

Diffraction de Fraunhofer



H. EL RHALEB

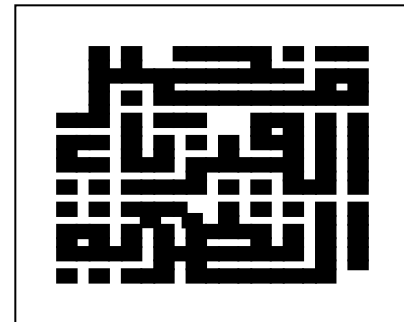
Université Mohammed V, Rabat, Agdal

Faculté des Sciences,

Département de Physique,

Laboratoire de Physique Théorique

elrhaleb@fsr.ac.ma

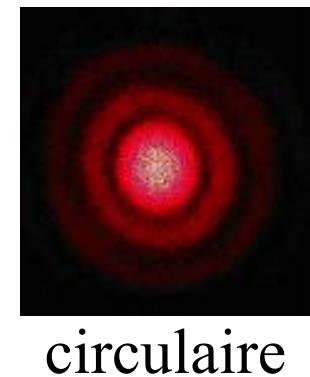
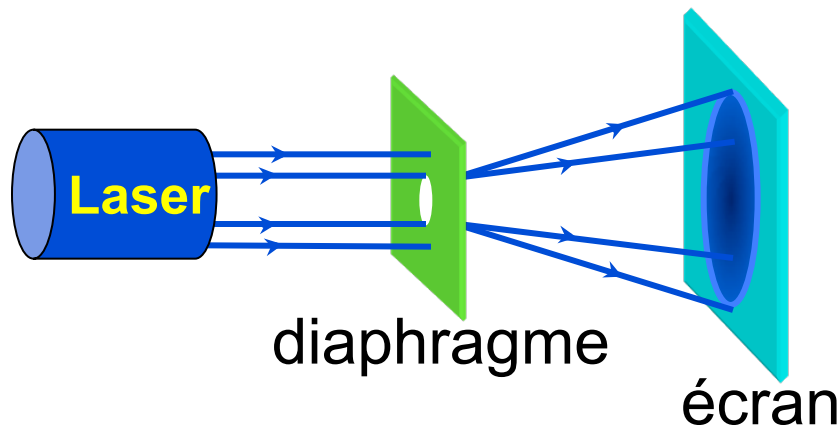
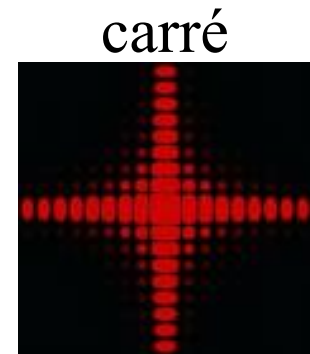
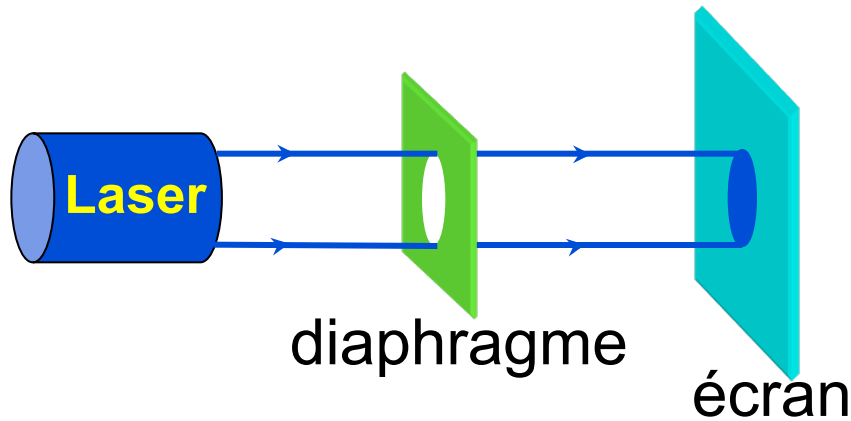


Filière SMP, année 2013-2014

"Toute déviation des rayons lumineux de leur trajet rectiligne qui ne peut s'expliquer ni par une réflexion ni par une réfraction est due à la *diffraction*"

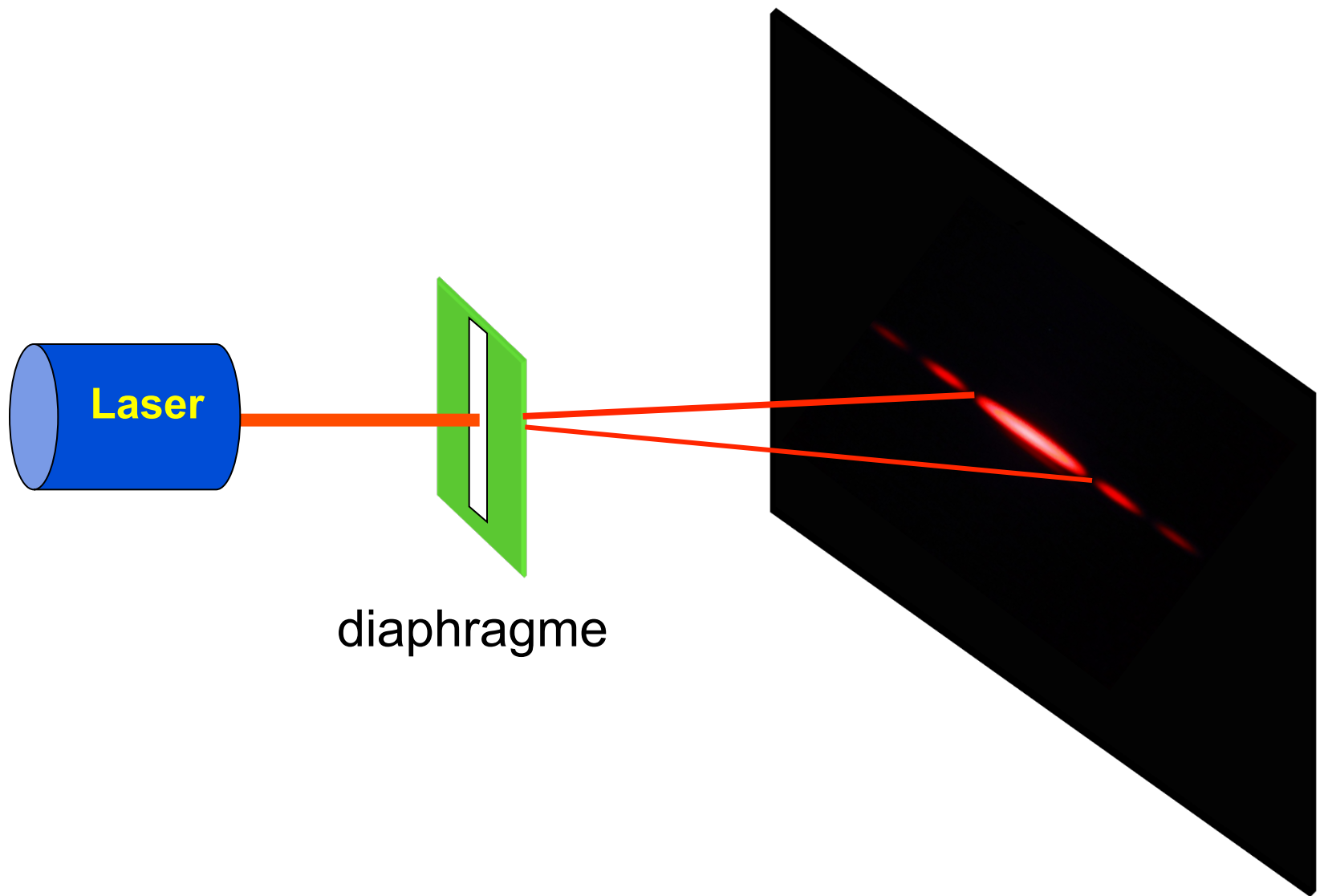
L'étude de la diffraction, dans le cas général, est complexe, un certain nombre d'approximations s'imposent alors.

I – Mise en évidence de la diffraction

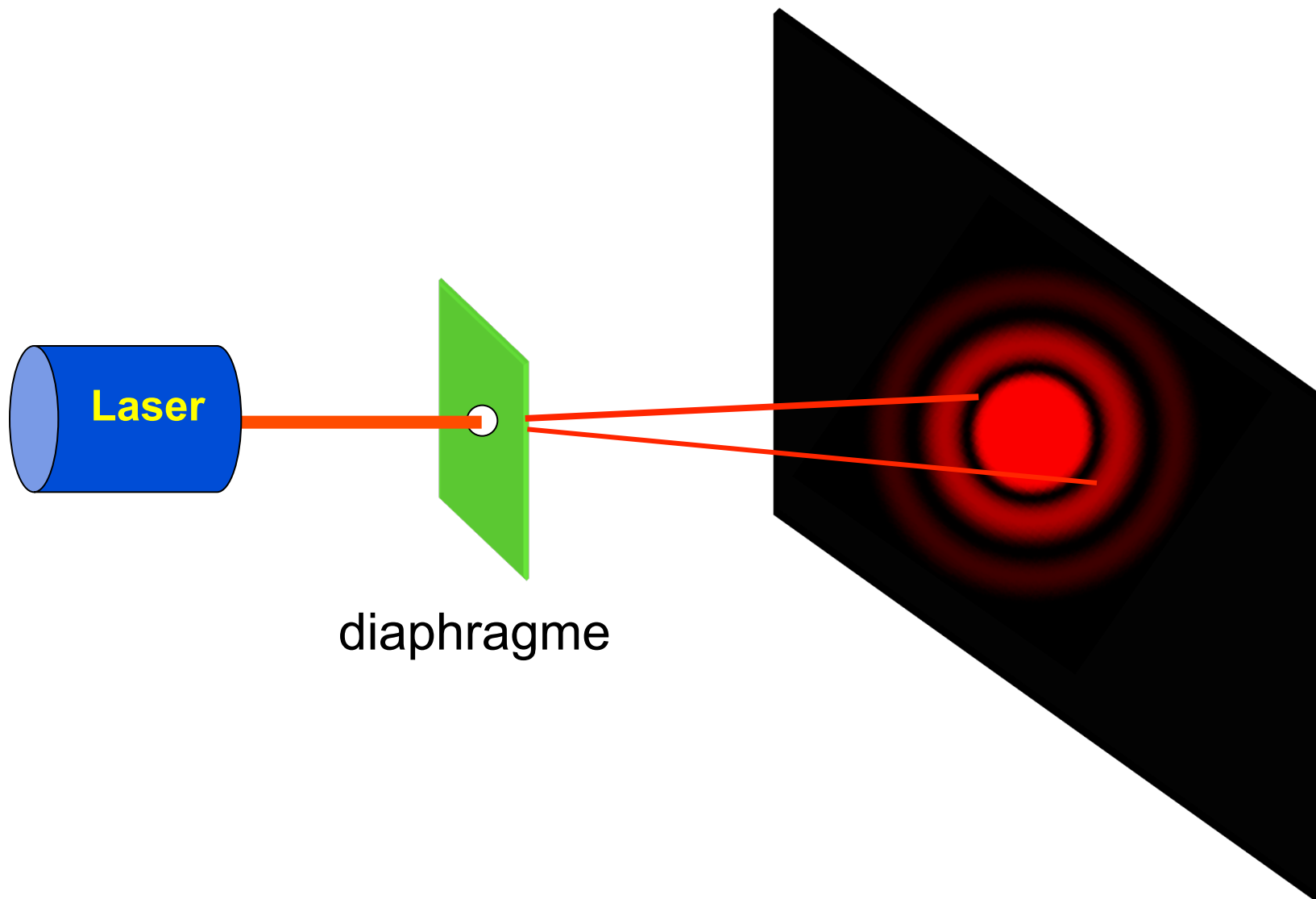


Lorsque les dimensions des obstacles sont de l'ordre de la longueur d'onde, il convient d'utiliser le modèle ondulatoire.

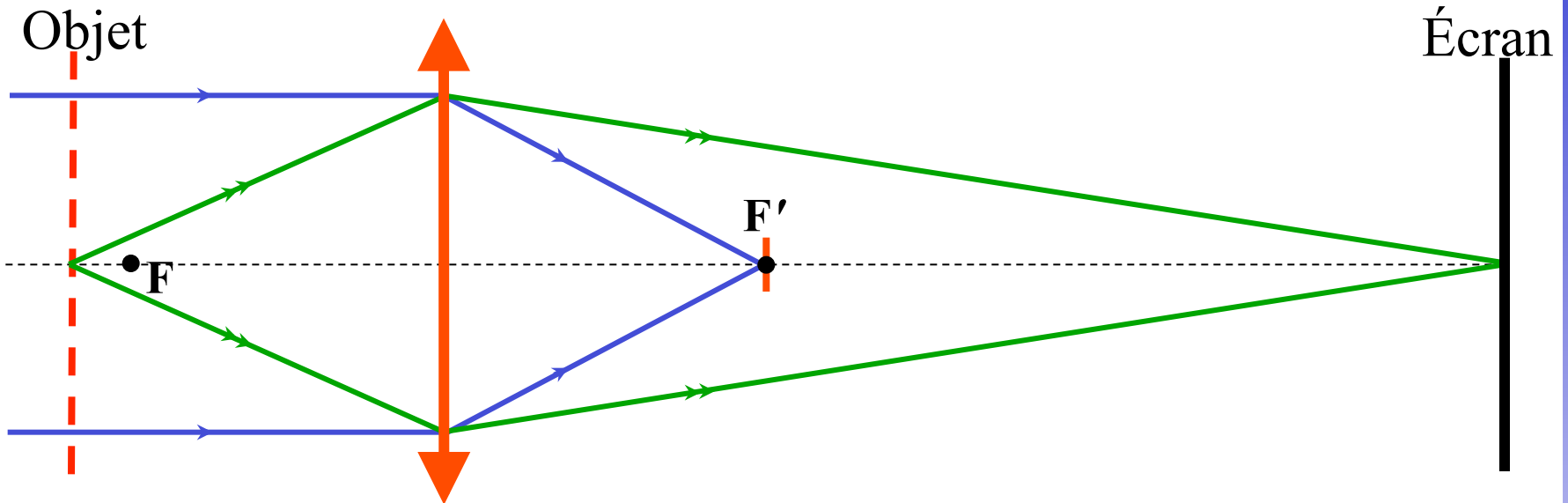
I – Mise en évidence de la diffraction



I – Mise en évidence de la diffraction



I.1 – Phénomène de strioscopie

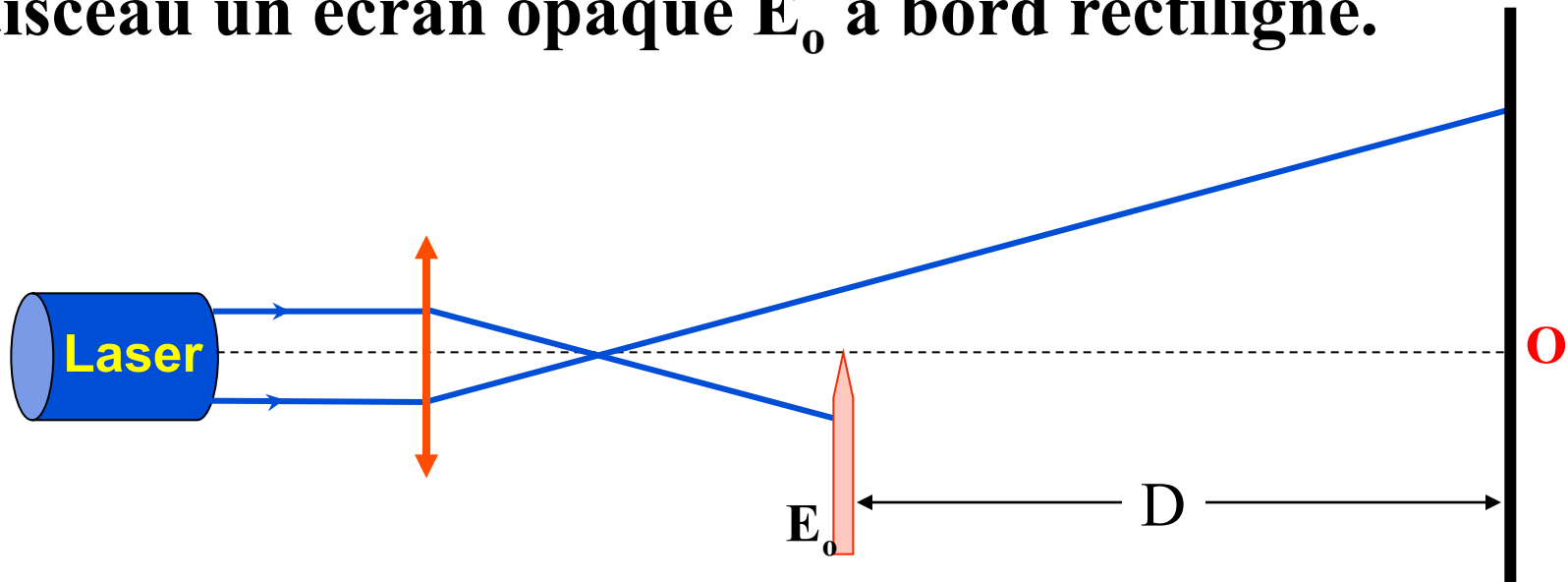


En plaçant un cache au point focal image F' , aucune lumière n'apparaît sur l'écran. En plaçant sur le faisceau parallèle un objet (structure très fine), on observe sur l'écran l'image de cet objet.

On peut interpréter cette expérience en supposant que l'objet éclairé se comporte comme une "*source lumineuse*" et diffracte la lumière sans passer par F' .

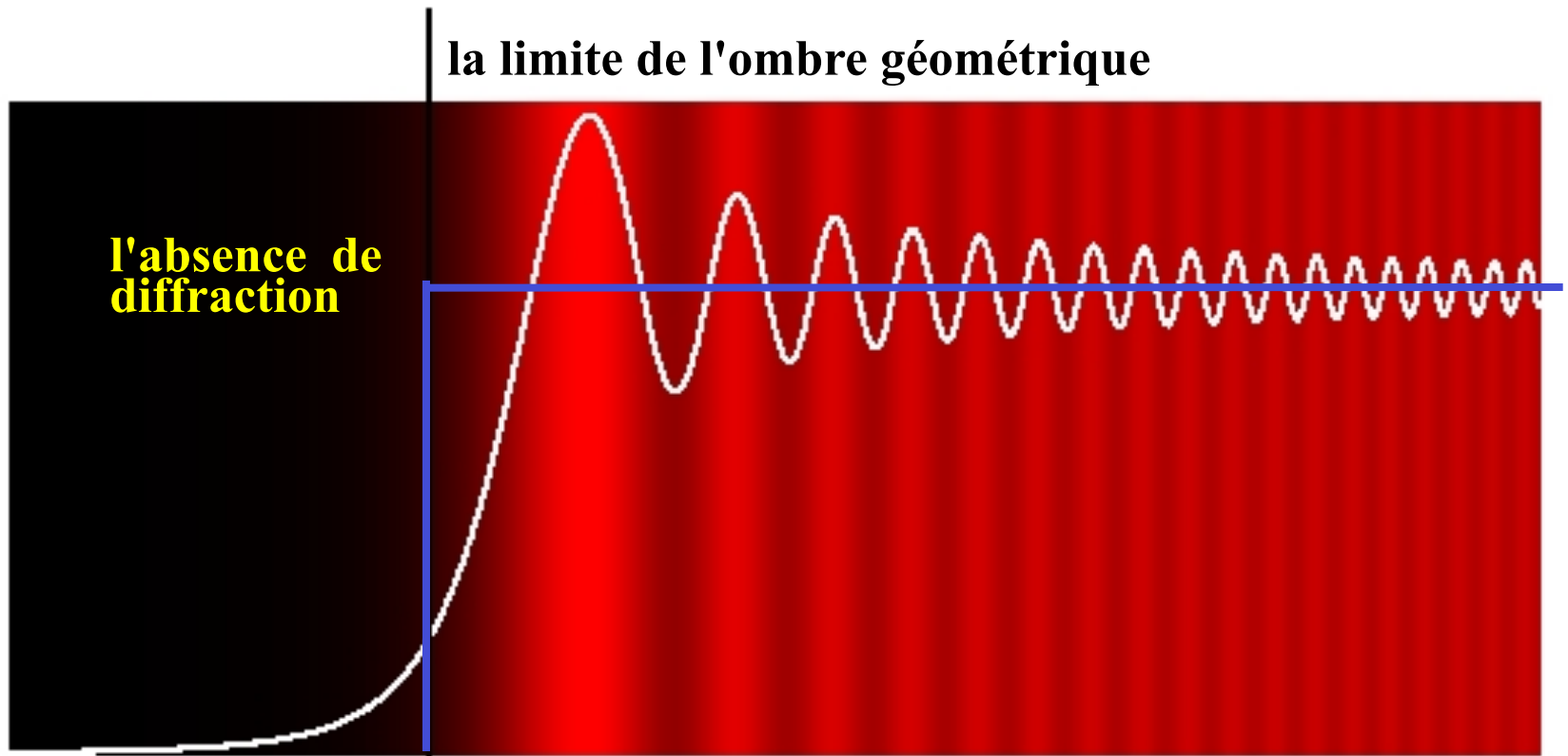
I.2 – Diffraction par le bord d'un écran

Un faisceau laser éclaire un écran. On interpose sur ce faisceau un écran opaque E_0 à bord rectiligne.



Expérimentalement, au lieu de passer de l'ombre à la pleine lumière, on observe autour de O des franges correspondant à la répartition d'intensité lumineuse indiqué sur la figure.

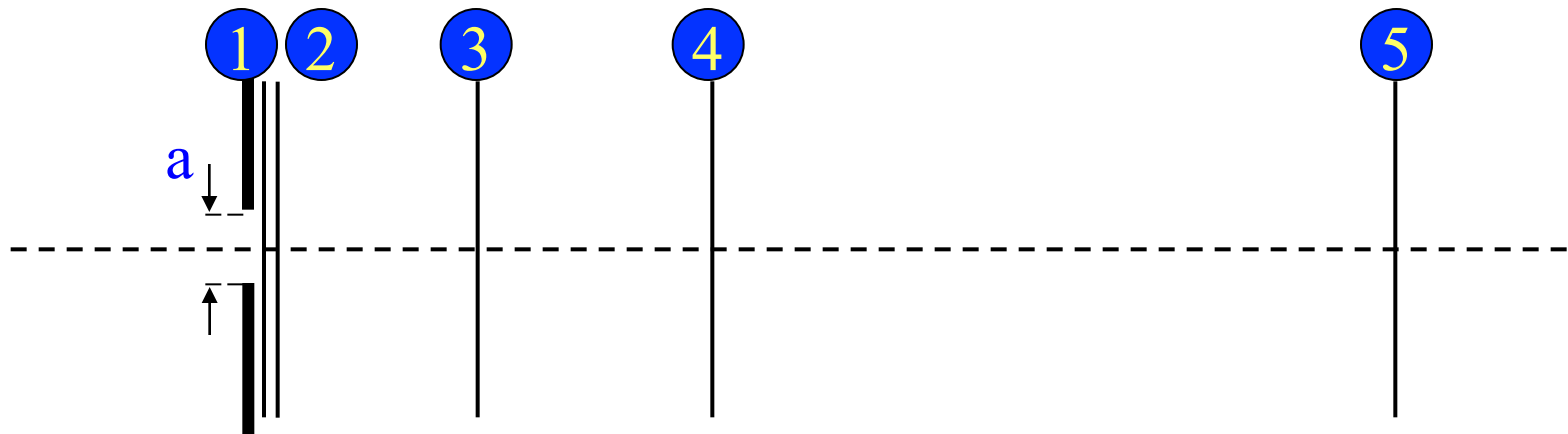
I – Mise en évidence de la diffraction



La courbe représente l'intensité de la lumière diffractée par un bord d'écran. La largeur de la première oscillation est de l'ordre de $\sqrt{\lambda D}$, et les autres oscillations sont plus rapides et moins marquées.

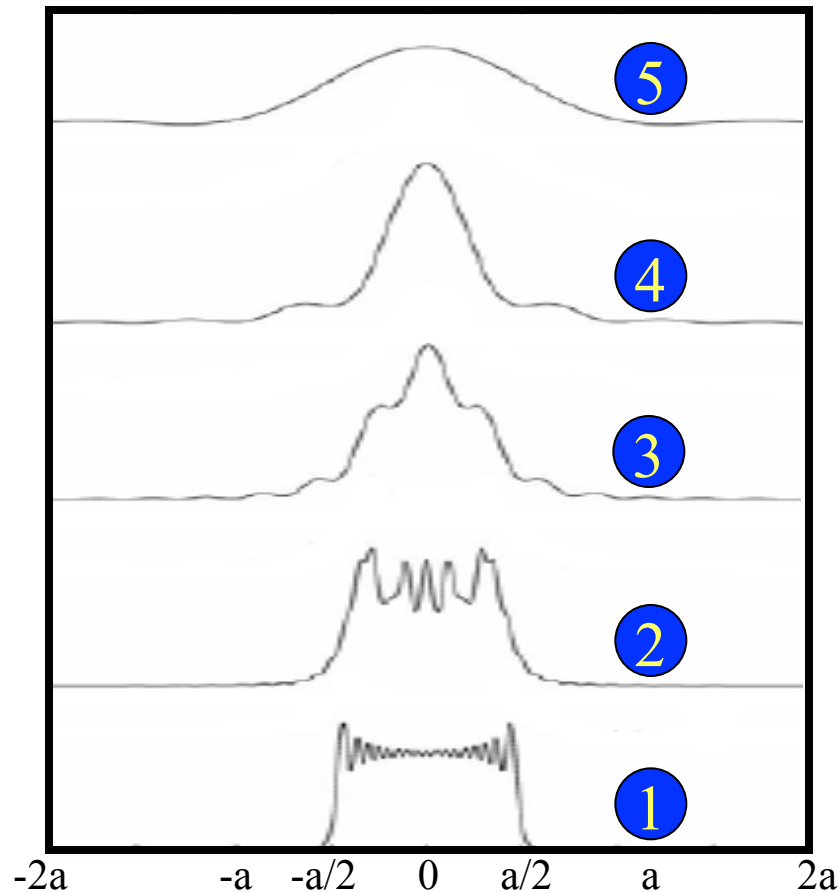
I.3 – Diffraction suivant l'emplacement

Considérons une fente de largeur a éclairé par une source ponctuelle monochromatique placée à l'infini. Après la fente, on observe la répartition de l'éclairement aux différents emplacements 1, 2, .., 5.



On observe juste après la fente l'image projetée de celle-ci avec des oscillations (franges) de période proche de λ . C'est la diffraction de *Fresnel*.

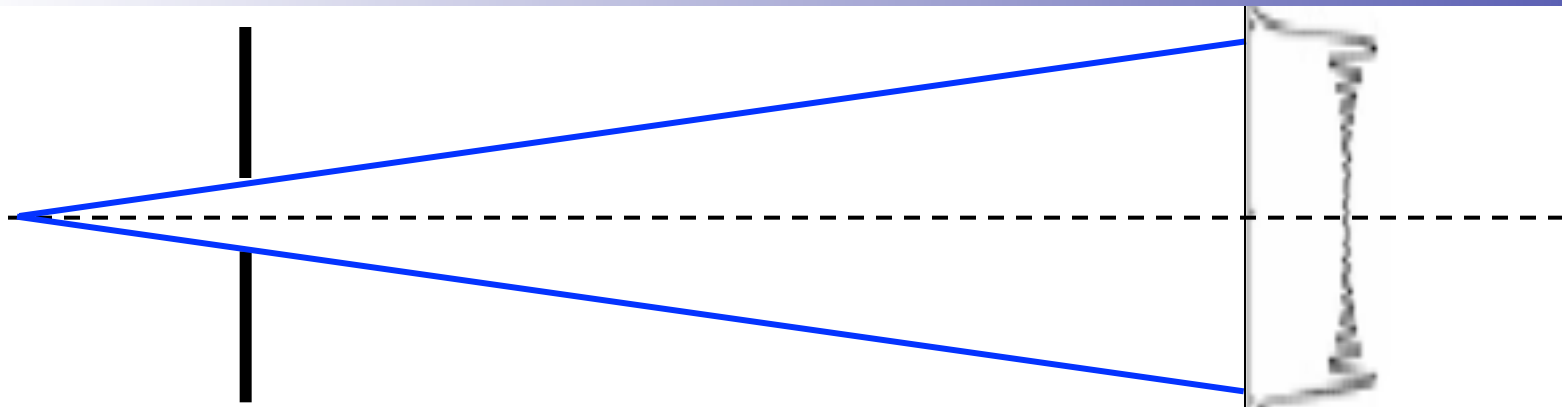
I – Mise en évidence de la diffraction



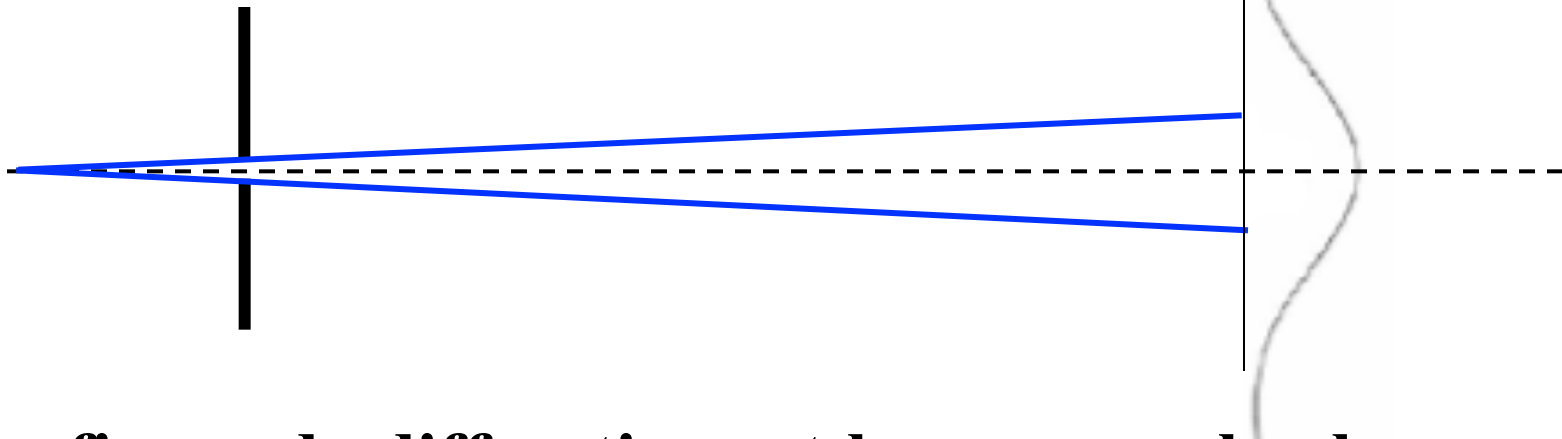
En s' éloignant, la taille des franges croît.

En ⑤, la figure de diffraction ne ressemble plus à la fente, nous sommes dans la situation de *Fraunhofer*.

I – Mise en évidence de la diffraction



La figure de diffraction est incluse dans la tache géométrique \Rightarrow théorie de *Fresnel*.



La figure de diffraction est beaucoup plus large que la tache géométrique \Rightarrow diffraction de *Fraunhofer*.

I.4 – Problématique

Pratiquement, le problème de la diffraction est le suivant : Comment déterminer la répartition d'intensité lumineuse après traversée de la pupille, connaissant la répartition d'amplitude au niveau de la pupille et la forme de celle-ci ?

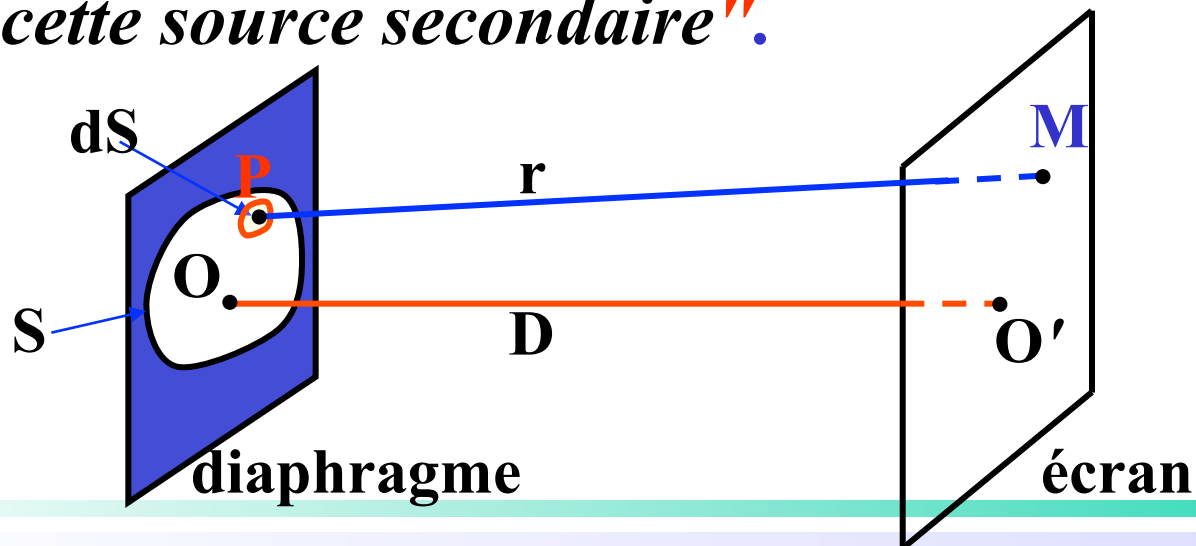
En principe il faut résoudre les équations de *Maxwell* avec les conditions aux limites pour différentes polarisations.

En fait ce problème est quasi-insoluble analytiquement et souvent difficile numériquement. Pour simplifier le problème on utilise un champ scalaire avec des conditions aux limites triviales.

II – Principe de Huyghens-Fresnel

Fresnel a précisé le principe de *Huyghens* de la manière suivante :

"L'amplitude de la vibration lumineuse en un point M est la somme des amplitudes produites par toutes les sources secondaires. L'état vibratoire d'une source secondaire est proportionnel à celui de l'onde incidente et à l'élément de surface dS entourant le point P où est située cette source secondaire".



Soit $A(P)$ l'amplitude de l'onde au point P de l'ouverture de surface S :

$$A(P) = A_p \exp(i\omega t)$$

D'après le principe de *Huyghens-Fresnel*, le point P émet une ondelette sphérique.

L'amplitude au point M de l'écran est de la forme :

$$dA(M) = C \cdot A(P) \frac{\exp(ikr)}{r} dS$$

C est un facteur de proportionnalité.

Pour tout les points P de l'ouverture, au point M , nous devons effectuer la somme de toutes les contributions élémentaires :

$$A(M) = \iint_S C \cdot A(P) \frac{\exp(ikr)}{r} dS$$

Additionner ces amplitudes est une conséquence de la linéarité des équations de *Maxwell*. On dit que les vibrations interfèrent pour donner en **M** une vibration résultante.

On montre que le facteur **C** est quasiment une constante et que la variable **r** du dénominateur peut être confondue avec **D**.

La formulation pratique du principe de *Huyghens-Fresnel* est donc :

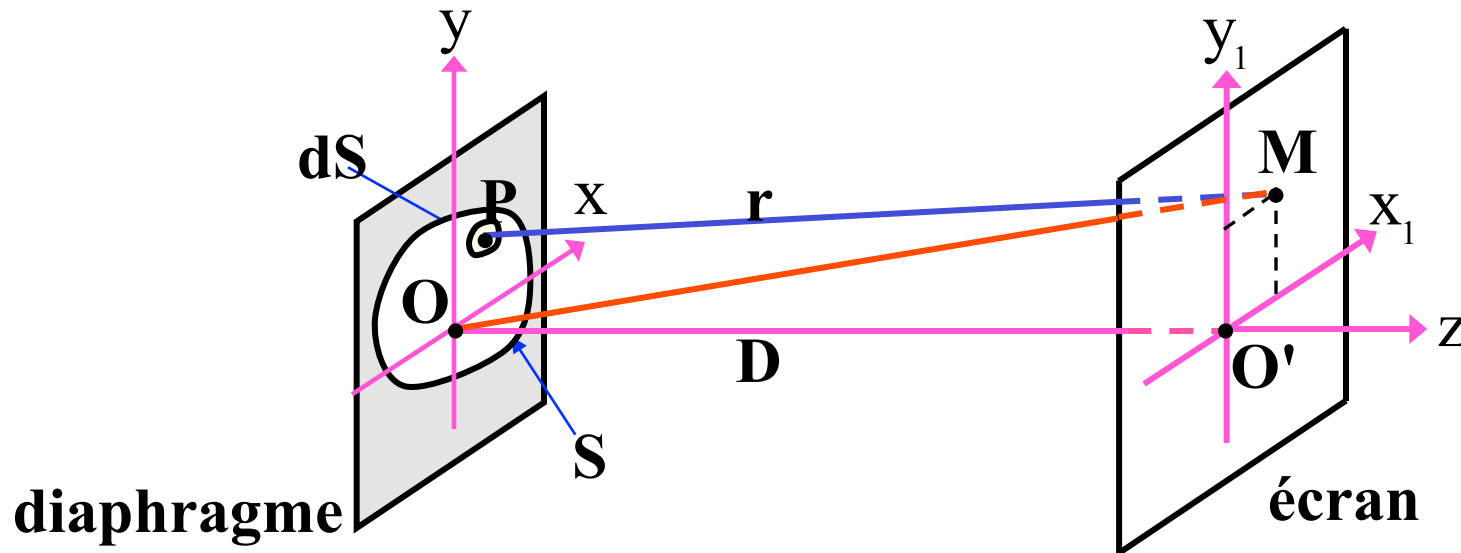
$$A(\mathbf{M}) = K \iint_S A(\mathbf{P}) \exp(ikr) dS$$

avec $K = \frac{C}{D} = \text{cte}$

III – Les approximations

III.1 – Expression de $A(M)$

Supposons que le diaphragme soit un plan.



Le point P , a pour coordonnées (x, y) .

Le point M , a pour coordonnées (x_1, y_1) .

On pose $\vec{R} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{\rho} = \overrightarrow{OP}$ et $\vec{r} = \overrightarrow{PM}$ donc $\vec{r} = \vec{R} - \vec{\rho}$

III – Les approximations

Par suite
$$\mathbf{r}^2 = \mathbf{R}^2 + \rho^2 - 2\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\rho}$$

Si on suppose que $\rho \ll R$ on peut écrire :

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} \sqrt{1 + \frac{\rho^2}{\mathbf{R}^2} - 2 \frac{\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\rho}}{\mathbf{R}^2}} \simeq \mathbf{R} + \frac{\rho^2}{2\mathbf{R}} - \frac{\vec{\mathbf{R}} \cdot \vec{\rho}}{\mathbf{R}}$$

En utilisant les coordonnées de \mathbf{R} et ρ , on déduit :

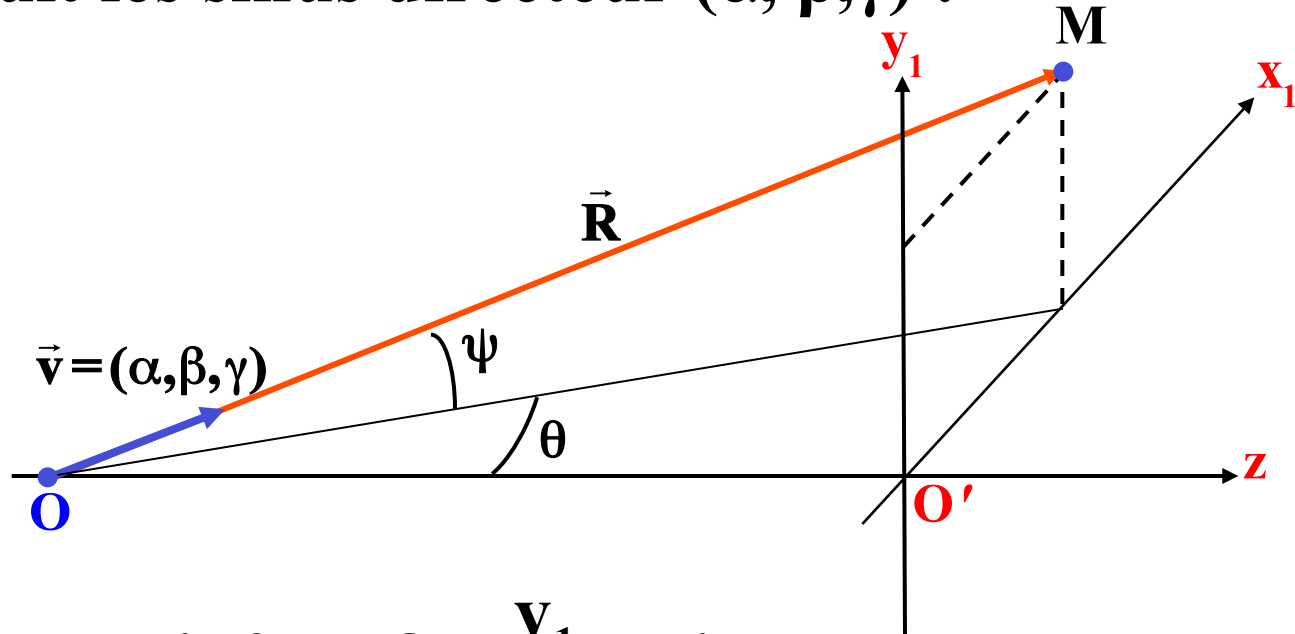
$$\mathbf{r} \simeq \mathbf{R} + \frac{x^2 + y^2}{2\mathbf{R}} - \frac{x_1 x + y_1 y}{\mathbf{R}}$$

L' amplitude au point \mathbf{M} s'écrit donc (1) :

$$\mathbf{A}(\mathbf{M}) = \mathbf{K} e^{ik\mathbf{R}} \iint_S \mathbf{A}(\mathbf{P}) \exp \left[\frac{-ik(x_1 x + y_1 y)}{\mathbf{R}} \right] \exp \left[\frac{ik(x^2 + y^2)}{2\mathbf{R}} \right] dS$$

III – Les approximations

On introduit les sinus directeur (α, β, γ) :



$$\alpha = \frac{x_1}{R} = \cos\psi \sin\theta \quad \beta = \frac{y_1}{R} = \sin\psi \quad \gamma = \cos\psi \cos\theta$$

L'expression précédente s'écrit (2) :

$$A(M) \approx K e^{ikR} \iint_S A(P) \exp[-ik(\alpha x + \beta y)] \exp\left[\frac{ik(x^2 + y^2)}{2R}\right] dS$$

III.2 – Approximation de Fresnel et Fraunhofer

L'expression (2) est l'approximation fondamentale de la diffraction dans l'approximation de *Fresnel*.

Dans certaines conditions on simplifie parfois cette expression en écrivant :

Lorsque $\frac{x^2 + y^2}{R} \gg (\alpha x + \beta y)$ c.à.d R petit.

$$A(M) \simeq K \cdot e^{ikR} \iint_s A(P) \exp \left[\frac{ik(x^2 + y^2)}{2R} \right] dS \quad (3)$$

Nous sommes dans le cas de la diffraction à distance finie ou *diffraction de Fresnel* (le calcul de (3) est généralement difficile).

III – Les approximations

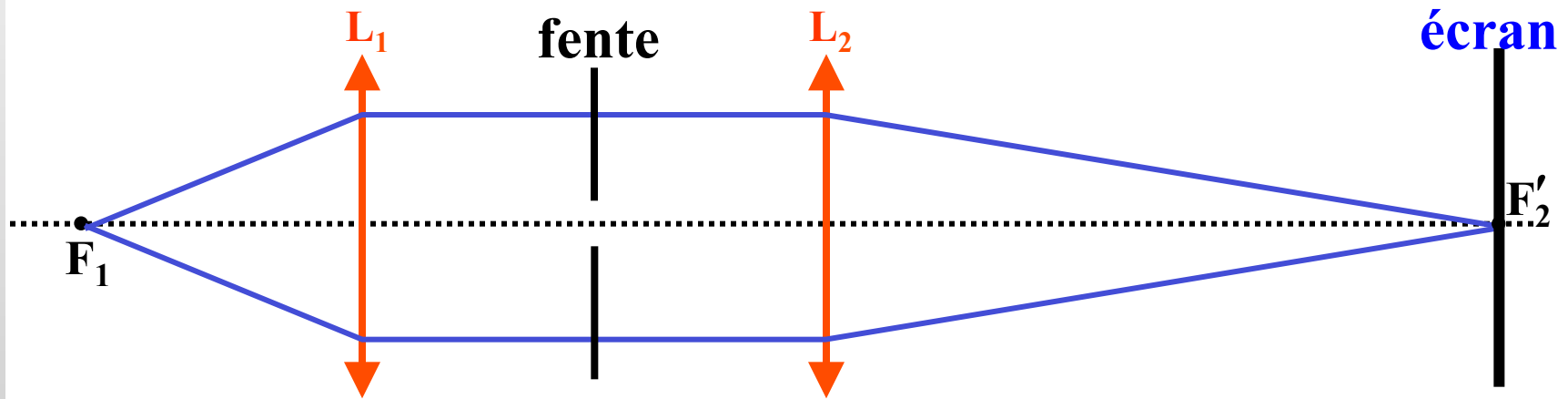
Lorsque $R \rightarrow \infty$ le terme quadratique devient négligeable devant le terme linéaire et l'expression (2) devient :

$$A(M) \simeq K \cdot e^{ikR} \iint_s A(P) \exp(-ik(\alpha x + \beta y)) dS$$

Nous sommes dans le cas de la diffraction à l'infini ou **diffraction de Fraunhofer**.

III – Les approximations

Dans la pratique, on réalise la diffraction à l'infini en se plaçant dans le plan focal F' d'une lentille convergente.



On place en F_1 , un objet ponctuel. L'ouverture de diffraction reçoit donc une onde plane. On observe le phénomène de diffraction à l'infini dans le plan focal image de la lentille L_2 .

III.3 – Transformation de Fourier

Considérant l'expression de la diffraction de *Franhauser*. L'amplitude sur le diaphragme s'écrit $A(x,y)$, alors que sur l'écran est $A(x_1,y_1)$.

Le terme de phase peut s'écrire :

$$ik(\alpha x + \beta y) = \frac{ik}{R}(x_1 x + y_1 y) = 2i\pi(ux + vy)$$

avec $u = \frac{\alpha}{\lambda} = \frac{x_1}{\lambda R}$ et $v = \frac{\beta}{\lambda} = \frac{y_1}{\lambda R}$ **fréquences spatiales**

L'amplitude diffractée prend la forme :

$$A(u, v) = \iint_S A(x, y) \exp(-2i\pi(ux + vy)) dx dy$$

Or, nous savons que $A(x,y) \neq 0$ si $(x,y) \in S$ et $A(x,y) = 0$ ailleurs.

III – Les approximations

Nous pouvons donc étendre le domaine d'intégration jusqu'à l'infini :

$$A(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(x, y) \exp(-2i\pi(ux + vy)) dx dy$$

Cette équation définit une opération mathématique appelée *transformation de Fourier* :

$$\hat{A}(u, v) = \iint A(x, y) \exp(-2i\pi(ux + vy)) dx dy$$

On peut dire qu'à un facteur multiplicatif près, la répartition d'amplitude à l'infini d'une onde diffractée est égale à la transformée de *Fourier* de la répartition d'amplitude dans le plan de l'objet diffractant.

IV – Les exemples

On se limite à la diffraction de *Fraunhofer*.

IV.1 – Diffraction par une fente

IV.1.1 – Expression de l'amplitude diffractée

Considérant une fente fine rectangulaire de largeur a et de longueur b ($a \ll b$), éclairée uniformément par un faisceau monochromatique parallèle à l'axe oz .

Sachant que $A(P) = A(x,y) = \text{Cte}$ (éclairage uniforme), la relation suivante :

$$A(M) = \iint_S A(P) \exp(-ik(\alpha x + \beta y)) dS$$

$$\begin{aligned} \text{s'écrit } A(\alpha, \beta) &= \text{Cte} \int_{-a/2}^{+a/2} \int_{-b/2}^{+b/2} \exp(-ik(\alpha x + \beta y)) dx dy \\ &= \text{Cte} \int_{-a/2}^{+a/2} \exp(-ik\alpha x) dx \int_{-b/2}^{+b/2} \exp(-ik\beta y) dy \end{aligned}$$

IV – Les exemples

En utilisant la relation $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

on obtient :

$$A(\alpha, \beta) = C.ab \frac{\sin \left[\frac{k\alpha a}{2} \right]}{\frac{k\alpha a}{2}} \frac{\sin \left[\frac{k\beta b}{2} \right]}{\frac{k\beta b}{2}}$$

C = constante

Ou encore

$$A(\alpha, \beta) = C.ab \frac{\sin \left[\frac{\pi\alpha a}{\lambda} \right]}{\frac{\pi\alpha a}{\lambda}} \frac{\sin \left[\frac{\pi\beta b}{\lambda} \right]}{\frac{\pi\beta b}{\lambda}}$$

puisque $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

Cette expression est de a forme :

$$A = C. \frac{\sin U}{U} \frac{\sin V}{V}$$

IV – Les exemples

IV.1.2 – Etude de la fonction sinc(U)

1/ $\frac{\sin U}{U} = 0$ pour $U = k\pi$

2/ $\frac{\sin U}{U} = 1$ pour $U = 0$

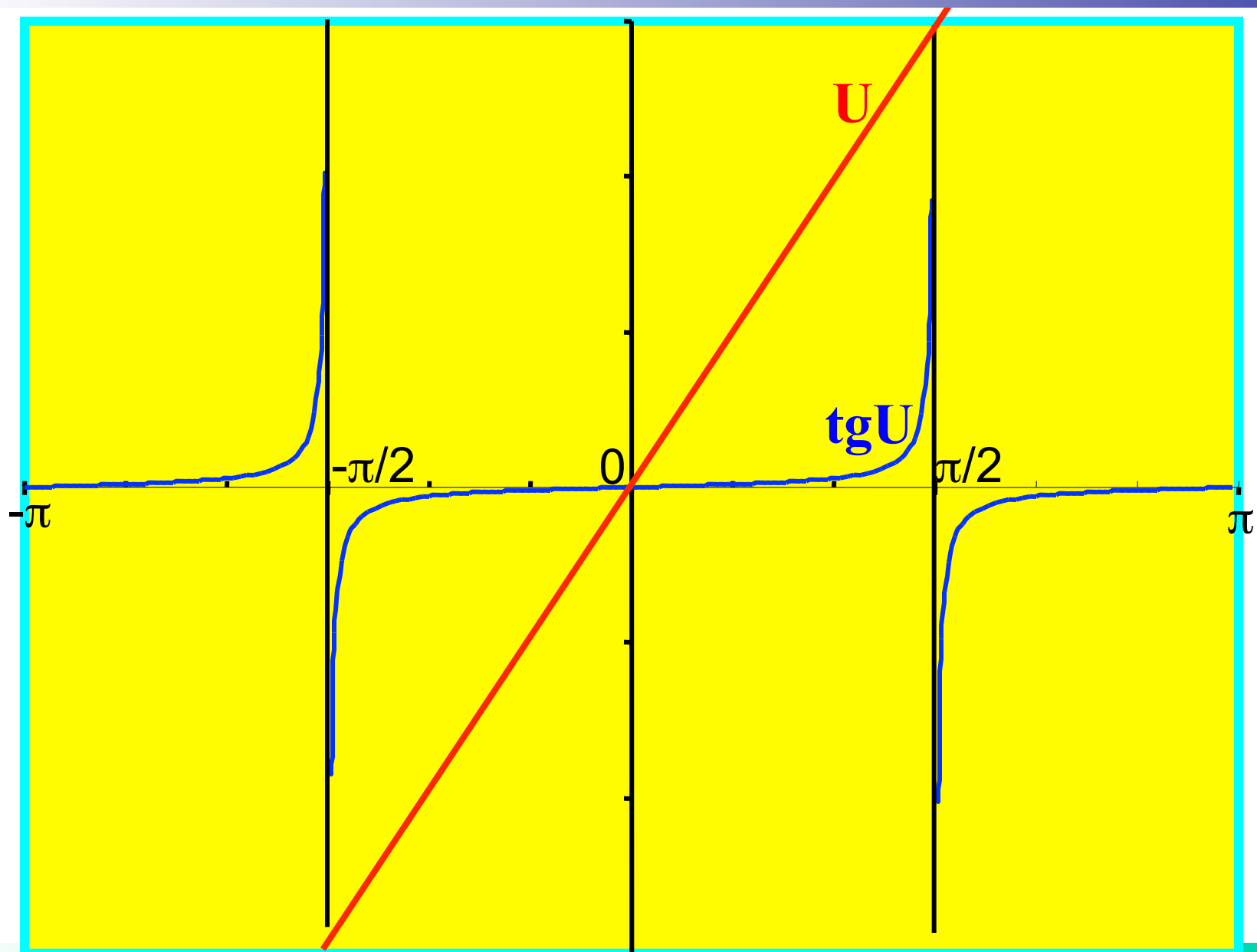
3/ $\frac{\sin U}{U}$ est maximum ($U \neq 0$) pour $U = \tan U$

soit $U = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$

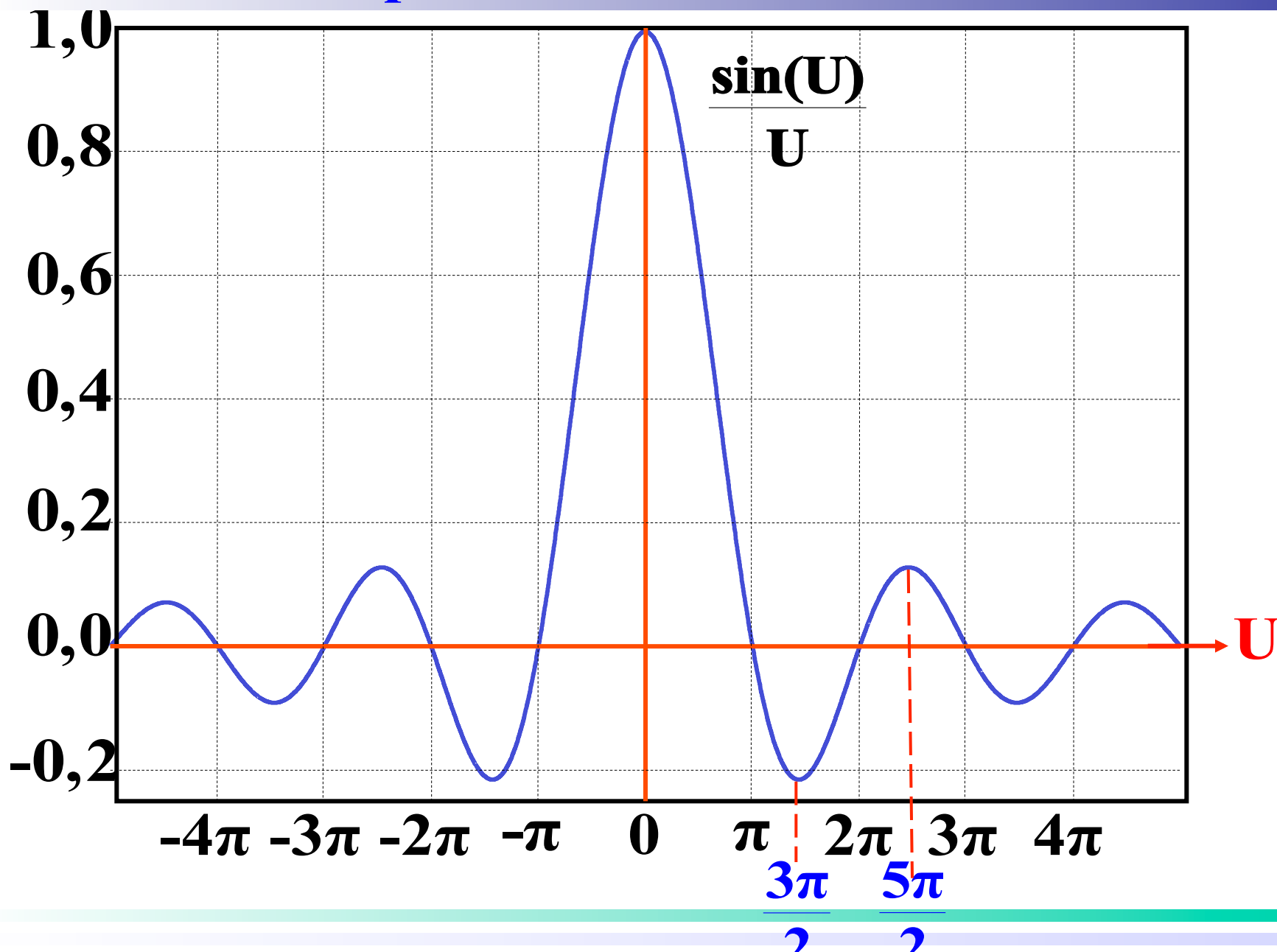
et a pour valeur :

$$\left(\frac{\sin U}{U}\right)_{\max} = \frac{2(-1)^n}{(2n + 1)\pi} \quad (\text{avec } n \neq 0 \text{ et } -1)$$

IV – Les exemples



IV – Les exemples



IV.1.3 – Répartition de l'intensité dans le plan focale d'une lentille

Sachant que $\alpha = \cos\psi\sin\theta$ et $\beta = \sin\psi$ on peut écrire :

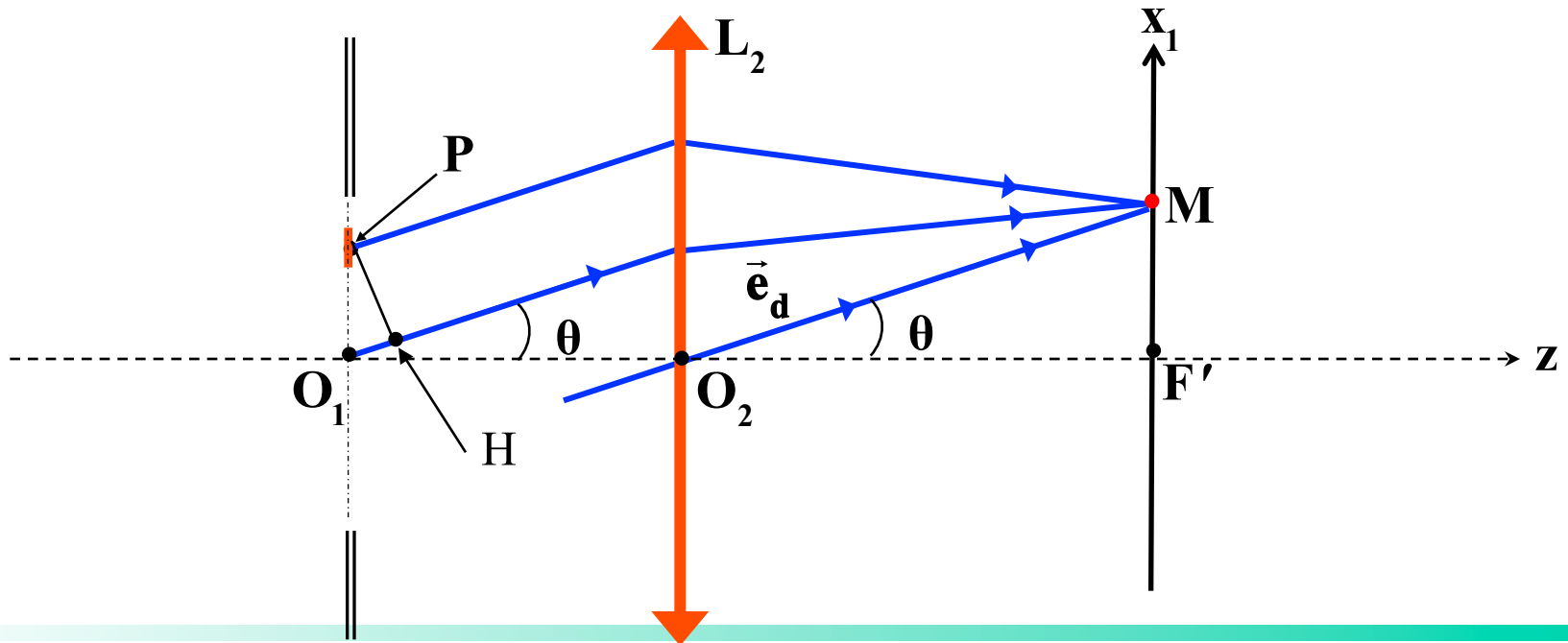
$$A(\alpha, \beta) \approx A(\psi, \theta) = C \cdot ab \frac{\sin \left[\frac{\pi a \cos(\psi) \sin(\theta)}{\lambda} \right]}{\frac{\pi a \cos(\psi) \sin(\theta)}{\lambda}} \frac{\sin \left[\frac{\pi b \sin(\psi)}{\lambda} \right]}{\frac{\pi b \sin(\psi)}{\lambda}}$$

Si nous supposons que $\psi \approx 0$, la situation devient unidimensionnelle et on obtient : $A(\psi, \theta) \rightarrow A(\theta)$ avec :

$$A(\theta) = A_0 \frac{\sin \left[\frac{\pi a \sin(\theta)}{\lambda} \right]}{\frac{\pi a \sin(\theta)}{\lambda}}$$

où A_0 est une constante proportionnelle à la surface de la fente $S = ab$. Cette expression représente l'amplitude de l'onde diffracté par une fente fine de largeur a suivant θ .

Si nous nous plaçons dans le plan focal de la lentille de distance focale , il nous faut remplacer la variable θ par la variable x_1 . Un calcul préalable est nécessaire :



La point M dans le plan focal a pour abscisse :

$$\overline{F'M} = x_1 = f \cdot \tan(\theta)$$

Les angles de diffraction étant toujours "petits" (hypothèse initiales) nous pouvons écrire :

$$\sin(\theta) \sim \tan(\theta) = \frac{x_1}{f}$$

Par suite la répartition de l'amplitude à l'infini (plan focal) $A(x_1)$ et la répartition d'intensité $I(x_1) = AA^*$ s'écrivent :

$$A(x_1) = A_0 \frac{\sin(p)}{p} \quad \text{avec} \quad p = \frac{\pi a x_1}{\lambda f}$$

$$I(x_1) = I_0 \left[\frac{\sin(p)}{p} \right]^2$$

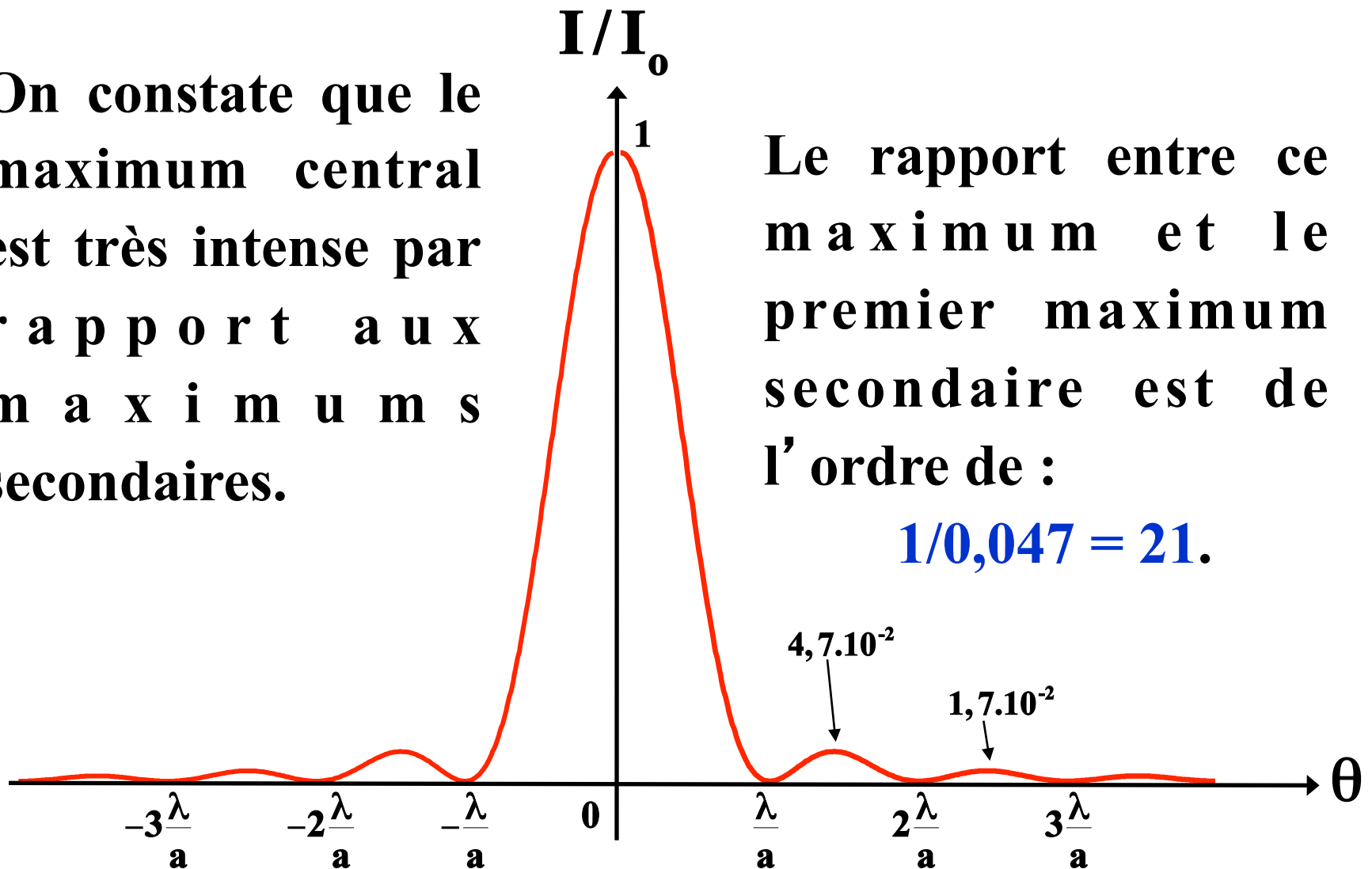
$$\text{avec} \quad I_0 = A_0 A_0^*$$

IV – Les exemples

On constate que le maximum central est très intense par rapport aux maximums secondaires.

Le rapport entre ce maximum et le premier maximum secondaire est de l'ordre de :

$$1/0,047 = 21.$$



IV – Les exemples

IV.1.4 – Cas d' une ouverture rectangulaire

A partir de l' expression (5) Il est facile d' obtenir l' expression de l' intensité diffracté à l' infini par une ouverture rectangulaire :

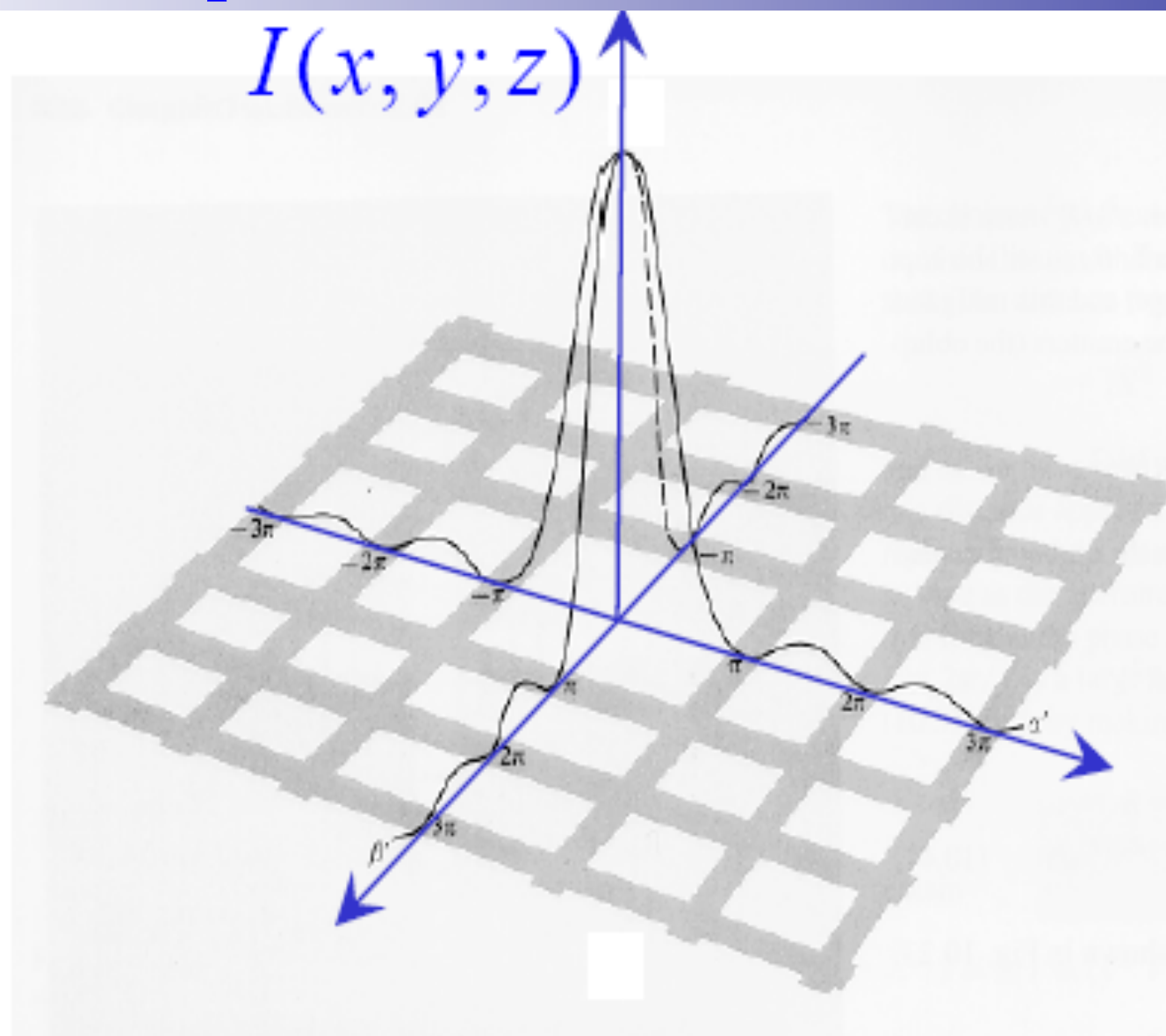
$$I(x_1, y_1) = I_0 \left[\frac{\sin p}{p} \right]^2 \left[\frac{\sin q}{q} \right]^2$$

avec $p = \frac{\pi a x_1}{\lambda f}$ $q = \frac{\pi b y_1}{\lambda f}$ et $I_0 = C^2 \cdot a^2 b^2$

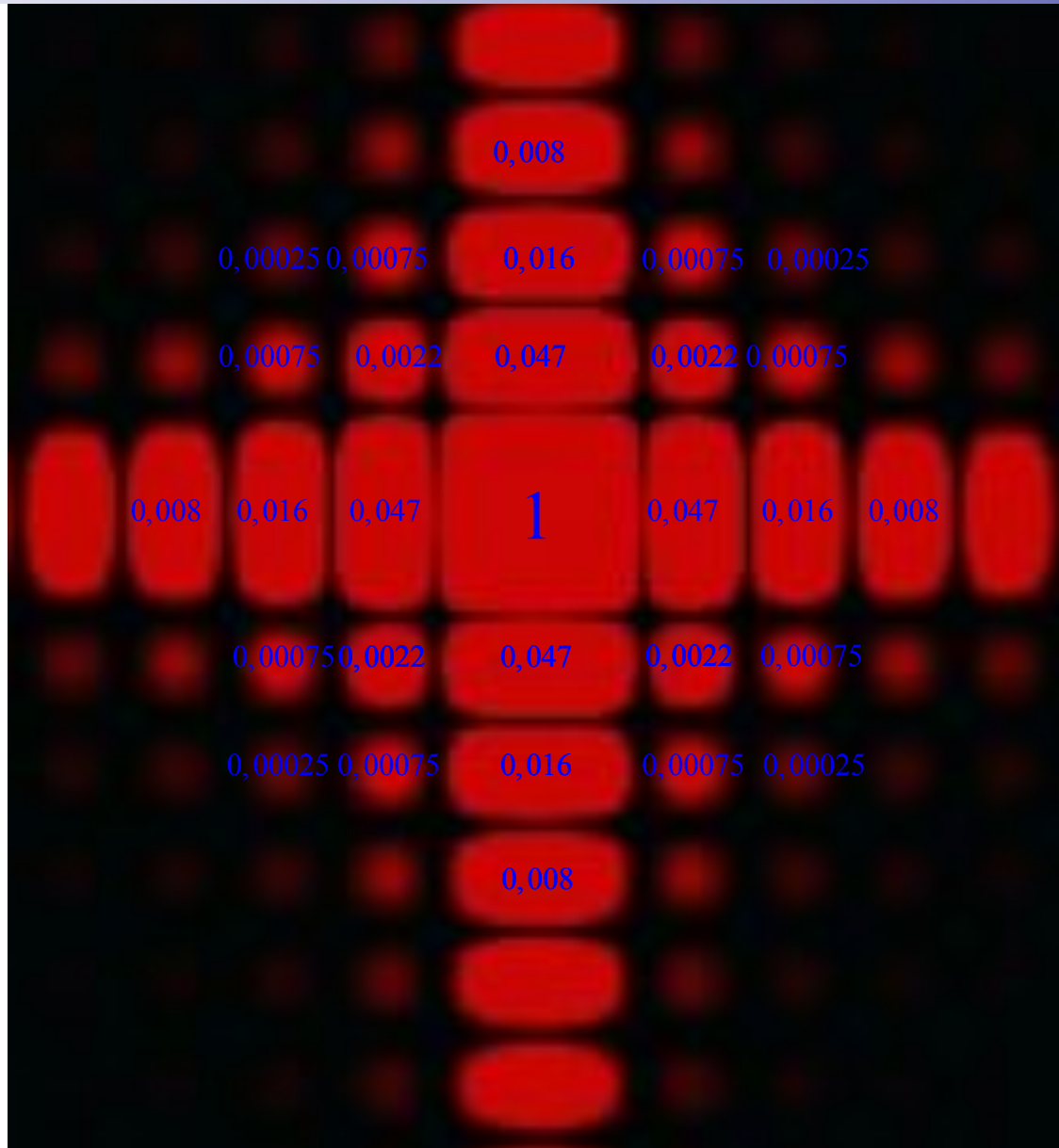
La répartition a la forme d' une croix.

La tache centrale est plus large dans la direction où la fente est plus étroite et inversement.

IV – Les exemples



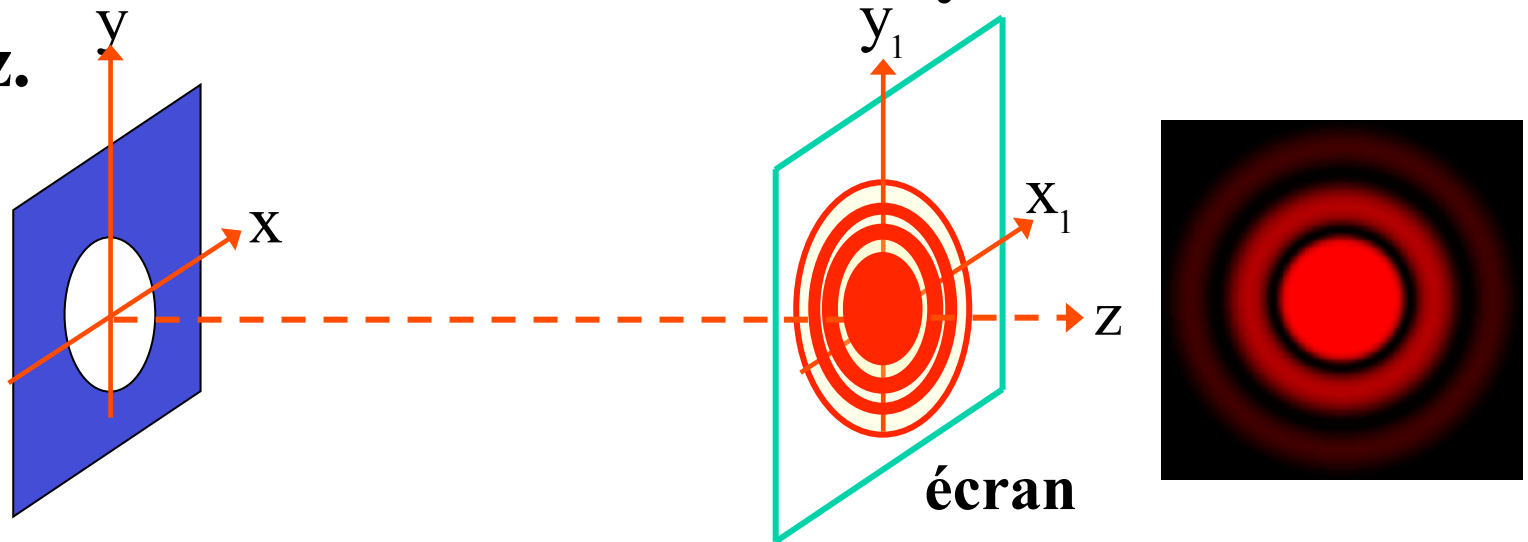
IV – Les exemples



IV.2 – Diffraction par une ouverture circulaire

Les diaphragmes circulaires sont très utilisés en optique. La diffraction par une ouverture circulaire est donc très importante.

Soit une ouverture circulaire de rayon d centré sur l'axe Oz .



La symétrie de révolution implique que la figure de diffraction aura cette même symétrie. On observera des *anneaux* alternativement lumineux et sombres.

On effectue le changement de variables suivant :

$$x = \rho \cos(\varphi) \text{ et } y = \rho \sin(\varphi) \Rightarrow dS = dx dy = \rho d\rho d\varphi$$

Puisqu'il y a une symétrie de révolution, on peut se placer dans un plan contenant l'axe optique Oz (exemple xOz).

L'amplitude diffractée à l'infini s'écrit :

$$\begin{aligned} A(\alpha, \beta) &= C \iint_S \exp(-ik(\alpha x + \beta y)) dS \\ &= C \int_0^d \int_0^{2\pi} \exp(-ik \sin(\theta) \rho \cos(\varphi)) \rho d\rho d\varphi \end{aligned}$$

Cette expression ne s'intègre pas au moyen des fonctions élémentaires mais nécessite l'introduction des fonctions de *Bessel*.

IV – Les exemples

L' intensité s' exprime alors :

$$I = I_0 \left[\frac{2J_1(m)}{m} \right]^2$$

Où $J_1(m)$ est une fonction de *Bessel* de premier ordre,

$$\text{et } m = \frac{2\pi d \sin\theta}{\lambda}$$

Remarque

On peut aussi aborder l'intégration par des développements en série. En posant $x = \pi d \cdot \sin(\theta) / \lambda$ et en intégrant l'exponentielle en fonction de x et en intégrant terme à terme. Ce qui permet de faire des calculs numériques.

IV – Les exemples

La tache centrale porte souvent le nom de *tache d'Airy*, son importance est grande dans la théorie de formation des images et c'est en elle que se trouve concentrée "presque toute la lumière".

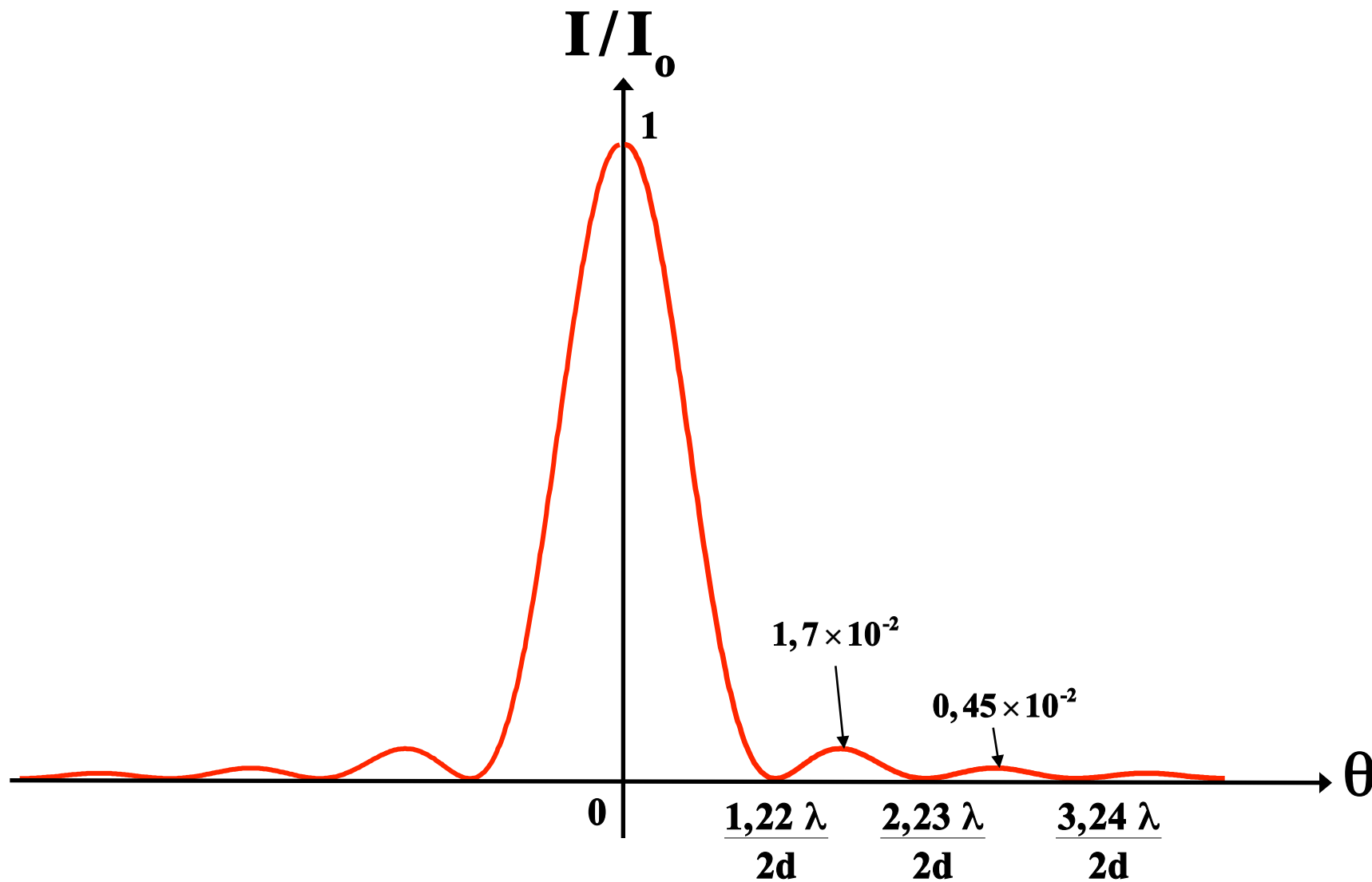
On retiendra que les minimums nuls ne sont pas équidistants.

Le premier minimum nul s'obtient pour $m = 3,832$ c.à.d pour :

$$\theta = \frac{1,22\lambda}{2d}$$

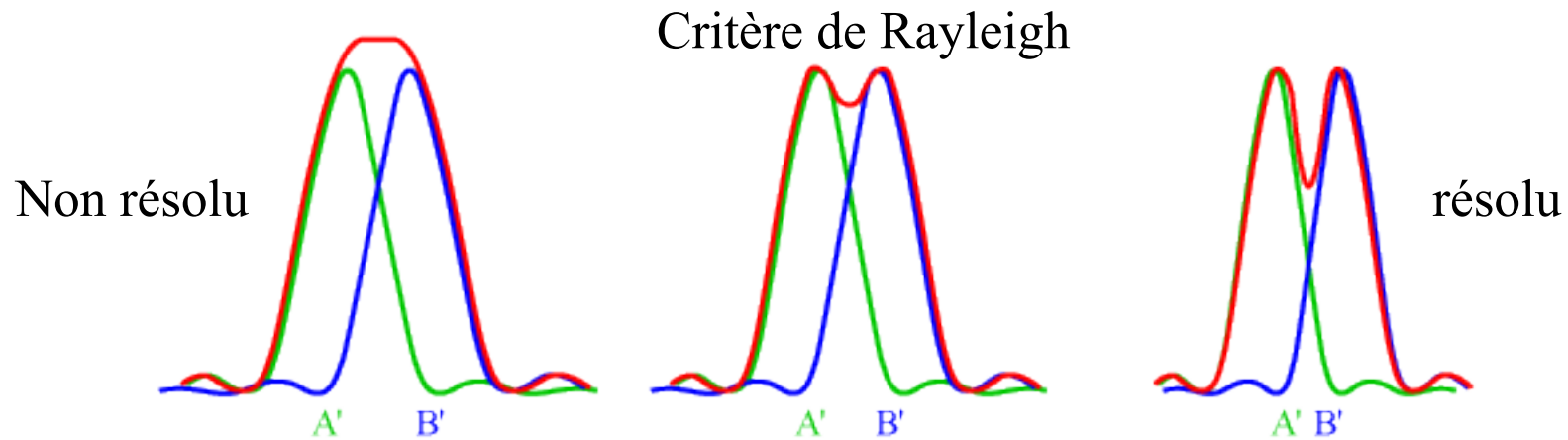
Le premier anneau lumineux a une intensité relative de $1,75 \cdot 10^{-2}$.

IV – Les exemples



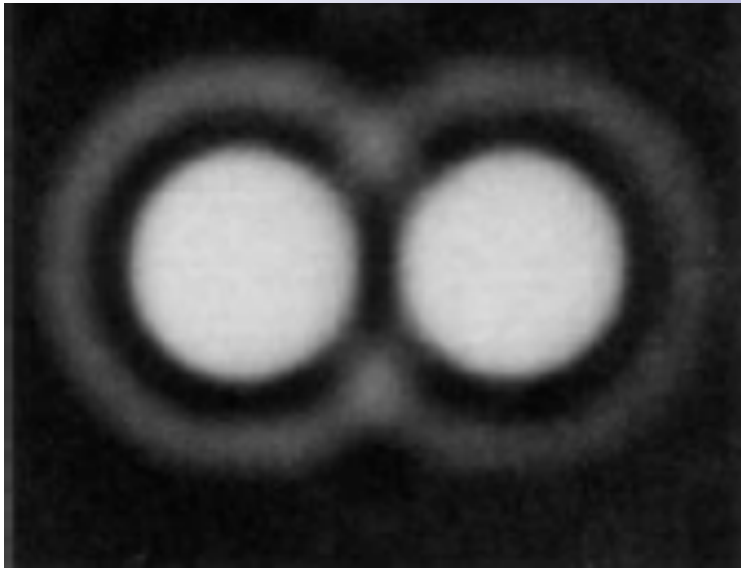
Ce phénomène est responsable de la limitation du *pouvoir séparateur* des instruments d'optique.

Selon le critère de Lord *Rayleigh*, deux points sont séparés par l'objectif lorsque le centre de la figure de diffraction du premier se trouve sur le premier anneau sombre de l'image de diffraction de l'autre.

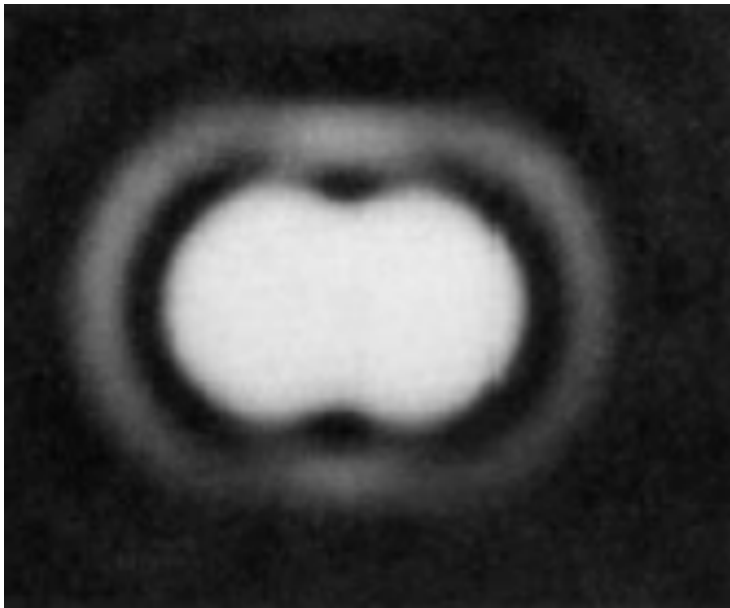


Remarque : Ce critère n'est toutefois rigoureux que si les sources sont incohérentes ; si elles sont cohérentes, il faut tenir compte des interférences.

IV – Les exemples



Cercles d' Airy tangents



Tout juste résolus (Rayleigh)

IV.3 – Relation entre l'objet diffractant et la figure de diffraction

Nous prenons comme modèle l'objet diffractant, la fente rectangulaire éclairée par un faisceau monochromatique parallèle à l'axe optique.

L'amplitude diffractée s'écrit :

$$A(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(x, y) \exp(-ik(\alpha x + \beta y)) dx dy$$

IV.3.1 – Dilatation

Supposons que l'on effectue des affinités de rapport m suivant Ox et n suivant Oy . L'amplitude s'écrit :

$$A(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(mx, ny) \exp(-ik(\alpha x + \beta y)) dx dy$$

IV – Les exemples

Si on effectue le changement de variables suivant :

$x' = mx$ et $y' = ny$ on obtient :

$$\begin{aligned} A(\alpha, \beta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(x', y') \exp \left[-ik \left(\alpha \frac{x'}{m} + \beta \frac{y'}{n} \right) \right] d \left(\frac{x'}{m} \right) d \left(\frac{y'}{n} \right) \\ &= \frac{1}{mn} A \left(\frac{\alpha}{m}, \frac{\beta}{n} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, toute dilatation de l'ouverture diffractante dans une direction, se traduit par la contraction de la figure de diffraction suivant la même direction et inversement.

IV.3.2 – Translation

Supposant que l'on translate l'ouverture diffractante :

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{x}_0 \quad \text{et} \quad \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}' = \mathbf{y} + \mathbf{y}_0$$

$$\begin{aligned} A'(\alpha, \beta) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\mathbf{x}', \mathbf{y}') e^{-ik(\alpha(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0) + \beta(\mathbf{y}' - \mathbf{y}_0))} d\mathbf{x}' d\mathbf{y}' \\ &= e^{ik(\alpha \mathbf{x}_0 + \beta \mathbf{y}_0)} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\mathbf{x}', \mathbf{y}') e^{-ik(\alpha \mathbf{x}' + \beta \mathbf{y}')} d\mathbf{x}' d\mathbf{y}' \end{aligned}$$

$$A'(\alpha, \beta) = e^{ik(\alpha \mathbf{x}_0 + \beta \mathbf{y}_0)} A(\alpha, \beta)$$

L'amplitude est multipliée par un facteur de translation mais l'éclairement de l'écran est inchangé.

$$I'(\alpha, \beta) = A' A'^* = A A^* = I(\alpha, \beta)$$

La figure de diffraction reste donc immobile sur l'écran lorsqu'on translate l'objet diffractant.

IV – Les exemples

IV.3.3 – Inclinaison du faisceau incident

Lorsque la fente rectangulaire est éclairée par un faisceau parallèle monochromatique incliné par rapport à l'axe optique.

Soient α_0 et β_0 les cosinus directeurs de cette direction.

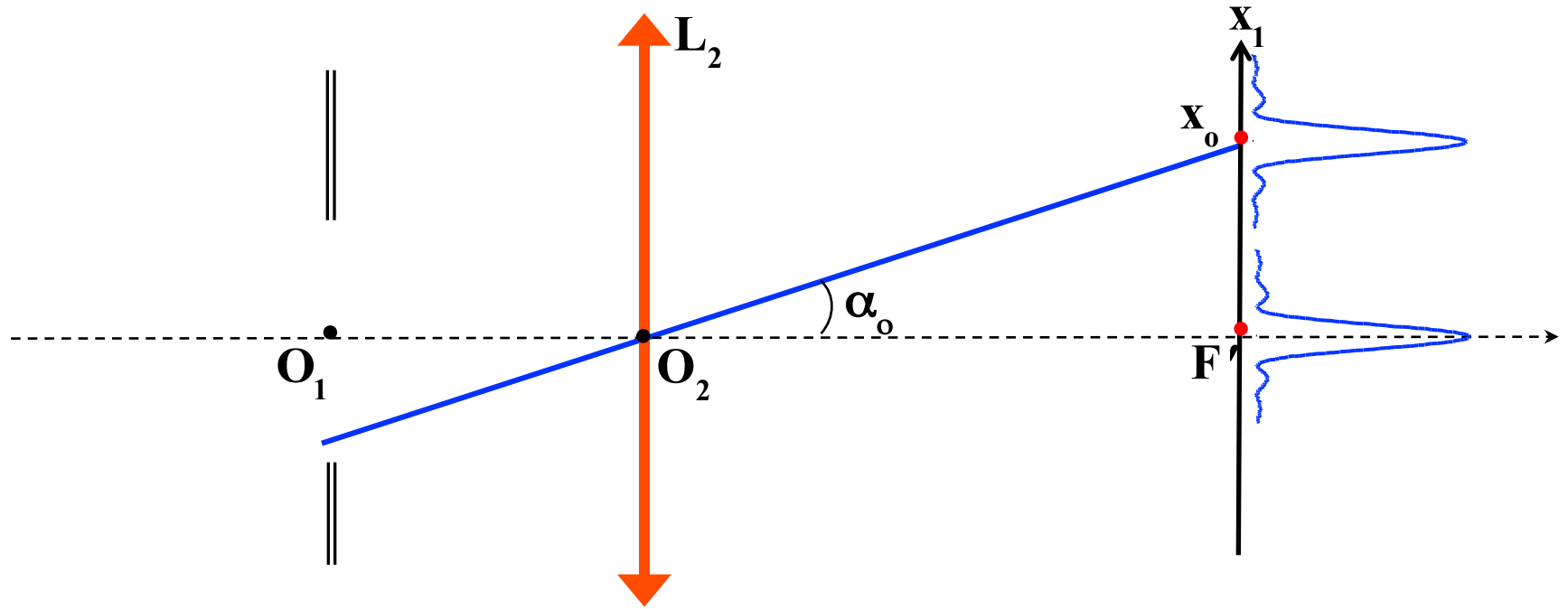
On montre facilement que $(\alpha x + \beta y)$ doit être remplacé par $((\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y)$ et donc $A(\alpha, \beta)$ devient :

$$A(\alpha - \alpha_0, \beta - \beta_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(x, y) e^{-ik[(\alpha - \alpha_0)x + (\beta - \beta_0)y]} dx dy$$

La figure de diffraction est décalée, elle a pour centre :

$$x_0 = \alpha_0 f \quad \text{et} \quad y_0 = \beta_0 f$$

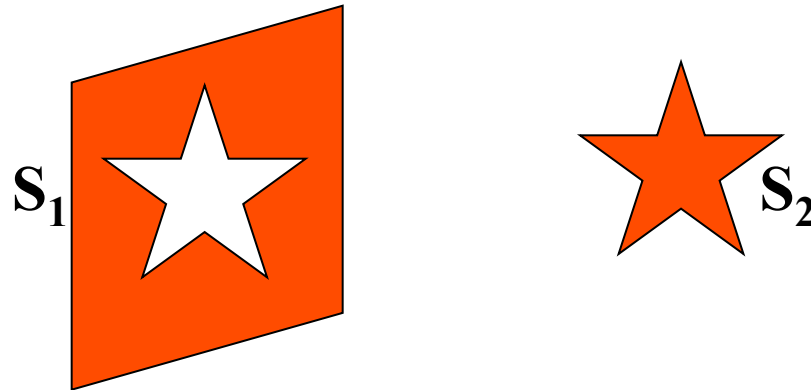
IV – Les exemples



IV – Les exemples

IV.4 – Les écrans complémentaires

Considérons deux ouvertures complémentaires de surface S_1 et S_2 .



Considérons l'une des deux ouvertures diffractantes et un écran placé dans le plan focal image d'une lentille convergente parfaite.

L'ouverture diffractante est uniformément éclairée.

IV – Les exemples

M en dehors du foyer objet est nulle :

$$I = AA^* = 0 \quad \text{donc } A = 0$$

Appliquons le principe de *Huyghens-Fresnel* à la surface S :

$$A = \iint_S dA = \iint_{S_1} dA + \iint_{S_2} dA = A_1 + A_2 = 0$$

$$\Rightarrow A_1 = -A_2 \quad \text{et par suite } \boxed{I_1 = I_2}$$

Ce résultat constitue le théorème de *Babinet* :

En dehors de l'image géométrique, les figures de diffraction données par deux écrans complémentaires sont identiques.