Cours SVT_S2
Chapitre-1:

Cinématique du point matériel

Pr. Farida Fassi
Faculté des Sciences de Rabat

Introduction

- **La plupart des objets sont en mouvement** : depuis **les particules élémentaires** telles que les électrons, les protons et les neutrons qui constituent les atomes, jusqu'aux **galaxies**, en passant par **les objets usuels et les corps célestes.**
- **On ne peut espérer bien comprendre comment fonctionne la nature que si l'on est capable de définir clairement le mouvement et de le mesurer.**

➢ **La mécanique est la branche de la physique qui étudie les mouvements et les forces.**

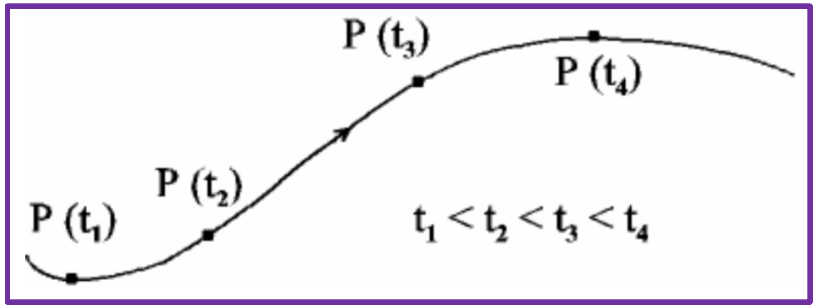
- **L'étude de la mécanique se subdivise en cinématique et dynamique**.
  - La cinématique est l'étude du mouvement indépendamment des causes qui le provoquent
  - La dynamique, par contre, s'intéresse à ces causes les forces. Elle relie les forces au mouvement.

Point matériel

- Par définition **un point matériel** est un objet sans dimensions spatiales,
  - **il s'agit d'une simplification, les objets réels occupant généralement un certain espace.**

➢ Nous limiterons notre étude de la mécanique à l'étude **du mouvement des points matériels.**

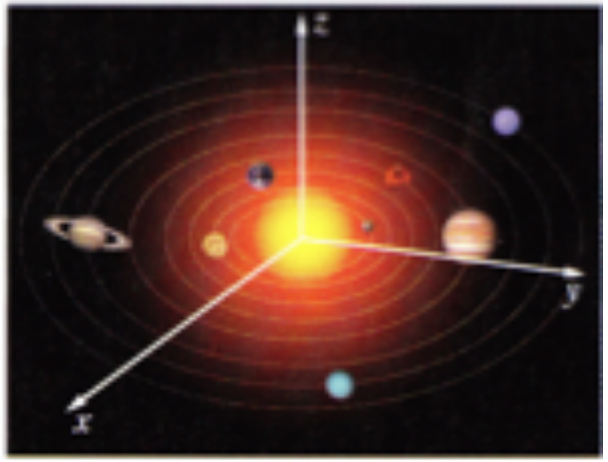
- **Trajectoire**
  - On **appelle trajectoire d'un mobile** l'ensemble des positions successives qu'il occupe au cours du temps:



Référentiel

- le mouvement d'un corps doit être toujours décrit par rapport à un référentiel

- **Référentiel: c'est un repère d'espace muni d'une horloge pour mesurer le temps**
    - référentiel = repère d'espace + repère de temps (horloge)



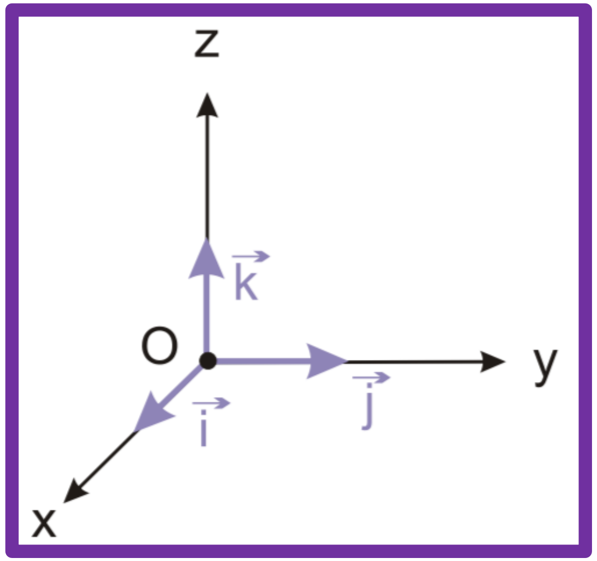
Caractérisation du mouvement du point matériel

- Pour décrire mathématiquement les caractéristiques d'un mouvement, un observateur utilise un **repère** liés au **référentiel d'observation.**

Un repère est déterminé par une **origine O** et par une **base.** Le plus souvent la base est **orthonormée :** le repère est alors appelé **repère cartésien (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)** !

Les axes Ox et Oy perpendiculaires entre-eux, forment un plan. L'axe Oz est perpendiculaire à ce plan.

Souvent le mouvement se déroule dans un plan et un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) à 2 dimensions définissant ce plan suffit.



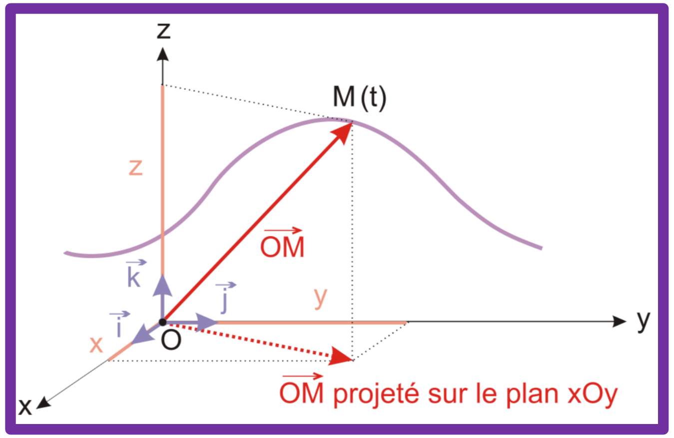
- Si le mouvement est **rectiligne,** un seul axe Ox parallèle au mouvement suffit.
  - Ce sera le cas des mouvements rectilignes.

Vecteur position et coordonnées cartésiennes

Soit M le mobile et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère choisi. La position de M à chaque instant est repérée par les **coordonnées** (ou **composantes**) x, y, z du **vecteur position** $\overrightarrow{OM}$.

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}$$

- **S'il y a mouvement les coordonnées x, y, z varient dans le temps.**
  - **Les fonctions x = f(t), y = g(t) et z = h(t) sont appelées équations horaires du mouvement.**
- **Le mouvement d'un point M est parfaitement connu si on connaît ces équations horaires !**



Si le repère est orthonormé x, y, z sont appelés **coordonnées cartésiennes** du point M.

Vitesse d'un mobile: vitesse moyen

- **La vitesse est une grandeur qui mesure l'évolution de la position par rapport au temps.**
  - Cette grandeur est **vectorielle** car le mouvement d'un point se caractérise par une **direction et un sens**, attributs des vecteurs d'espace.

- Si l'on note **M**, la position d'un point à l'instant « **t** » et **M'** sa position à l'instant « t + Δt », alors on peut définir un vecteur vitesse correspondant au trajet MM' :

$$\boxed{\vec{v}_{MM'} = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}}$$

- **Cette grandeur désigne le vecteur vitesse moyen entre deux instants.**
- **On fait tendre la durée Δt vers 0 pour définir le vecteur vitesse instantanée du point M**
  - **qu'on puisse admettre que la vitesse ne varie plus au cours de cet intervalle de temps**

Vecteur vitesse du point M: Vecteur vitesse instantanée

- **Vecteur vitesse instantanée du point M** par rapport au référentiel R:

$$\vec{v}_M \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{MM'} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Big|(t)$$

- **Le vecteur vitesse est donc la dérivée du vecteur position.**

$$\text{si} \quad \vec{r} = \overrightarrow{OM} \quad \text{alors :} \quad \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a :

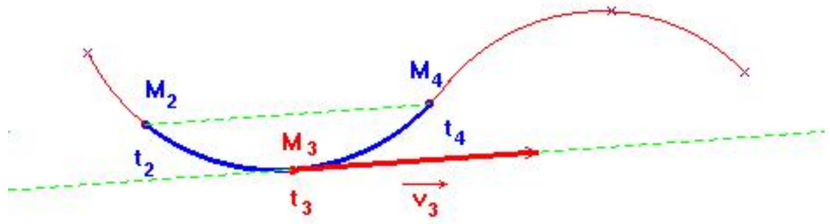
$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

La norme du vecteur vitesse, que nous appellerons vitesse, se mesure en ms^{-1}

$$v = \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]^{1/2}$$

Caractéristiques du vecteur vitesse:

- Point d'application: le point M.
- Direction: la tangente à la trajectoire
- Sens: celui du déplacement



Vecteur accélération du point M

le vecteur position est le vecteur $\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{OM}(t)$.

- Vecteur accélération est une grandeur d'évolution qui mesure la variation du vecteur vitesse, en norme et en direction.

$$\overrightarrow{a}_M \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{v}_M(t+\Delta t) - \overrightarrow{v}_M(t)}{\Delta t} = \frac{d\,\overrightarrow{v}_M}{dt}(t) = \frac{d^2\,\overrightarrow{r}}{dt^2}(t)$$

L'accélération à un instant donné d'un mobile M, considéré comme un point matériel, est le vecteur dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

Le module « **a** » du vecteur accélération $\vec{\mathbf{a}}$ est la quantité :

$$a = \left[\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2\right]^{1/2}$$

L'unité de l'accélération est le mètre par seconde par seconde : (m/s^2) ou $m.s^{-2}$.

Exemples de quelques mouvements

- **Mouvements rectilignes (voir TD)**
  - **Trajectoire**
    - **une droite**
  - **Mouvement rectiligne uniforme**
    - **Le vecteur vitesse constant (en module et en direction)**
    - **Le vecteur accélération est nul**
    - **L équation horaire est une fonction linéaire du temps.**

- **L’équation horaire de ce mouvement:**
- **x=f(t)**

$$\boxed{\begin{aligned} & x = v_x\, t + x_0 \\ & v_x = v_{0x} = \text{constante} \\ & a_x = 0 \end{aligned}}$$

- **Mouvement rectiligne uniformément varié (voir TD)**

  - la trajectoire du mobile est une droite
  - Le vecteur vitesse varie avec le temps
  - Le vecteur accélération est constant
  - L équation horaire est une fonction du second degré du temps.

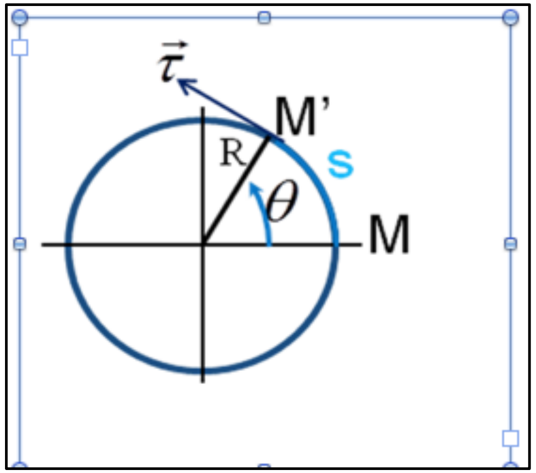
-

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}\, a_x\, t^2 + v_{0x}\, t + x_0 \\ v_x &= a_x\, t + v_{0x} \\ a_x &= a_{0x} = \text{constante} \end{aligned}}$$

- **Mouvement rectiligne varié**
  - la trajectoire du mobile est une droite
  - Les vecteurs vitesse et accélération varient avec le temps.

Mouvement circulaire

➢ **Le déplacement est repéré par l'arc s = MM' appelé abscisse curviligne: s**



$$s = R.\theta \qquad \theta \rightarrow \text{en rad}$$

$$\text{Vitesse: } v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(R\theta)}{dt} = R.\frac{d\theta}{dt} = R.\dot{\theta} = R.\omega$$

$$\textit{Vitesse angulaire}: \omega = \frac{d\theta}{dt} \text{ en rad/s.}$$

$$\vec{n} = \frac{R}{V}\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

$$\text{Vecteur Vitesse: } \vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}$$

$$\textit{Vecteur accélération}: \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau} + \frac{ds}{dt}.\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}.\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}.\vec{n}$$

Accélération Tangentielle a_t	Accélération normale a_n

Expression du vecteur accélération dans la base de Frenet

Mouvement circulaire uniforme

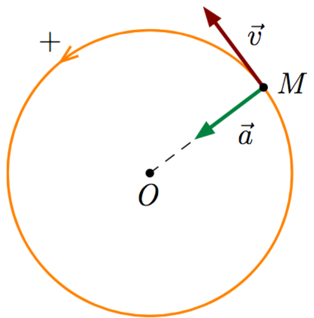
- Vecteur vitesse est constant (en module mais pas en direction).

Le module du vecteur vitesse est constant : $V = Cte$

l'*accélération* tan*gentielle* est nulle : $V = Cte$ $\quad a_T = \frac{dV}{dt} = 0$

l'*accélération* normale est non nulle : $a_N = \frac{v^2}{R} = R\omega^2$

L'accélération est orientée vers le centre du cercle, on dit qu'elle est centripète



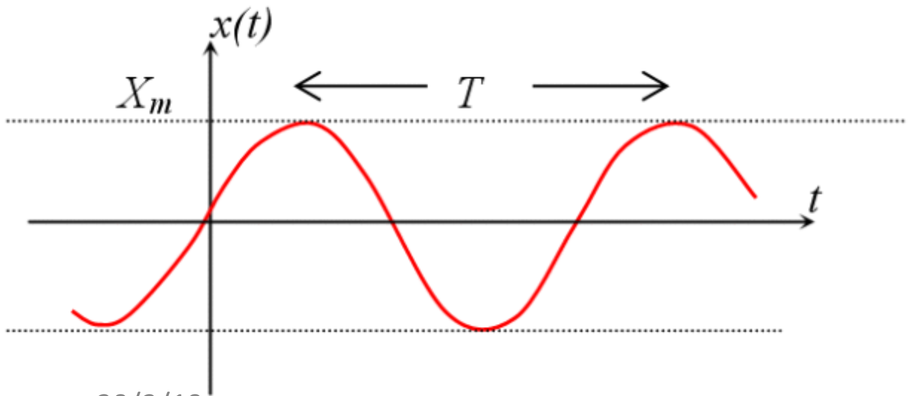
Mouvement rectiligne sinusoïdal

- Un mobile est en mouvement rectiligne sinusoïdal lorsque l'équation horaire de son élongation est une fonction sinusoïdale du temps.

$$\boxed{x = x_m \cos(\omega t + \phi) \text{ ou } x = x_m \sin(\omega t + \phi)}$$

X_m : **amplitude maximale**
L'angle ($\omega t + \Phi$) : **est appelé la phase à l'instant t (unité: rad/s).**
L'angle (Φ): **représente la phase à l'origine des temps (t = 0). (unité: rad/s)**
Période T: **La période T est l'intervalle de temps constant qui sépare deux passages consécutifs du mobile au même point, dans le même sens.**

Trajectoire: segment d'une droite



Des instants t à t + T, la phase a augmenté de 2π et conserve la même valeur, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\omega [(t + T) + \phi] = \omega t + \phi + 2\pi \Leftrightarrow \omega T = 2\pi \text{ et } \mathbf{T} = \frac{2\pi}{\omega}.}$$

Vitesse du mouvement rectiligne sinusoïdal

- On a v= dx/dt. Pour $x=x_m \cos(\boldsymbol{\omega} t + \boldsymbol{\Phi})$ on a $v=-x_m \boldsymbol{\omega} \sin(\boldsymbol{\omega} t + \boldsymbol{\Phi})$

  Pour $x= x_m \sin(\boldsymbol{\omega} t + \boldsymbol{\Phi})$ on a $v= x_m \boldsymbol{\omega} \cos(\boldsymbol{\omega} t + \boldsymbol{\Phi})$.

Accélération du mouvement rectiligne sinusoïdal

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Pour } v = x_m \omega \cos(\omega t + \phi) \text{ on a } a = -\omega^2 \underbrace{x_m \sin(\omega t + \phi)}_{x} = -\omega^2 x \\ \text{Pour } v = -x_m \omega \cos(\omega t + \phi) \text{ on a } a = -\omega^2 \underbrace{x_m \cos(\omega t + \phi)}_{x} = -\omega^2 x \end{cases}$$

Equation différentielle caractéristique du mouvement sinusoïdal

- Accélération du mouvement rectiligne sinusoïdal peut s'écrire:

$$a = -\omega^2 x \text{ ; sachant que } a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

L'équation $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$,

- Appelée équation différentielle, caractérise le mouvement sinusoïdal.

Mouvement plan: Coordonnées polaires

- **On repère le point M par : la distance OM = r et l'angle θ**

Vecteur vitesse en coordonnées polaires

Le repère $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est en mouvement avec θ.

Les coordonnées de $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dans le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ sont :

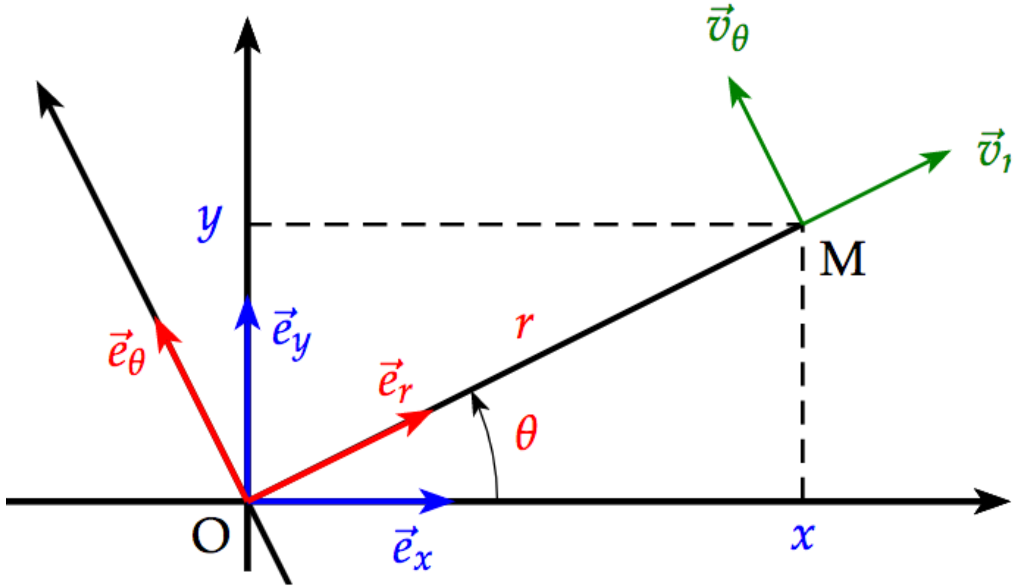
$\boxed{\vec{e}_r = (\cos\theta\,;\,\sin\theta)}$ $\boxed{\text{et}\quad \vec{e}_\theta = (-\sin\theta\,;\,\cos\theta)}$

- **Si l'on dérive ses vecteurs en fonction de θ, on a :**

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} &= \frac{d(\cos\theta)}{d\theta}\vec{e}_x + \frac{d(\sin\theta)}{d\theta}\vec{e}_y = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y = \vec{e}_\theta \\ \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} &= \frac{d(-\sin\theta)}{d\theta}\vec{e}_x + \frac{d(\cos\theta)}{d\theta}\vec{e}_y = -\cos\theta\,\vec{e}_x - \sin\theta\,\vec{e}_y = -\vec{e}_r\end{aligned}}$$

Comme $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$, on a pour le vecteur vitesse :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(r\vec{e}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\times\frac{d\theta}{dt} = r'\,\vec{e}_r + r\theta'\,\vec{e}_\theta}$$



➢ Vecteur accélération en coordonnées polaires

On dérive le vecteur vitesse pour obtenir le vecteur accélération :

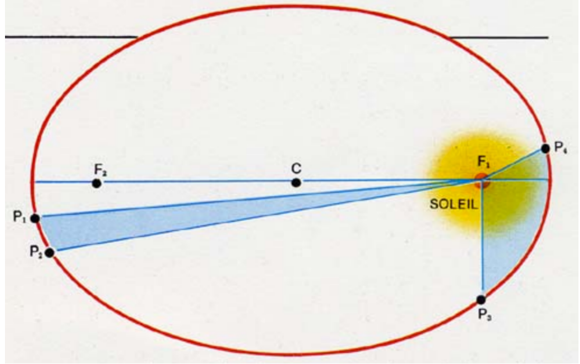
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(r'\,\vec{e}_r + r\theta'\,\vec{e}_\theta)}{dt} = \frac{dr'}{dt}\,\vec{e}_r + r'\,\frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{d(r\theta')}{dt}\,\vec{e}_\theta + r\theta'\,\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$

$$\boxed{= r''\,\vec{e}_r + r'\,\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt} + (r'\theta' + r\theta'')\,\vec{e}_\theta + r\theta'\,\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \times \frac{d\theta}{dt}}$$

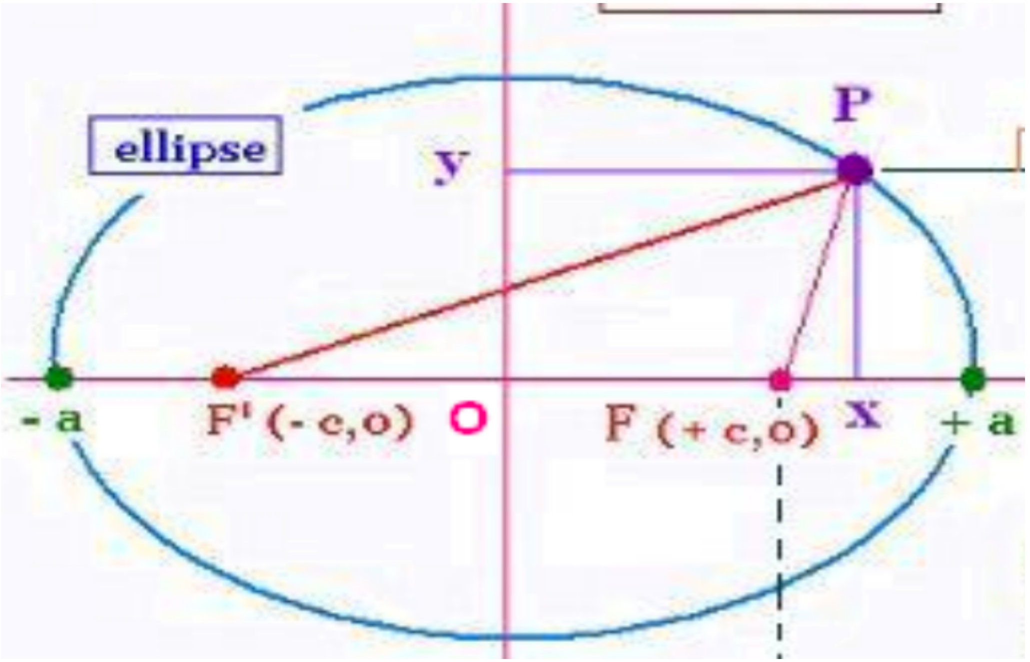
$$= r''\,\vec{e}_r + r'\theta'\,\vec{e}_\theta + (r'\theta' + r\theta'')\,\vec{e}_\theta - r(\theta')^2\,\vec{e}_r$$

$$\boxed{\vec{a} = (r'' - r\theta'^2)\,\vec{e}_r + (r\theta'' + 2r'\theta')\,\vec{e}_\theta}$$

Exemple : Mouvement elliptique



- **Les planètes décrivent des orbites elliptiques dont le soleil occupe un des foyers.**
- **Le centre de gravité de la planète décrit une ellipse d'équation paramétrique:**



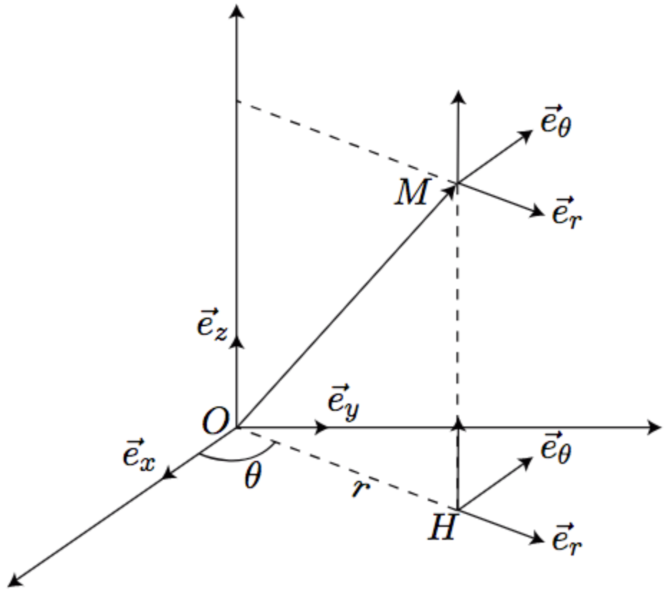
- équations horaires:
  - **$x(t) = a \cos(\omega t)$**
  - **$y(t) = b \sin(\omega t)$**

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

a: demi grand axe
b: demi petit axe

➢ Coordonnées polaires et cylindriques

Repérage d'un point - Vecteur position



$\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$ et $\mathbf{e}_z$ forment la **base cylindrique** ($\mathbf{e}_r$ et $\mathbf{e}_\theta$ la **base polaire**)

Le **vecteur position** s'écrit dans la base cylindrique

$$\boxed{\mathbf{OM} = r\,\mathbf{e}_r + z\,\mathbf{e}_z}$$

et dans la base polaire

$$\boxed{\mathbf{OM} = r\,\mathbf{e}_r}$$

Relations entre paramétrage cylindrique ou polaire et paramétrage cartésien

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$	$x = r\cos\theta$
$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$	$y = r\sin\theta$
$\mathbf{e}_r = \cos\theta\,\mathbf{e}_x + \sin\theta\,\mathbf{e}_y$	$\mathbf{e}_x = \cos\theta\,\mathbf{e}_r - \sin\theta\,\mathbf{e}_\theta$
$\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\,\mathbf{e}_x + \cos\theta\,\mathbf{e}_y$	$\mathbf{e}_y = \sin\theta\,\mathbf{e}_r + \cos\theta\,\mathbf{e}_\theta$

➢ Vecteur vitesse et vecteur accélération

r, θ, z, mais aussi $\mathbf{e}_r$ et $\mathbf{e}_\theta$ dépendent du temps.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{OM}}{dt} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\,\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \dot{z}\,\mathbf{e}_z$$

$$\boxed{\mathbf{v} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\,\mathbf{e}_z}$$

$$\boxed{\mathbf{v} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta \text{ en polaire.}}$$

Calculons le vecteur accélération :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{r}\,\mathbf{e}_r + \dot{r}\,\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\,\frac{d\mathbf{e}_\theta}{dt} + \ddot{z}\,\mathbf{e}_z$$

$$\boxed{\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\,\mathbf{e}_z}$$

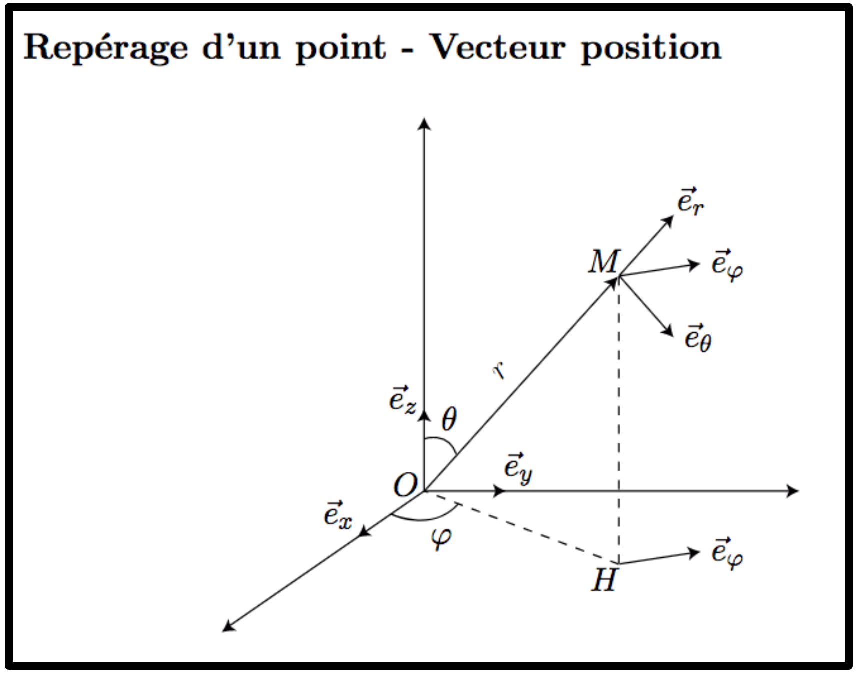
Coordonnées sphériques (rappel)

Les **coordonnées sphériques** (r, θ, φ) définissent de manière unique la position du point M :

$r = \|\mathbf{OM}\|$ peut varier de 0 à $+\infty$

$\theta = (\widehat{\mathbf{e}_z, \mathbf{OM}})$ peut varier de 0 à π

$\varphi = (\widehat{\mathbf{e}_x, \mathbf{OH}})$ peut varier de 0 à 2π



Dans la base orthonormée des coordonnées cylindriques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ on a :

. *le vecteur position* : $\boxed{\overrightarrow{OM} = r.\vec{e}_r}$

. *le vecteur vitesse :*

$$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d(r\vec{e}_r)}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

On obtient : $\vec{V} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$

$$x = r\sin\theta\cos\varphi$$

$$y = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$z = r\cos\theta$$