amplitude diffracté s'écrit :

IV.3.1 – Dilatation

Supposons que l'on effectue des affinités de rapport m suivant Ox et n suivant Oy . L'amplitude s'écrit :

Si on effectue le changement de variables suivant :

et

on obtient :

$$A(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(x', y') \exp \left[-ik \left(\alpha \frac{x'}{m} + \beta \frac{y'}{n} \right) \right] d \left(\frac{x'}{m} \right) d \left(\frac{y'}{n} \right)$$

Ainsi, toute dilatation de l'ouverture diffractante dans une direction, se traduit par la contraction de la figure de diffraction suivant la même direction et inversement.

IV.3.2 – Translation

Supposant que l'on translate l'ouverture diffractante :
et

$$A'(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(x', y') e^{-ik(\alpha(x' - x_0) + \beta(y' - y_0))} dx' dy'$$

**L'amplitude est multipliée par un facteur de translation
mais l'éclairement de l'écran est inchangé.**

**La figure de diffraction reste donc immobile sur l'écran
lorsqu'on translate l'objet diffractant.**

IV.3.3 – Inclinaison du faisceau incident

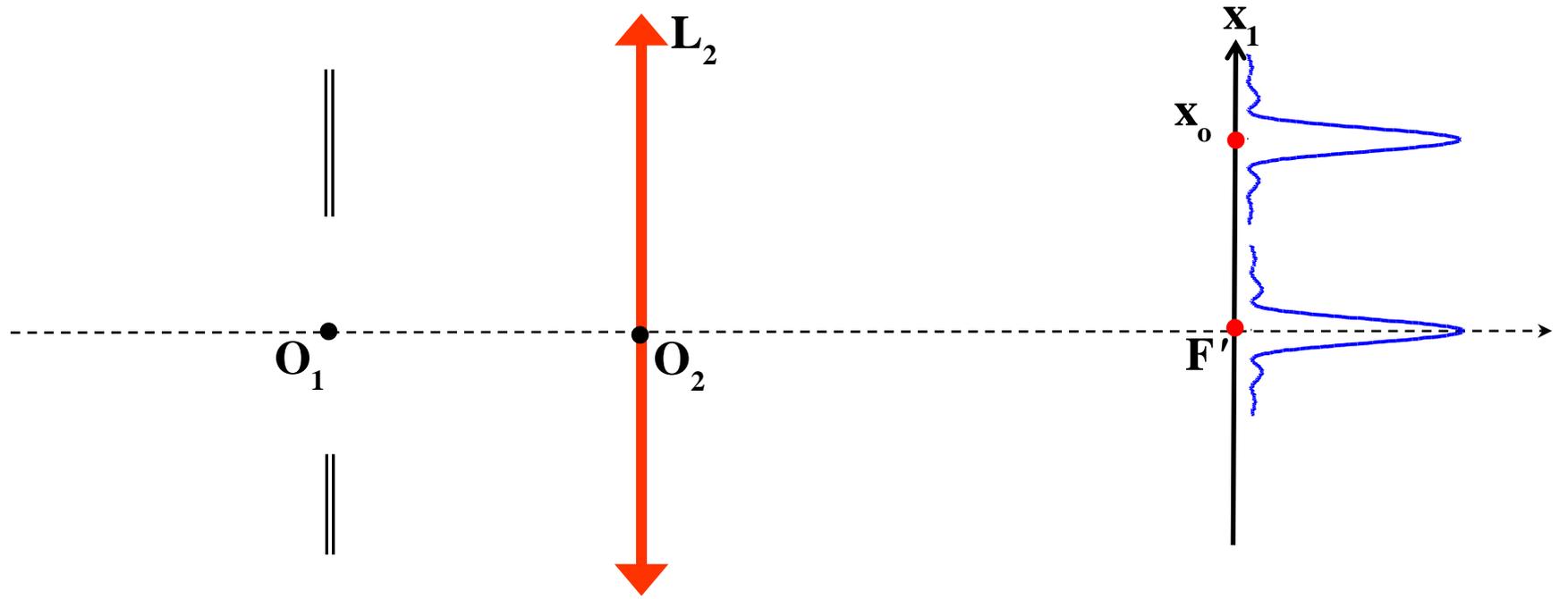
Lorsque la fente rectangulaire est éclairée par un faisceau parallèle monochromatique incliné par rapport à l'axe optique.

Soient α_0 et β_0 les cosinus directeurs de cette direction.

On montre facilement que $(\alpha x + \beta y)$ doit être remplacé par $((\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y)$ et donc $\Lambda(\alpha, \beta)$ devient :

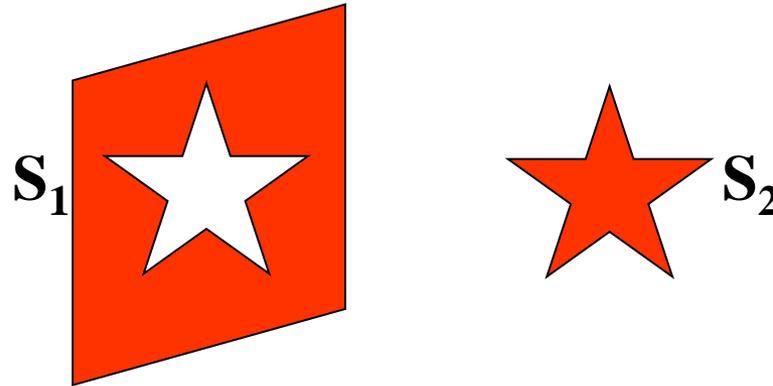
La figure de diffraction est décalée, elle a pour centre :

$$x_0 = \alpha_0 f \quad \text{et} \quad y_0 = \beta_0 f$$



IV.4 – Les écrans complémentaires

Considérons deux ouvertures complémentaires de surface S_1 et S_2 .



Considérons l'une des deux ouvertures diffractantes et un écran placé dans le plan focal image d'une lentille convergente parfaite.

L'ouverture diffractante est uniformément éclairée.

M en dehors du foyer objet est nulle :

Appliquons le principe de
surface S :

à la

$$\Rightarrow A_1 = -A_2 \text{ et par suite}$$

Ce résultat constitue le théorème de *Babinet* :

En dehors de l'image géométrique, les figures de diffraction données par deux écrans complémentaires sont identiques.



Fil 120 μm