Chapitre VI

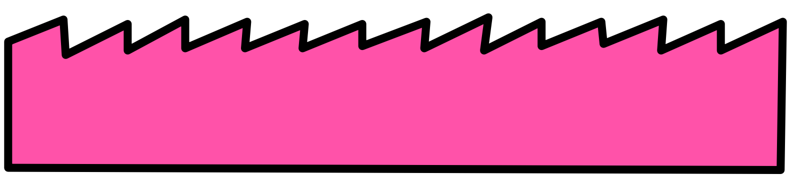
Réseaux

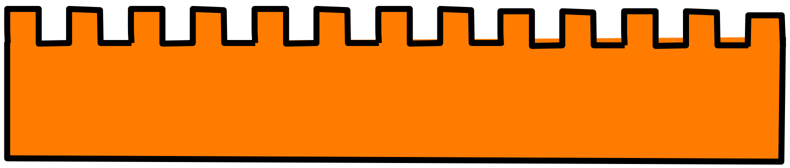
H. EL RHALEB
Université Mohammed V, Rabat, Agdal
Faculté des Sciences,
Département de Physique,
Laboratoire de Physique Théorique
Equipe Photonique
elrhaleb@fsr.ac.ma

L P T

Filière SMP, année 2014-2015

Un réseau de est un dispositif composé d'une série de fentes parallèles (réseau en transmission), ou de rayures réfléchissantes (réseau en réflexion). Ces traits sont espacés de manière régulière, l'espacement est appelé le "*pas*" du réseau.

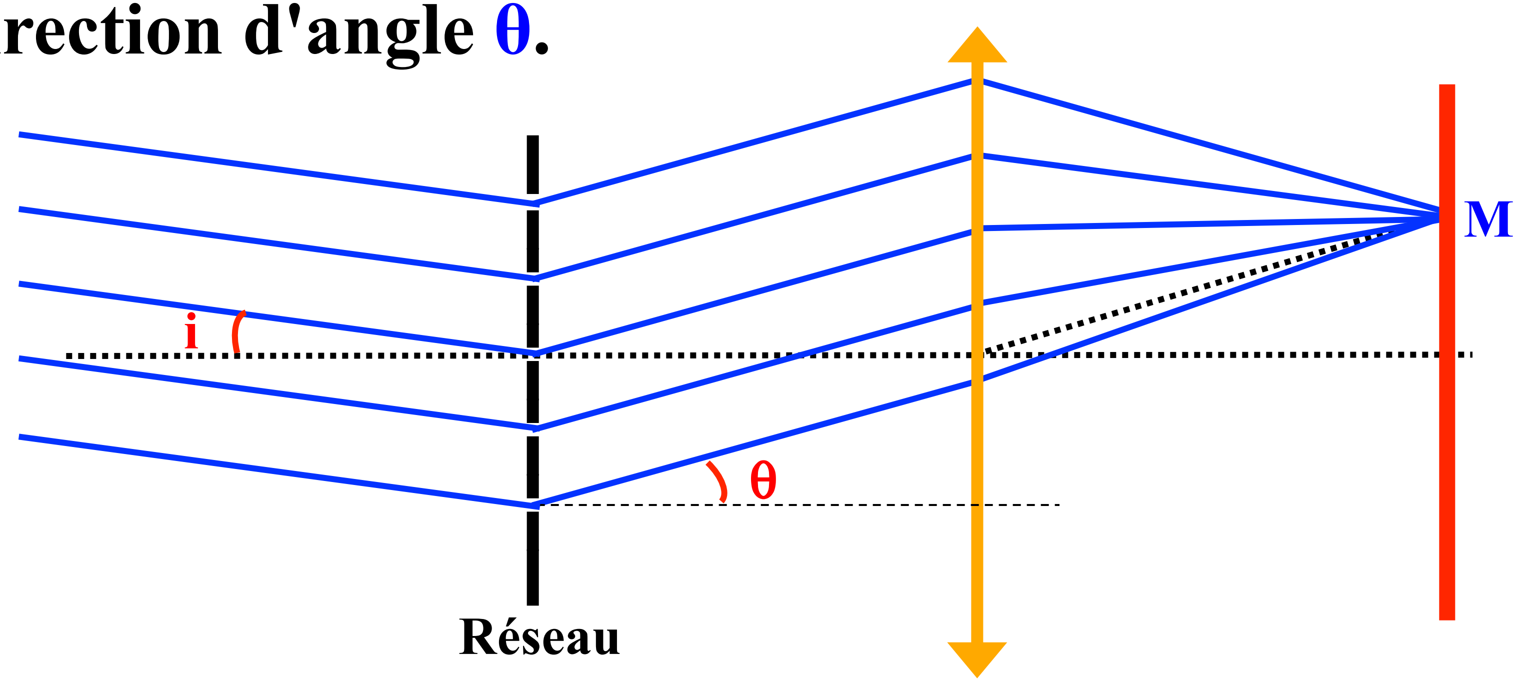




I - La théorie élémentaire du réseau

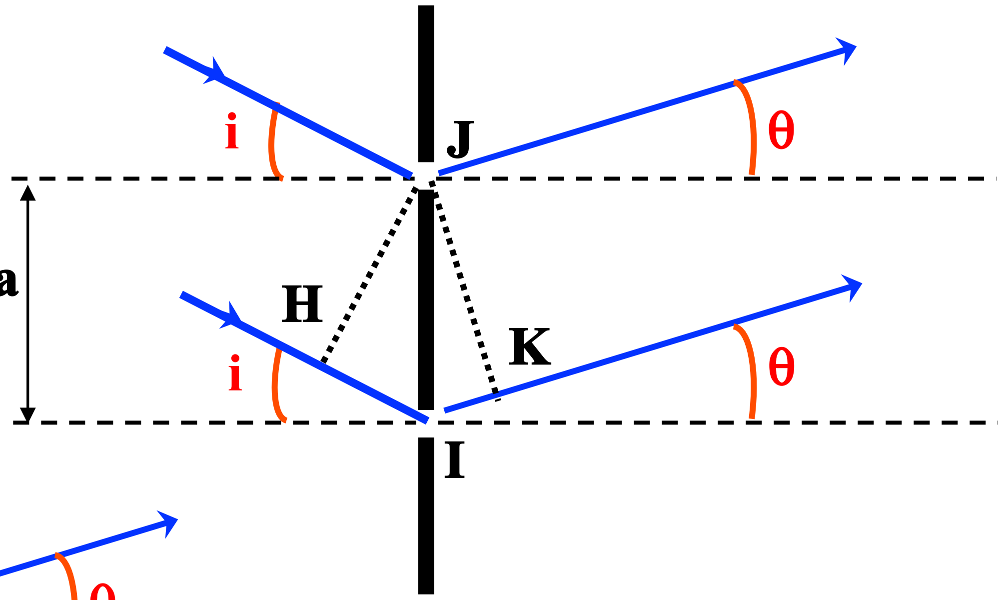
Considérons un réseau de transmission dont 2 fentes consécutives sont distantes de a. Le réseau est éclairé par un faisceau parallèle monochromatique de longueur d'onde λ sous une incidence i.

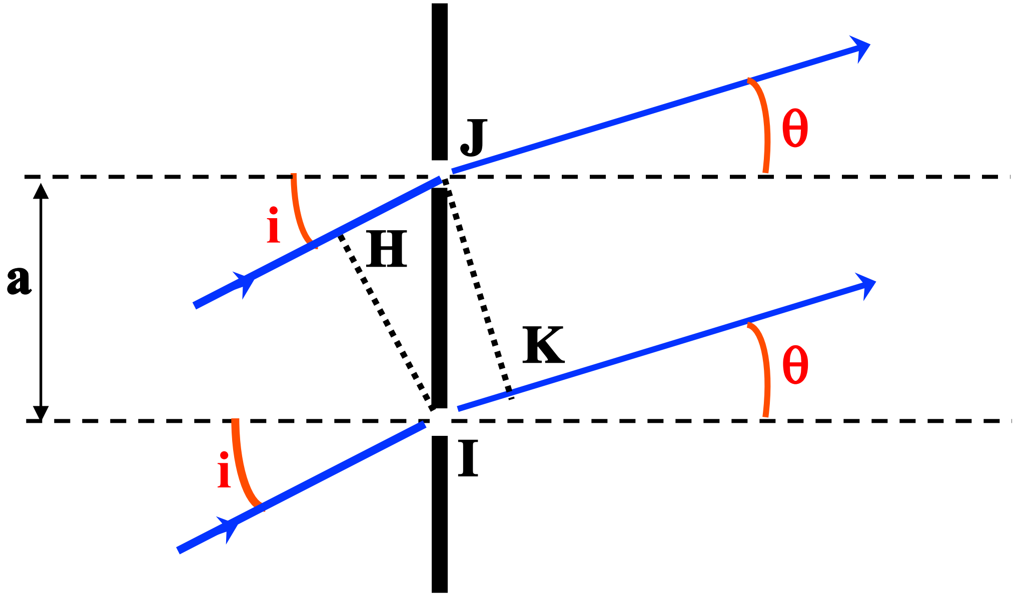
On s'intéresse au faisceau diffracté à l'infini dans la direction d'angle θ.



I - La théorie élémentaire du réseau

On s'intéresse au faisceau diffracté à l'infini dans la direction d'angle θ.





I - La théorie élémentaire du réseau

$$\delta = IK - JH = a\left(\sin(\theta) - \sin(i)\right)$$

En général les rayons diffractés par les différentes fentes présentent un déphasage entre eux.

On obtiendra un maximum d'intensité lumineuse pour :

$$\delta = m\lambda \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta = 2m\pi$$

en effet deux rayons consécutifs présenteront un déphasage multiple de 2π.

Les directions de ces maxima sont donc données par :

$$\boxed{\sin(\theta) = m\frac{\lambda}{a} + \sin(i)}$$

I - La théorie élémentaire du réseau

Pour $m = 0$ on obtient le prolongement du faisceau incident.

Pour $m \neq 0$ la position des maximum dépend de la longueur d'onde λ : le réseau disperse la lumière. On obtient alors des franges très fines parallèles aux fentes du réseau et correspondant aux différentes valeurs de l'entier m.

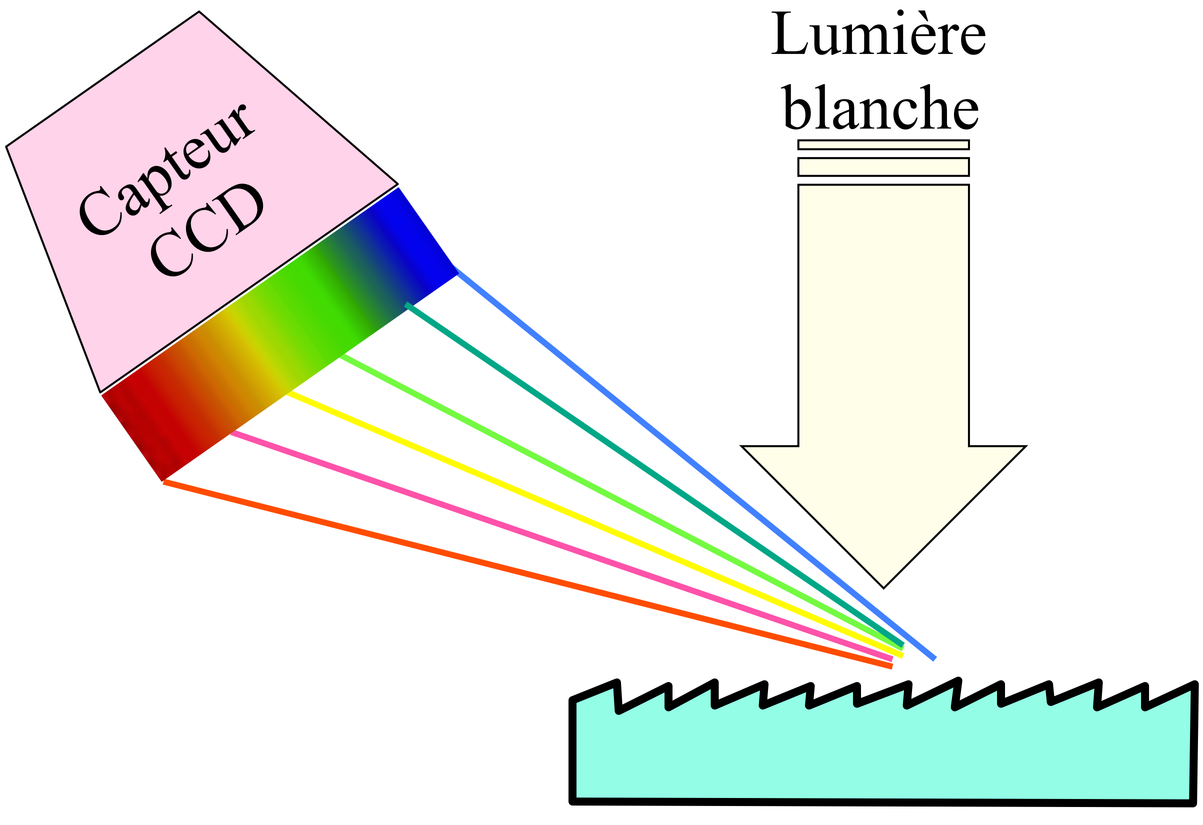
Remarque **: Nous avons considéré ici un réseau par transmission; des conclusions analogues sont valables pour un réseau par réflexion : un exemple quotidien est donné par un disque compact (CD) :**

I - La théorie élémentaire du réseau

La lumière blanche est diffractée par les variations qui forment les bits et qui jouent le rôle des traits du réseau.

Si l'on envoie une lumière monochromatique, le réseau réfléchit plusieurs taches ; la direction de réflexion des taches dépend de la distance entre les traits et de la longueur d'onde.

I - La théorie élémentaire du réseau



II - Calcul de l'intensité diffractée

II.1 - Expression de l'intensité diffractée

Soit N le nombre total de fentes du réseau. Le déphasage “à l‘infini” entre les ondes diffractées par deux fentes successives s'écrit :

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta \qquad \text{avec} \qquad \delta = a(\sin(\theta) - \sin(i))$$

Désignons par $U_1 = U_0 e^{-i\omega t}$ la vibration diffractée par la 1ère fente. $U_p = U_0 e^{-i\omega t} e^{i(p-1)\varphi}$ la vibration diffractée par la pème fente. La vibration totale est :

$$\boxed{U = \sum_{p=1}^{N} U_p = U_0 e^{-i\omega t}\left[1 + e^{i\varphi} + e^{2i\varphi} + \ldots + e^{i(N-1)\varphi}\right]}$$

II - Calcul de l'intensité diffractée

$$U = U_0\, e^{-i\omega t}\left[\frac{1-e^{iN\varphi}}{1-e^{i\varphi}}\right]$$

$$U = U_0\, e^{-i\omega t}\,\frac{e^{iN\frac{\varphi}{2}}}{e^{i\frac{\varphi}{2}}}\left[\frac{e^{iN\frac{\varphi}{2}}-e^{-iN\frac{\varphi}{2}}}{e^{i\frac{\varphi}{2}}-e^{-i\frac{\varphi}{2}}}\right]$$

Soit encore :

$$\boxed{U = U_0\, e^{-i\omega t}\, e^{i(N-1)\frac{\varphi}{2}}\,\frac{\sin\left(N\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}}$$

On remarque que l'amplitude totale a la phase de la vibration diffractée par la fente au milieu du réseau.

II - Calcul de l'intensité diffractée

L'intensité diffractée dans la direction θ est :

$$\boxed{I = I_o \left[\frac{\sin\left(N\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \right]^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \varphi = \dfrac{2\pi a}{\lambda}(\sin(\theta) - \sin(i)) \\ I_o = U_o^2 \end{cases}$$

II.2 - Étude de la courbe I = I(φ)

Si les fentes sont très fines, on peut supposer en première approximation, que l'amplitude diffractée est indépendante de θ; I_o est alors une constante.

II - Calcul de l'intensité diffractée

L'expression de $I(\varphi)$ montre que :

1- Pour $\varphi = 2m\pi$ (m entier), I est indéterminée; étant donnée la périodicité de $I(\varphi)$, on peut lever cette indétermination en examinant le comportement de $I(\varphi)$ au voisinage de $\varphi = 0$.

Près de $\varphi = 0$, $\begin{cases} \sin\left(N\dfrac{\varphi}{2}\right) \approx N\dfrac{\varphi}{2} \\ \sin\left(\dfrac{\varphi}{2}\right) \approx \dfrac{\varphi}{2} \end{cases}$

Alors $\lim\limits_{\varphi \to 0} I(\varphi) = N^2 I_o = I_{max}$

II - Calcul de l'intensité diffractée

2- L'intensité I est minimal :

$$I(\varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \sin\left(\dfrac{N\varphi}{2}\right) = 0 \\ \sin\left(\dfrac{\varphi}{2}\right) \neq 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire:

$$N\frac{\varphi}{2} = m\pi \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m \text{ entier} \neq 0 \\ m \text{ non multiple de } N \end{cases}$$

II - Calcul de l'intensité diffractée

3- Entre 2 maximums principaux, il y a (N-2) maximums secondaires d'intensité très faible.

La dérivée de de I(φ) $\Rightarrow \quad N\,tg\left(\frac{\varphi}{2}\right) = tg\left(N\frac{\varphi}{2}\right)$

Cette équation est une équation transcendantale en φ et ne peut être résolue que numériquement. La résolution graphique donne :

$$N\frac{\varphi}{2} = (2m+1)\frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi = (2m+1)\dfrac{\pi}{N} \\ \varphi = n\pi \end{cases}$$

II - Calcul de l'intensité diffractée

Les maxima secondaires sont très peu marqués.

On peut le vérifier en calculant I pour $\varphi = 3\pi/N$ (premier maximum secondaire) :

$$I_1 = I(3\pi / N) = \frac{I_o}{(\sin(3\pi / 2N))^2}$$

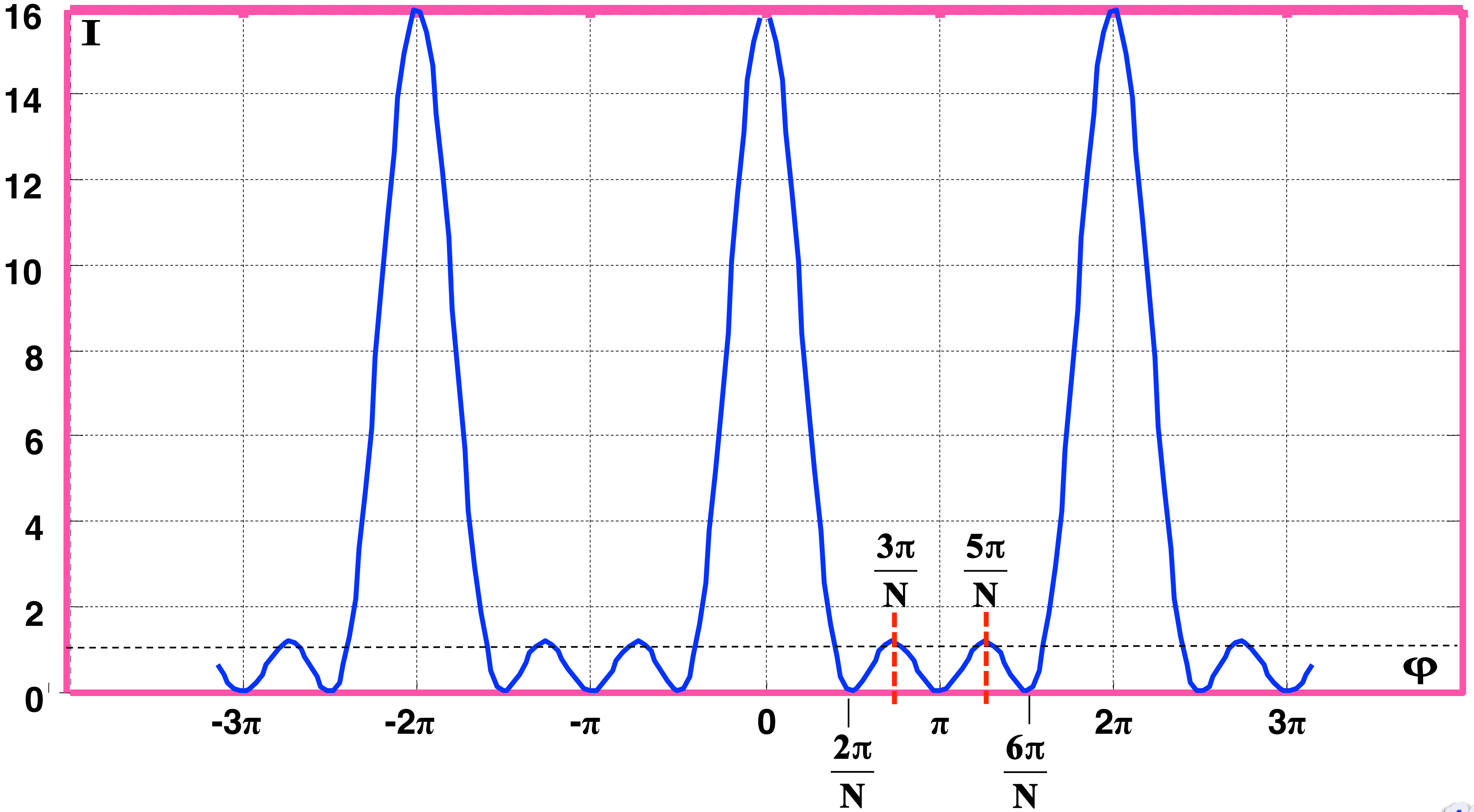
si N >> 1, sin (3π/2N) = 3π/2N

$$\Rightarrow \quad I_1 = I_o \frac{4N^2}{9\pi^2} = 4 \times 10^{-2} N^2 I_o$$

Les maxima secondaires sont pratiquement invisibles.

II - Calcul de l'intensité diffractée

Les variations de **I(φ)** pour **N = 4**. Dans la pratique **N** est beaucoup plus grand.



II - Calcul de l'intensité diffractée

En résumé on retiendra qu'éclairé par une radiation monochromatique de longueur d'onde λ, un réseau dont les fentes sont équidistantes de a donne des maxima principaux d'intensité dans les directions définies par :

$$a(\sin(\theta) - \sin(i)) = m\lambda$$

Ces maxima ont la position prévue par la théorie élémentaire et sont entourés par des maxima secondaires invisibles dans la pratique.

II.3 - Amélioration du calcul précédent

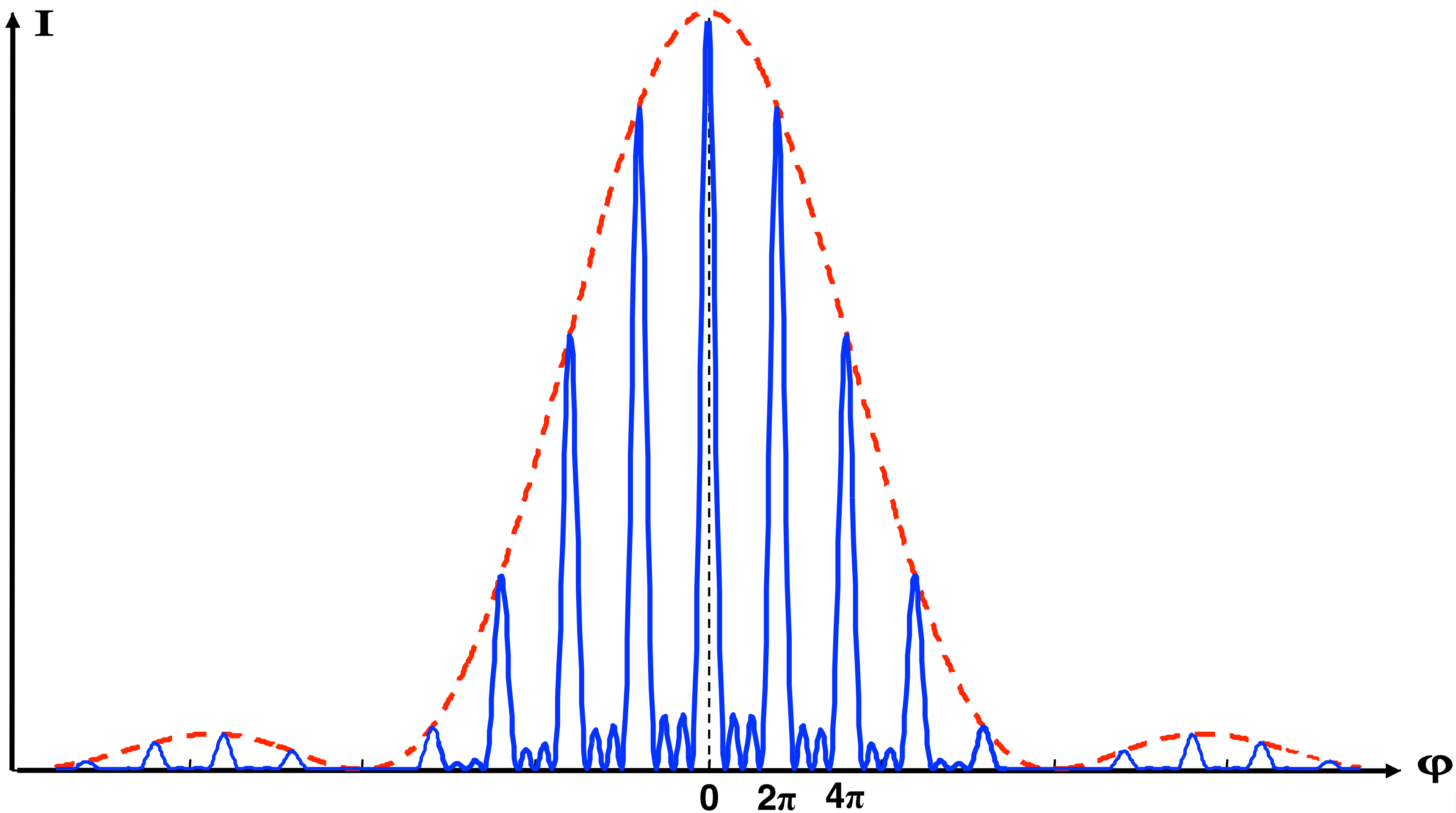
Dans la discussion précédente, nous avons admis que chaque fente du réseau était assez fine pour que l'on puisse négliger la variation de l'intensité diffractée en fonction de θ.

L'expression de I est améliorer en appliquant à chaque fente du réseau les résultats de la théorie de la diffraction par une fente.

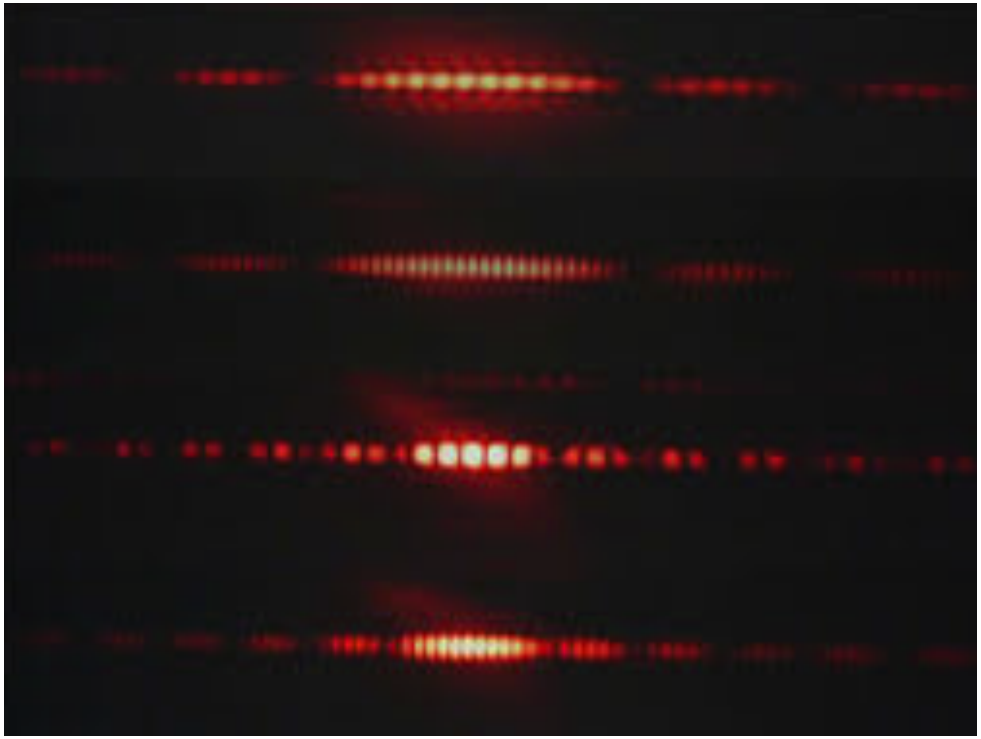
$$I = i_o \left(\frac{\sin(u)}{u}\right)^2 \left[\frac{\sin\left(N\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}\right]^2$$

II - Calcul de l'intensité diffractée

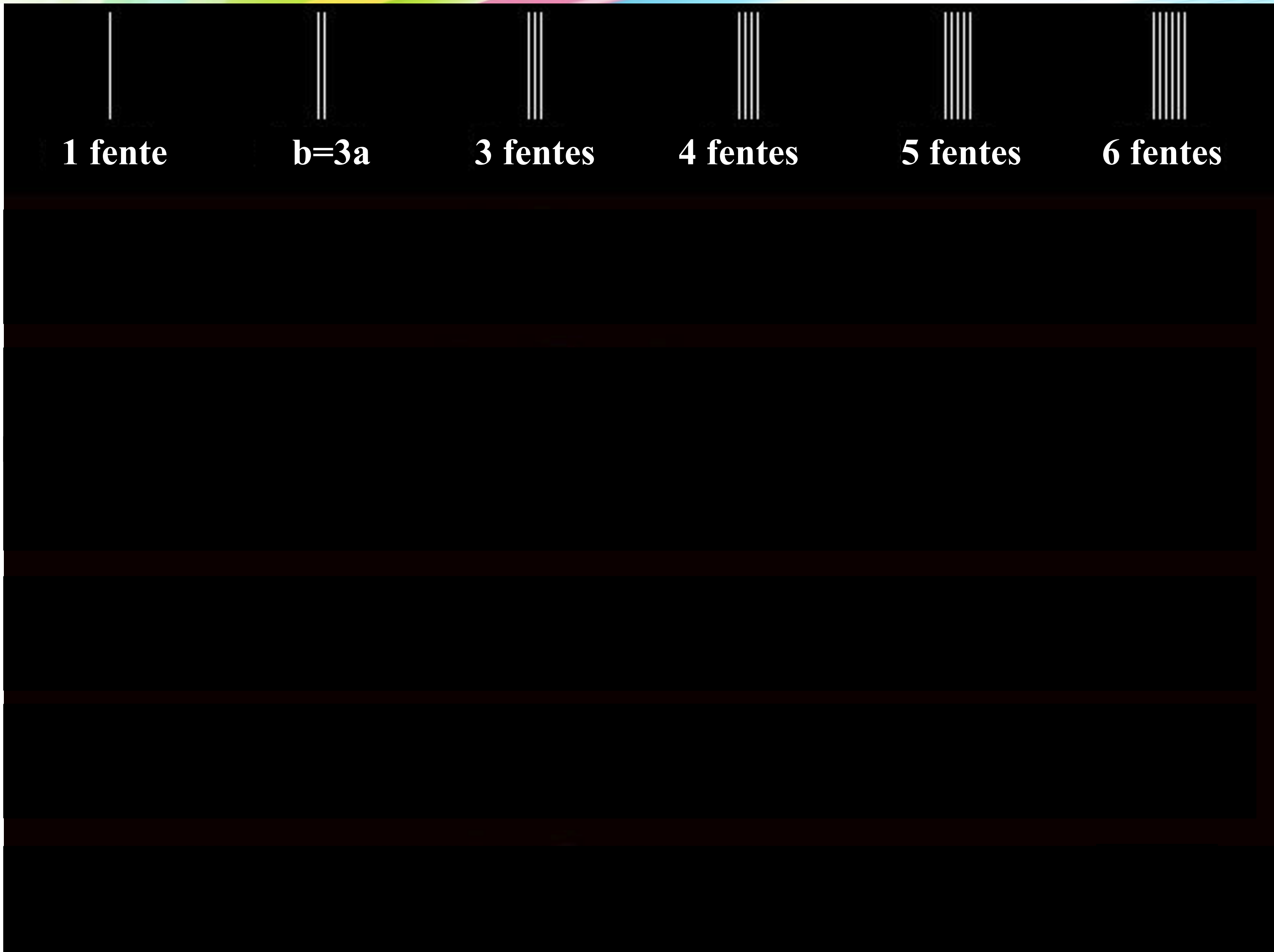
On remarque sur cette courbe un affaiblissement des spectres d'ordre m par rapport au faisceau non diffracté ($\varphi = 0$).



II - Calcul de l'intensité diffractée



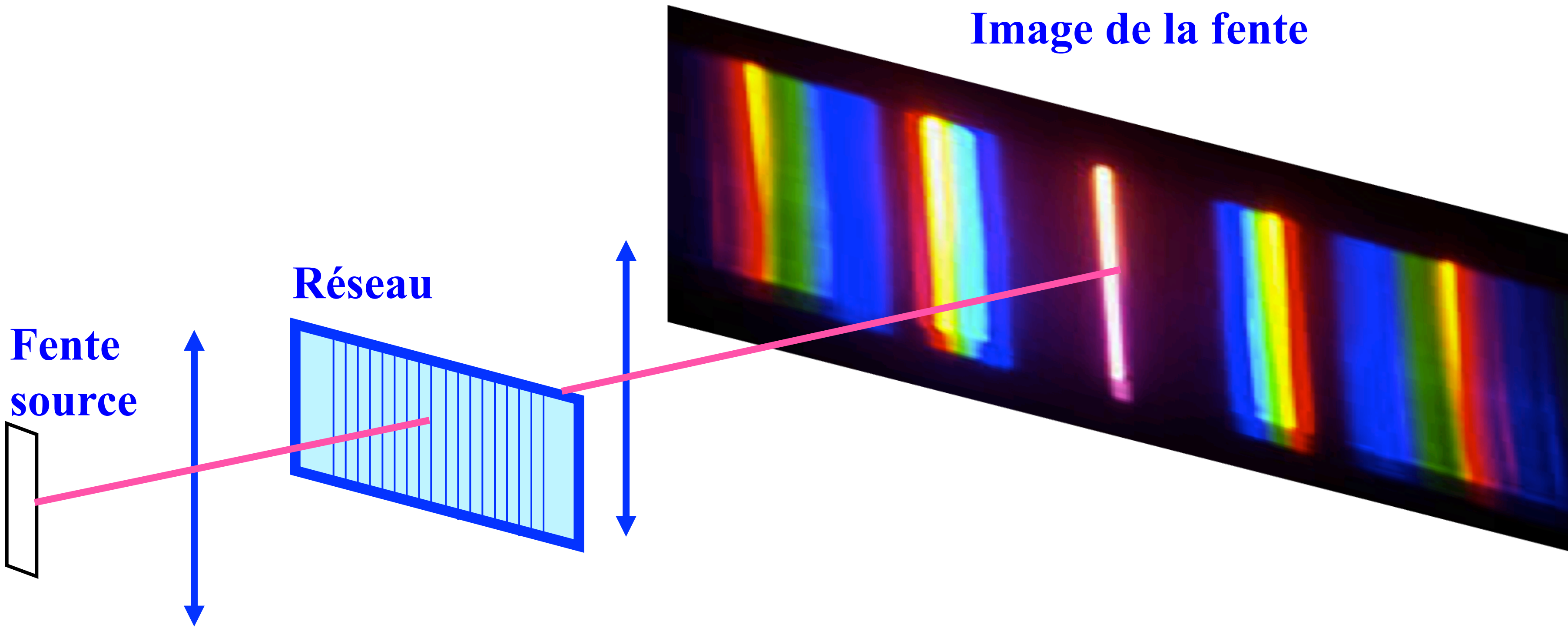
II - Calcul de l'intensité diffractée



III – La formation des spectres

III.1 - Réseau éclairé en lumière blanche

On éclaire un réseau par une source de lumière blanche sous une incidence donnée (par exemple nulle).



III – La formation des spectres

La formule $$\sin(\theta) = m\frac{\lambda}{a} + \sin(i)$$

montre que pour m donné, chaque longueur d'onde est diffractée dans une direction dépendant de λ. On obtient donc des spectres pour les valeurs non nulles de m. À chaque valeur de m correspond un spectre que l'on appelle : spectre d'ordre m.

Pour $m = 0$, $\sin(\theta) = \sin(i)$ quel que soit λ; on obtient donc une image blanche de la fente source.

L'expérience montre qu'à partir d'une certaine valeur de m, il y a empiètement des spectres les uns sur les autres.

III – La formation des spectres

En effet, il y a empiètement lorsqu'une même direction correspondant à deux longueurs d'ondes différentes (et à deux valeurs différentes de m). Cherchons à partir de quel ordre commence l'empiètement des spectres.

D'après l'expression de sinθ, l'empiètement commence entre les spectres d'ordre m et m + 1 tels que :

$$m\lambda_1 = (m+1)\lambda_2$$

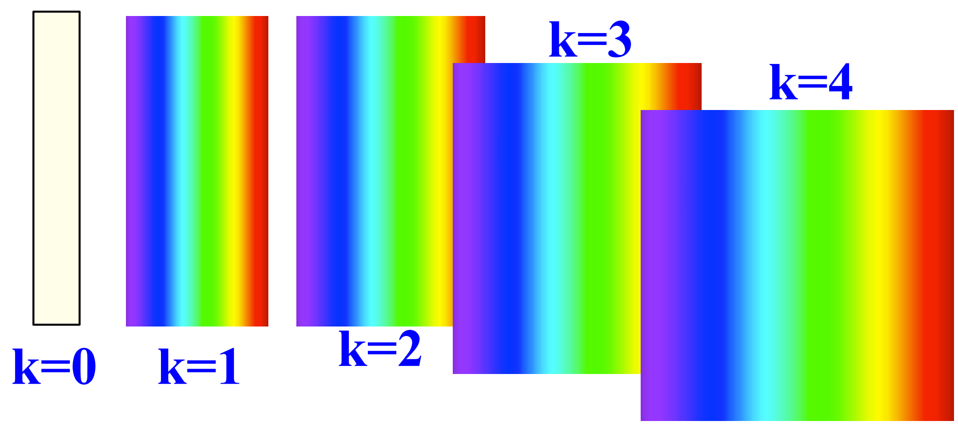
où λ_1 et λ_2 sont deux longueurs d'onde du spectre visible.

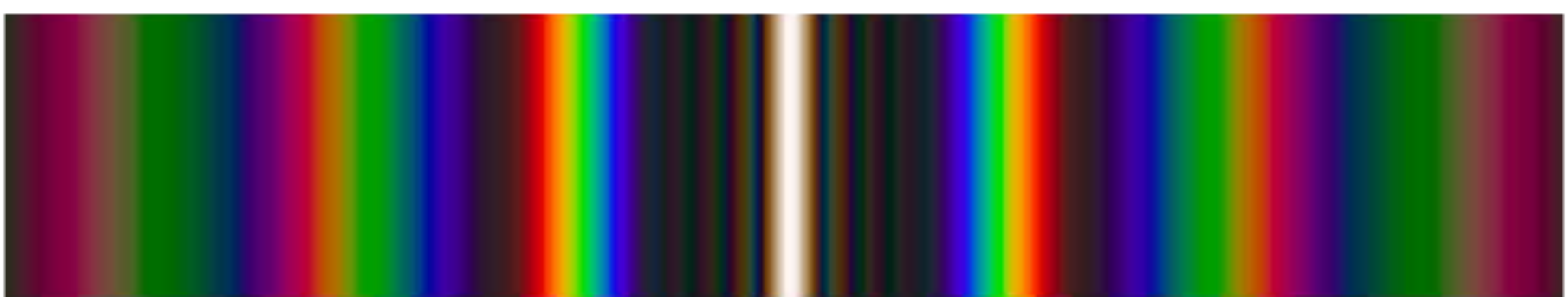
III – La formation des spectres

$$m = \lambda_2 / (\lambda_1 - \lambda_2)$$

On obtient la valeur minimale de m en prenant $\lambda_1 = 0{,}76$ µm et $\lambda_2 = 0{,}39$ µm ($m = 1{,}05$ soit $m_{min} = 2$).

L'empiètement commence donc entre les spectres du 2ème et du 3ème ordre.

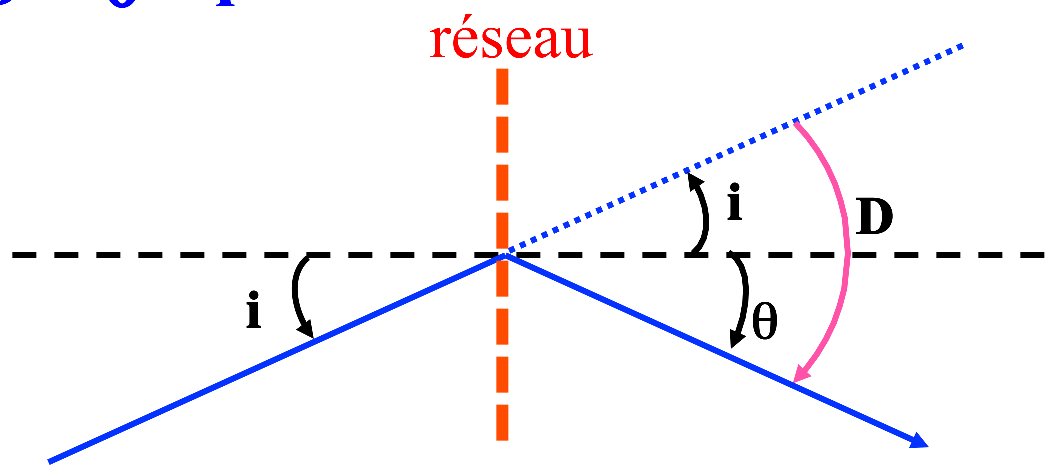




III – La formation des spectres

III.2 - Déviation

Pour un réseau éclairé sous une incidence i et diffractant dans la direction θ, l'angle de déviation est, par définition : $D = \theta - i$



Pour le maximum d'ordre m, et une certaine longueur d'onde λ, θ et i sont liés par :

$$a(\sin(\theta) - \sin(i)) = m\lambda$$

III – La formation des spectres

Soit en différentiant : $\cos(\theta)d\theta = \cos(i)di$

$$\Rightarrow \quad \cos(i) = \cos(\theta)\frac{d\theta}{di}$$

Calculons alors dD/di :

$$\frac{dD}{di} = \frac{d\theta}{di} - 1$$

$$\frac{dD}{di} = -2\frac{\sin\left(\frac{\theta+i}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta-i}{2}\right)}{\cos(\theta)}$$

III – La formation des spectres

On a donc une déviation extrémale ($dD/di = 0$) pour $\theta = i$ et $\theta = -i$ (le faisceau difracté est symétrique du faisceau incident par rapport au réseau).

$a(\sin(\theta) - \sin(i)) = m\lambda$ peut s' écrire sous la forme :

$$2a.\sin\left(\frac{\theta - i}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta + i}{2}\right) = m\lambda$$

or $D = \theta - i$; pour $\theta = -i$, $D = D_{min}$:

$$\sin\left(\frac{D_{min}}{2}\right) = m\frac{\lambda}{2a}$$

Le réseau est au minimum de déviation pour $i = \theta$: cet angle est l' angle de *Bragg*.

III – La formation des spectres

Ce résultat ne dépend pas de l'angle d'incidence i. Si l'on connaît a, en mesurant D_m pour m donné on peut déterminer la longueur d'onde λ de manière "absolue". Cette méthode manque cependant de précision et n'est plus utilisée aujourd'hui.

Notons que si l'on mesure les angles de déviation minimale D_{min} et D'_{min}, pour deux radiations différentes avec un même réseau :

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{m}{m'} \frac{\sin(D'_{min}/2)}{\sin(D_{min}/2)}$$

on peut ainsi comparer deux longueurs d'onde.

III – La formation des spectres

III.3 - Étalement normal du spectre

Le maximum d'ordre m correspond à :

$$a(\sin(\theta) - \sin(i)) = m\lambda$$

Cherchons comment varie θ en fonction de λ pour une incidence i donnée : $a(\sin(\theta) - \sin(i)) = m\lambda$

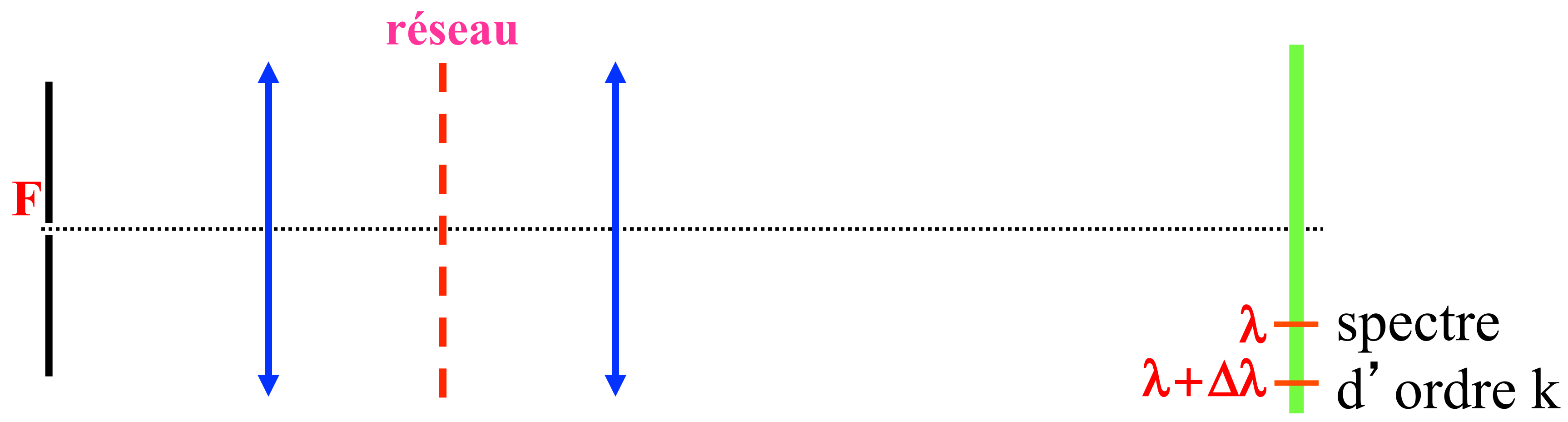
Pour cos(θ) = 1 (θ = 0) on a : $\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{m}{a} = Cte$

ce qui correspond à un "étalement normal" de spectre autour de la longueur d'onde considérée.

IV - Pouvoir de résolution d'un réseau; applications

IV.1 - Position du problème

La fente F est éclairée par une source comportant deux radiations de longueurs d'onde très voisines λ et $\lambda + \Delta\lambda$ avec $|\Delta\lambda| \ll \lambda$; on étudie la figure de diffraction donnée de cette fente par un réseau de pas a.



IV - Pouvoir de résolution d'un réseau; applications

Peut-on distinguer dans le spectre d'ordre m les raies correspondant aux deux longueurs d'onde ? Le réseau permet-il de séparer ces deux raies ?

IV.2 - Pouvoir de résolution du réseau

Nous admettrons que l'on peut distinguer les deux raies si le maximum d'intensité lumineuse pour $\lambda + \Delta\lambda$ correspond au premier minimum pour λ dans le même spectre d'ordre m (critère de Rayleigh).

Le déphasage φ entre les ondes diffractées par deux fentes successives s'écrit :

$$\varphi = \frac{2\pi a}{\lambda}\left(\sin(\theta) + \sin(i)\right)$$

IV - Pouvoir de résolution d'un réseau; applications

Pour le spectre d'ordre m, le maximum d'intensité correspond à :

$$\sin(\theta) = \sin(i) + m\frac{\lambda}{a}$$

Le premier minimum encadrant ce maximum correspond à :

$$\delta\varphi = \frac{2\pi}{N}$$

où N est le nombre total de fentes du réseau, ce qui, pour λ donné, correspond à une variation de θ obtenue en différentiant φ et en égalant $\delta\varphi$ à $2\pi/N$:

$$\frac{2\pi a}{\lambda}\cos(\theta)d\theta = \frac{2\pi}{N}$$

IV - Pouvoir de résolution d'un réseau; applications

Quand on passe, pour m donné, de λ à $\lambda + \Delta\lambda$, le déplacement du maximum central s'obtient en différenciant $\sin(\theta)$:

$$\cos(\theta_m)d\theta_m = m\frac{\Delta\lambda}{a}$$

On exprime le critère de Rayleigh en écrivant que, pour séparer les deux raies, on doit avoir $d\theta_m > d\theta$ pour $\theta = \theta_m$. On écrira ainsi :

$$m\frac{\Delta\lambda}{a} \geq \frac{\lambda}{Na}$$

soit, à la limite de cette égalité : $\boxed{\dfrac{\lambda}{\Delta\lambda} = mN}$

IV - Pouvoir de résolution d'un réseau; applications

Cette valeur limite du rapport $\lambda/\Delta\lambda$ porte le nom de pouvoir de résolution du réseau; il ne dépend que du nombre total de traits du réseau et de l'ordre m du spectre. En apparence, il ne dépend pas du "pas" a du réseau.

Cependant, si l'on veut obtenir une valeur élevée de N tout en conservant à la largeur totale $L = Na$ du réseau une valeur raisonnable, il faut prendre une petite valeur pour a. Un réseau en échelette utilisé dans le millième ordre permet d'atteindre un pouvoir de résolution de 10^6.

IV - Pouvoir de résolution d'un réseau; applications

IV.3 - Quelques applications des réseaux

Les réseaux peuvent être utilisés dans des spectrographes pour des mesures de longueur d'onde par interpolation. En particulier dans le domaine de l'infrarouge, un réseau par réflexion remplace avantageusement un prisme en verre qui, dans cette partie du spectre, présenterait une absorption importante. Ces réseaux sont également utilisés dans des monochromateurs.

IV - Pouvoir de résolution d'un réseau; applications

C'est en utilisant des réseaux sous incidence rasante que l'on a pu obtenir les premières déterminations précises des longueurs d'onde des rayons X. Ces rayons X peuvent être ensuite utilisés pour l'étude de la diffraction par des cristaux, ce qui permet de relier les dimensions de la maille des cristaux à la longueur d'onde λ utilisée. On détermine ainsi, finalement, les dimensions de cette maille ce qui permet, en particulier, de remonter au nombre d'*Avogadro*.

Merci