

Chapitre 2 : Cinématique de solide

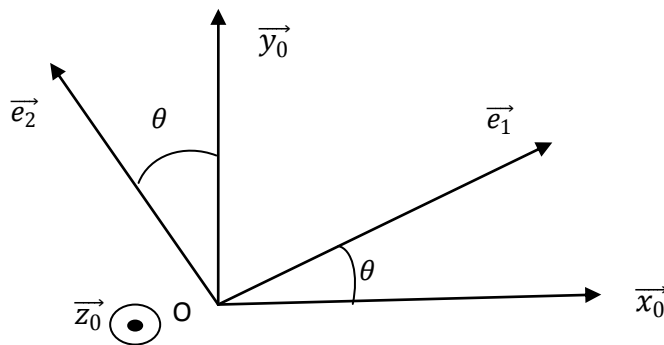
I. Dérivation des vecteurs par rapport un repère mobile :

1. Cas des vecteurs unitaires :

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, un repère orthonormé direct et fixe

$R_1(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 = \vec{z}_0)$, un deuxième repère orthonormé direct obtenu par rotation de R_0 autour de $\vec{Oz}_0$

On a : $\frac{d\vec{e}_1}{dt} = \frac{d\vec{e}_2}{dt} = \frac{d\vec{e}_3}{dt} = \vec{0}$



$$\|\vec{e}_1\|^2 = \|\vec{e}_2\|^2 = \|\vec{e}_3\|^2 = 1$$

$$i = 1, 2, 3 \quad \vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i) = 0 = 2 \cdot \vec{e}_i \cdot \frac{d\vec{e}_i}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e}_i}{dt} \perp \vec{e}_i, \exists \vec{R} ? / \frac{d\vec{e}_i}{dt} = \vec{R} \wedge \vec{e}_i$$

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \cos\theta \vec{x}_0 + \sin\theta \vec{y}_0 \\ \vec{e}_2 = -\sin\theta \vec{x}_0 + \cos\theta \vec{y}_0 \\ \vec{e}_3 = \vec{z}_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{d\vec{e}_1}{dt} = \dot{\theta}[\sin\theta \vec{x}_0 + \cos\theta \vec{y}_0] = \dot{\theta} \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 \\ \frac{d\vec{e}_2}{dt} = -\dot{\theta}[\cos\theta \vec{x}_0 - \sin\theta \vec{y}_0] = -\dot{\theta} \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 \\ \frac{d\vec{e}_3}{dt} = \vec{0} = \dot{\theta} \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_3 \end{cases}$$

Si on pose $\vec{R} = \vec{\Omega}(R/R_0) = \dot{\theta} \vec{e}_3$ Vecteur rotation instantané de R par rapport à R_0

On peut écrire :

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt} = \vec{R} \wedge \vec{e}_1$$

$$\frac{d\vec{e}_2}{dt} = \vec{R} \wedge \vec{e}_2$$

2. Cas d'un vecteur $\vec{U}$ quelconque :

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ orthonormé direct fixe.

Soit $R(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un deuxième repère orthonormé direct et un vecteur $\vec{U} = \sum_{i=1}^k x_i \vec{e}_i$

On se propose de calculer

$$\left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{R_0} = ?$$

On a :

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{R_0} &= \dot{x}_1 \vec{e}_1 + \dot{x}_2 \vec{e}_2 + \dot{x}_3 \vec{e}_3 + x_1 \frac{d\vec{e}_1}{dt} + x_2 \frac{d\vec{e}_2}{dt} + x_3 \frac{d\vec{e}_3}{dt} \\ &= \left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_R + x_1 \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{e}_1 + x_2 \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{e}_2 \\ &\quad + x_3 \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{e}_3 \\ &= \left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_R + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge [x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3] \\ &= \left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{R_0} = \left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_R + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{U} \end{aligned}$$

3. Propriétés des vecteurs instantanés:

$$\forall R_1, \forall R_2, \forall R_3 \quad \vec{\Omega}(R_1/R_3) = \vec{\Omega}(R_1/R_2) + \vec{\Omega}(R_2/R_3)$$

➤ **Démonstration :**

$$(1) \quad \left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{R_2} = \left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_2) \wedge \vec{U}$$

$$(2) \quad \left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{R_3} = \left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_3) \wedge \vec{U}$$

$$(3) \quad \left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{R_3} = \left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_3) \wedge \vec{U}$$

En faisant (1) + (2) on aura :

$$\left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_3 = \left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{R_1} + [\vec{\Omega}(R_1/R_2) + \vec{\Omega}(R_2/R_3)] \wedge \vec{U}$$

En faisant la différence avec (3), on aura :

$$\vec{0} = [\vec{\Omega}(R_1/R_3) - \vec{\Omega}(R_1/R_2) - \vec{\Omega}(R_2/R_3)] \wedge \vec{U}$$

Comme $\vec{U}$ est quelconque alors, on déduit que :

$$\vec{\Omega}(R_1/R_3) = \vec{\Omega}(R_1/R_2) + \vec{\Omega}(R_2/R_3)$$

$$\forall R_1, \forall R_2 \quad \vec{\Omega}(R_1/R_2) = -\vec{\Omega}(R_2/R_1)$$

➤ **Démonstration :**

$$\left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{R_1} = \left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_1) \wedge \vec{U}$$

$$\left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{R_2} = \left. \frac{d\vec{U}}{dt} \right|_{R_1} + \vec{\Omega}(R_1/R_2) \wedge \vec{U}$$

On faisant la somme :

$$\vec{0} = [\vec{\Omega}(R_1/R_2) + \vec{\Omega}(R_2/R_1)] \wedge \vec{U}$$

Comme $\vec{U}$ est quelconque alors, on déduit que :

$$\vec{\Omega}(R_1/R_2) = -\vec{\Omega}(R_2/R_1)$$

4. Applications : Compositions du mouvement :

On considère le mouvement de (S) par rapport à $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ (orthonormé direct fixe).

On introduit $R(O', \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ orthonormé dans le quel le mouvement de (S) est plus simple à étudier).

$$\left. \begin{array}{l} \text{Mouvement de (S) par rapport à } R_0 \text{ absolu} \\ \text{Mouvement de (S) par rapport à } R \text{ relatif} \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned} \forall P \in (S), \quad \vec{V}_a(P) = \vec{V}(P/R_0) &= \left. \frac{d\vec{OO'}}{dt} \right|_{R_0} + \left. \frac{d\vec{O'P}}{dt} \right|_{R_0} \\ &= \left. \frac{d\vec{OO'}}{dt} \right|_{R_0} + \left. \frac{d\vec{O'P}}{dt} \right|_R + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{O'P} \end{aligned}$$

$$\vec{V}_a(P) = \vec{V}_r(P) + \vec{V}_e(P)$$

Où :

$$\vec{V}_r(P) = \vec{V}(P/R_0) = \left. \frac{d\vec{O'P}}{dt} \right|_R, \text{ la vitesse relative}$$

$$\vec{V}_e(P) = \vec{V}(P \in R/R_0) = \left. \frac{d\vec{OO'}}{dt} \right|_R + \vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{O'P}, \text{ la vitesse d'entraînement}$$

Composition des accélérations (à faire)

$$\vec{\gamma}_a(P) = \vec{\gamma}_r(P) + \vec{\gamma}_e(P) + \vec{\gamma}_c(P)$$

$$\vec{\gamma}_r(P) = \vec{\gamma}(P/R) = \frac{d\vec{V}_r(P)}{dt}$$

$$\vec{\gamma}_c(P) = 2\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \vec{V}_r(P) \quad \text{Coriolis}$$

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}_e(P) &= \vec{\gamma}(R/R_0) \\ &= \vec{\gamma}_a(O') + \frac{d\vec{\Omega}(R/R_0)}{dt} \wedge \overrightarrow{O'P} + \vec{\Omega}(R/R_0) \\ &\quad \wedge [\vec{\Omega}(R/R_0) \wedge \overrightarrow{O'P}]\end{aligned}$$

II. Champ de vitesse d'un solide :

On considère un solide (S) en mouvement par rapport à R_0

1. Définition :

(S) est un solide indéformable (parfait) si au cours du mouvement les distances et les angles entre les différents points restent constants.

2. Remarque :

Le mouvement de (S) est une isométrie $(S)^t \rightarrow (S)^{t' > t}$ (schématisation).

$$\forall \text{ le temps } t \text{ et } \forall Q \text{ et } P \in (S) \quad \|\overrightarrow{PQ}\|^2 = \text{cste} = \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ}$$

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ}) = 0 \rightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot \frac{d}{dt}(\overrightarrow{PQ}) = 0$$

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \left[\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OQ}) - \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OP}) \right] = 0 \rightarrow \overrightarrow{PQ} \cdot [\vec{V}(Q/R_0) - \vec{V}(P/R_0)] = 0$$

$$\text{Car : } \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$$

Le champ des vitesses d'un solide est donc équiprojectif.

Il s'agit d'un champ de moments d'un torseur appelé torseur cinématique de (S) par rapport à R_0 et noté τ_{S/R_0} . $P \in (S) \rightarrow \vec{V}(P/R_0)$

3. Détermination de la résultante du torseur cinématique

$$\text{Soit } R_s \text{ lié à (S)} \quad \vec{V}(P/R_0) = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} \Big|_{R_0} = \frac{d\overrightarrow{OP}}{dt} \Big|_{R_s} + \vec{\Omega}(R_s/R_0) \wedge \overrightarrow{OP}$$

$$\vec{V}(Q/R_0) = \frac{d\overrightarrow{OQ}}{dt} \Big|_{R_0} = \frac{d\overrightarrow{OQ}}{dt} \Big|_{R_s} + \vec{\Omega}(R_s/R_0) \wedge \overrightarrow{OQ}$$

En faisant la différence

$$\begin{aligned}\vec{V}(P/R_0) - \vec{V}(Q/R_0) &= \left. \frac{d\vec{OP}}{dt} \right|_{R_s} - \left. \frac{d\vec{OQ}}{dt} \right|_{R_s} + \vec{\Omega}(R_s/R_0) \wedge [\vec{OP} - \vec{OQ}] \\ &= \left. \frac{d\vec{QP}}{dt} \right|_{R_s} + \vec{\Omega}(R_s/R_0) \wedge \vec{QP} \\ &= \vec{0} + \vec{\Omega}(R_s/R_0) \wedge \vec{QP}\end{aligned}$$

Donc la résultante du torseur cinématique est :

$$\vec{\Omega}(R_s/R_0)$$

4. Torseur cinématique :

On définit le torseur cinématique τ_{S/R_0} par ses deux éléments de réduction suivants :

$$\tau_{S/R_0} = [\vec{\Omega}(S/R_0), \vec{V}(P \in S/R_0)]$$

Remarque :

$$\forall P \in (S), \forall Q \in (S) \quad \vec{V}(P/R_0) = \vec{V}(Q/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \vec{QP}$$

5. Mouvements particuliers de (S) par rapport à R_0

5.1. Mouvement de translation pure

(S) est en translation pure par rapport à R_0 .

$$\vec{\Omega}(S/R_0) = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \tau_{S/R_0} \text{ est un couple}$$

Remarque :

Dans ce cas $\forall P \in (S), \forall Q \in (S)$ le Champ de vitesse

$\vec{V}(P/R_0)$ est uniforme, on aura: $\vec{V}(P/R_0) = \vec{V}(Q/R_0)$

5.2. Mouvement de rotation pure

(S) est en rotation pure par rapport à R_0 autour d'un axe de ses points A.

$$\forall A \in (S) \quad \vec{V}(A/R_0) = \vec{0}$$

→ τ_{S/R_0} est un glisseur d'axe $(A, \vec{\Omega}(S/R_0))$ axe de la rotation.

Remarque :

Le champ des accélérations des points d'un solide n'est pas en général, un champ de moments de torseur.

Soit un repère R_0 , $\forall P \in (S)$, $\forall Q$ point de l'espace considéré, on a:

$$\vec{V}(P/R_0) = \vec{V}(Q/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{QP}$$

En dérivant par rapport à t dans R_0 , on aura :

$$\vec{\gamma}(P/R_0) = \vec{\gamma}(Q/R_0) + \frac{d\vec{\Omega}(S/R_0)}{dt} \wedge \overrightarrow{QP} + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \frac{d\overrightarrow{QP}}{dt}$$

Or
$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$$

$$\frac{d\overrightarrow{QP}}{dt} = \vec{V}(P/R_0) - \vec{V}(Q/R_0) = \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{QP}$$

$$\begin{aligned} \forall P, \forall Q \in (S) \quad \vec{\gamma}(P/R_0) &= \vec{\gamma}(Q/R_0) + \frac{d\vec{\Omega}(S/R_0)}{dt} \wedge \overrightarrow{QP} + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge [\vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{QP}] \end{aligned}$$

Est-ce que ce champ est équiprojectif ?

Pour cela, il faut vérifier si

$$\forall P, \forall Q \in (S) \quad \overrightarrow{PQ} \cdot [\vec{\gamma}(P/R_0) - \vec{\gamma}(Q/R_0)] = 0$$

Or :

$$\overrightarrow{PQ} \cdot [\vec{\gamma}(P/R_0) - \vec{\gamma}(Q/R_0)] = \overrightarrow{PQ} \cdot \left(\frac{d\vec{\Omega}(S/R_0)}{dt} \wedge \overrightarrow{QP} + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge [\vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{QP}] \right) \neq 0$$

Donc le champ des accélérations n'est pas généralement équiprojectif.

III- paramétrage d'un solide (S) par rapport à R₀

1. Décomposition du mouvement :

Soit R₀ un repère orthonormé direct et fixe

(S) est en mouvement par rapport à R₀

- Le mouvement de (S) par rapport à R₀ est une isométrie définie

$$\text{par : } (S)^t \xrightarrow[\text{isométrie}]{} (S)^{t' > t}$$

Cette isométrie se décompose en une translation et trois rotations élémentaires.

- Nous avons vu que le mouvement de (S) par rapport à R₀ peut être représenté par le torseur cinématique de (S) par rapport à R₀

Ce torseur peut se décomposer comme suit :

$$\underbrace{\tau_{S/R_0}}_{\text{mvt général}} = \underbrace{\tau}_{\text{translation de (S)/R}_0} + \underbrace{f}_{\text{rotation autour de l'axe } (\Delta) \text{ de (S)/R}_0}$$

Ces rotations sont définies par des angles appelés angles d'Euler ; ψ , θ et φ .

Remarque :

Le mouvement de tous points

$$P \in (S) = \text{translation de vecteur } \vec{V}(G/R_0) + \text{rotations autour de } G$$

Pour caractériser cette translation, il suffit de préciser les coordonnées de G par rapport à R₀.

$$\forall P \in (S) \quad \vec{V}(P/R_0) = \vec{V}(G/R_0) + \vec{\Omega}(S/R_0) \wedge \overrightarrow{GP}$$

2. Angles d'Euler :

$$\begin{array}{ccc} \underbrace{R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}_{\text{repère fixe}} & \xrightarrow[\overrightarrow{OG} = (x, y, z)]{\text{translation}} & R_{bary}(G, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \xrightarrow[\overrightarrow{Oz_0}]{\text{rot } \Psi} \\ & & R_1(G, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0) \xrightarrow[\overrightarrow{Gu}]{\text{rot } \theta} \\ & & \underbrace{R_2(G, \vec{u}, \vec{w}, \vec{z})}_{\text{lié au l'axe } (\Delta) \parallel \overrightarrow{Gz}} \xrightarrow[\overrightarrow{Gz}]{\text{rot } \varphi} \underbrace{S = R_s(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}_{\text{lié au solide}} \end{array}$$

Les trois angles d'Euler sont :

- ✓ La précession Ψ (autour d'un axe de direction fixe par rapport à R_0) repère $\forall t$ le plan (π) contient l'axe (Δ) .
- ✓ La notation θ positionne (Δ) dans le plan (π) : Ψ et θ connues $\rightarrow (\Delta)$ connu.
- ✓ La rotation propre φ est autour de (Δ) .

$$\begin{aligned} \text{On a: } \vec{\Omega}(S/R_0) &= \vec{\Omega}(R_s/R_2) + \vec{\Omega}(R_2/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_{bary}) + \\ \vec{\Omega}(R_{bary}/R_0) &= \dot{\varphi} \vec{z} + \dot{\theta} \vec{u} + \dot{\Psi} \vec{z}_0 \end{aligned}$$

Expression de $\vec{\Omega}(S/R_0)$ dans $R_2(G, \vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$

$$\vec{z}_0 = \cos\theta \vec{z} + \sin\theta \vec{w}$$

$$\vec{\Omega}(S/R_0) = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\Psi} \sin\theta \\ \dot{\varphi} + \dot{\Psi} \cos\theta \end{pmatrix}$$

Expression de $\vec{\Omega}(S/R_0)$ dans $R_1(G, \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$

$$\vec{z} = -\sin\theta \vec{v} + \sin\theta \vec{z}_0$$

$$\vec{\Omega}(S/R_0) = \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ -\dot{\Psi} \sin\theta \\ \dot{\Psi} + \dot{\varphi} \cos\theta \end{pmatrix}$$

Le solide (S) libre à donc besoin de 6 paramètres.

Trois coordonnées de G et trois angles d'Euler.

En général, (S) sera non libre puisqu'il sera soumis à des liaisons.

3. Condition de contact permanent

Soit un solide (S) en mouvement par rapport à un repère R_0 fixe.

Soit I le point de contact de ce solide par rapport au plan fixe $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$.

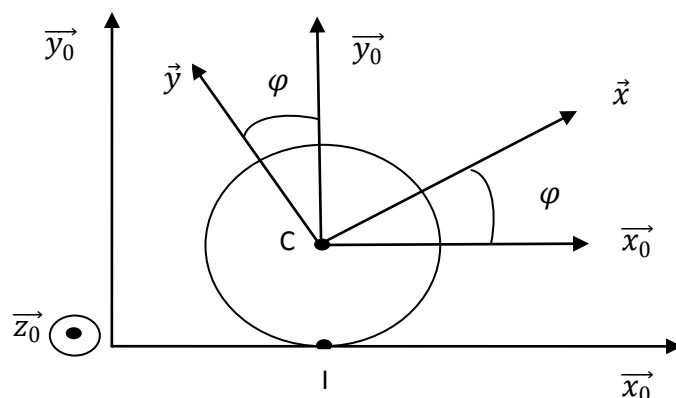
On appelle condition de contact ponctuel permanent du solide (S) avec ce plan la quantité suivante : $\vec{OI}$ multiplié par le vecteur unitaire perpendiculaire à $(\vec{x}_0, \vec{y}_0)$. Dans notre exemple ce vecteur est $\vec{z}_0$ et on aura :

$$\vec{OI} \cdot \vec{z}_0 = 0$$

➤ Exemple1 :

On considère un disque (D) homogène de centre G de rayon r, de masse m en mouvement plan dans le plan $[O, \vec{x}_0, \vec{y}_0]$ fixe et en contact ponctuel avec $\vec{Ox}_0$ horizontal.

(D) solide → il est décrit par 6 paramètres. (x, y, z, Ψ , θ connue → (Δ) et φ).



Condition de contact ponctuel permanent $\vec{OI} \cdot \vec{y}_0 = 0$

$$\vec{OG} \cdot \vec{y}_0 + \vec{GI} \cdot \vec{y}_0 = 0$$

Donc : $y_G=R$

IV. cinématique de contact :

On considère deux solides (S_1) et (S_2) de centre respectivement G_1 et G_2 en contact ponctuel en I. Ce contact admet un plan tangent commun (π) .

Soit $\vec{n}$ le vecteur unitaire normal à (π) .

- Analyse du mouvement de (S_1) par rapport à (S_2)

Soit R_0 le repère d'étude et soient R_i les repères liés à (S_i) , l'étiquette I ne représente ni une particule matérielles, de (S_1) ni une particule de (S_2) au cours du temps.

I représente une succession de particule de (S_1) et (S_2) qui assurent le contact.

➤ Remarque :

$\forall P \in (S_1) \rightarrow \overrightarrow{OP}$ est un champ de vecteurs.

$$\forall P \in (S_1) \rightarrow \vec{V}(P \in S_1/S_2) = \vec{V}(P \in S_1/R_2) = \vec{V}(I \in S_1/R_2) + \vec{\Omega}(S_1/R_2) \wedge \overrightarrow{IP}$$

$$\text{On décompose } \vec{\Omega}(S_1/R_2) = \underbrace{\vec{\Omega}_{\parallel(\pi)}(S_1/R_2)}_{\text{rotation instantanée de roulement}} + \underbrace{\vec{\Omega}_{\perp(\pi)}(S_1/R_2)}_{\text{rotation instantanée de pivotement}}$$

$$\begin{aligned} \forall P \in (S_1) \quad \vec{V}(P/R_2) \\ = \underbrace{\vec{V}(I/R_2)}_{\text{glissement}} + \underbrace{\vec{\Omega}_{\parallel}(S_1/R_2) \wedge \overrightarrow{IP}}_{\text{roulement}} + \underbrace{\vec{\Omega}_{\perp}(S_1/R_2) \wedge \overrightarrow{IP}}_{\text{pivotement}} \end{aligned}$$

1. Le glissement de (S_1) par rapport à (S_2)

On a: $\vec{V}(I \in S_1/R_2) \neq \left. \frac{d\vec{OI}}{dt} \right|_R$

Pour déterminer la vitesse du point I par rapport à R_2 , on applique la relation d'antisymétrie suivante :

$$\vec{V}(I \in S_1/R_2) = \vec{V}(G_1/R_2) + \vec{\Omega}(S_1/R_2) \wedge \vec{G_1I}$$

$\vec{V}(I \in S_1/R_2)$ est la vitesse de glissement de **(S₁) par rapport à R₂** notée $\vec{V}_g(S_1/R_2)$.

2. Propriétés :

- a) $\forall$ le repère R, $\vec{V}_g(S_1/S_2) = \vec{V}(I \in S_1/R) - \vec{V}(I \in S_2/R)$
- b) $\vec{V}_g(S_1/S_2) \in$ **toujours à** (π)

➤ Conséquences :

Le non glissement de (S₁) par rapport à (S₂) se traduit par $\vec{V}_g(S_1/S_2) = \vec{0}$

On calculera toujours $\vec{V}_g(S_1/S_2)$ dans la base associée à (π) .

3. Pivotement et roulement :

• Le pivotement

$$P \in (S_1) \quad \vec{V}(P \in S_1/R_2) = \vec{\Omega}_\perp(S_1/R_2) \wedge \vec{IP}$$

Avec : $\vec{\Omega}_\perp(S_1/R_2) = [\vec{\Omega}(S_1/R_2) \cdot \vec{n}] \cdot \vec{n}$

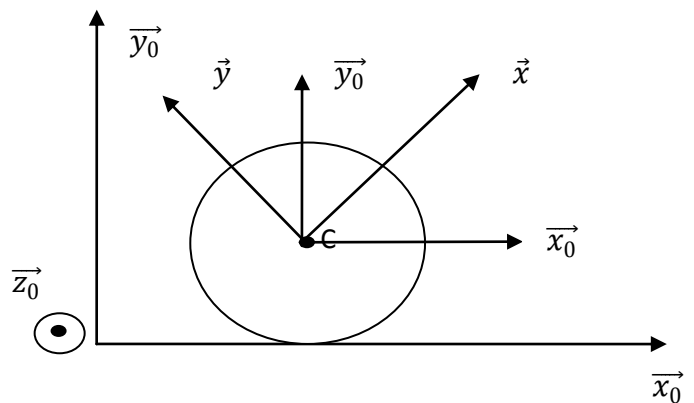
• Le roulement

$$P \in (S_1) \quad \vec{V}(P \in S_1/R_2) = \vec{\Omega}_{//}(S_1/R_2) \wedge \vec{IP}$$

Avec : $\vec{\Omega}_{//}(S_1/R_2) = \vec{\Omega}(S_1/R_2) - \vec{\Omega}_\perp(S_1/R_2)$

➤ **Exemple1 :**

Disque (D) homogène, de centre C et de rayon r en mouvement plan dans $[O, \vec{x}_0, \vec{y}_0]$ et en contact avec $\vec{Ox}_0$ fixe du $R_0[O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0]$ fixe orthonormé direct.



Soit $[\pi]$ le plan tangent commun. On a : $[\pi] = [I, \vec{x}_0, \vec{y}_0]$

$$\vec{\Omega}_{\perp}(D/R_0) = \vec{\Omega}_{plan}(D/R_0) = [\vec{\Omega}(D/R_0) \cdot \vec{y}_0] = \vec{0}$$

$$\vec{\Omega}_{\parallel}(D/R_0) = \vec{\Omega}(D/R_0) - \vec{\Omega}_{\perp}(D/R_0) = \dot{\phi} \vec{z}_0$$

Non glissement ?

On a : $\vec{OI} = x \vec{x}_0$

1^{ère} méthode :

$$\vec{V}(I \in D/R_0) = [\vec{V}(P \in D/R_0)]_{P \equiv I}$$

$$\vec{OP} = \vec{OI} + \vec{IG} + \vec{GP} = x \vec{x}_0 + R \vec{y}_0 + R \vec{x}$$

$$\text{Donc : } \left[\frac{d\vec{OP}}{dt} \right]_{P \equiv I} = [\vec{V}(G/R_0) + \vec{\Omega}(D/R_0) \wedge \vec{GP}]_{P \equiv I}$$

$$\vec{OG} = \vec{OI} + \vec{IG} = x \vec{x}_0 + R \vec{y}_0$$

$$\vec{V}(G/R_0) = \dot{x}\vec{x}_0$$

$$\vec{\Omega}(D/R_0) \wedge \vec{GP} = \dot{\phi}\vec{z}_0 \wedge R\vec{x} = R\dot{\phi}\vec{y}$$

$$\vec{V}(P/R_0) = \dot{x}\vec{x}_0 + R\dot{\phi}\vec{y}$$

$$P \equiv I \quad \leftrightarrow \quad \varphi = \frac{3\pi}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \vec{x} = -\vec{y}_0 \\ \vec{y} = \vec{x}_0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \vec{x} = \cos\varphi\vec{x}_0 + \sin\varphi\vec{y}_0 \\ \vec{y} = -\sin\varphi\vec{x}_0 + \cos\varphi\vec{y}_0 \end{cases}$$

$$\vec{V}(I \in D/R_0) = [\vec{V}(P \in D/R_0)]_{P \equiv I} = [\dot{x}\vec{x}_0 + R\dot{\phi}\vec{y}]_{\varphi=\frac{3\pi}{2}} = (\dot{x} + R\dot{\phi})\vec{x}_0 \in \pi$$

Non glissement de (D) par rapport à R_0 $\dot{x} + R\dot{\phi} = 0$

✓ **2^{ème} méthode :**

I représente un point réel $\in (D)$

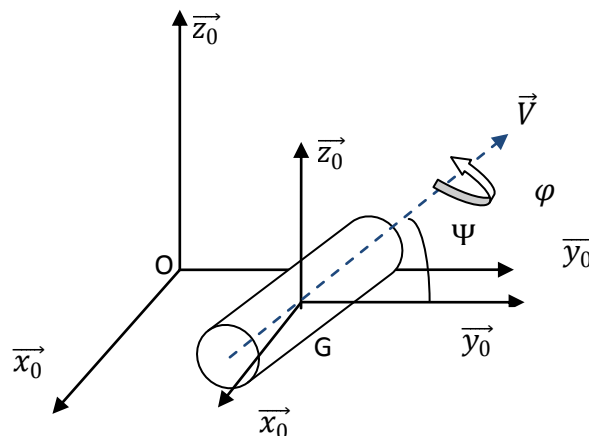
$$\vec{V}_g(D/R_0) = \vec{V}(I \in D/R_0) = \vec{V}(G/R_0) + \vec{\Omega}(D/R_0) \wedge \vec{GI} = \dot{x}\vec{x}_0 + \dot{\phi}\vec{y}_0 \wedge -R\vec{y}_0 = (\dot{x} + R\dot{\phi})\vec{x}_0$$

Non glissement $\dot{x} + R\dot{\phi} = 0 \quad \rightarrow \quad x + R\phi = x_0 + R\phi_0 = cte$

$$\phi = \frac{cte - x}{R}$$

➤ **Exemple2 :**

On considère un cylindre homogène de rayon à la base R, de centre G, de hauteur h en contact suivant l'une de ses génératrice avec le plan horizontal fixe $[O, \vec{x}_0, \vec{y}_0]$



$$\vec{\Omega}(D/R_0) = \dot{\Psi}\vec{z}_0 + \dot{\phi}\vec{V}$$

$$(\pi) = [I, \vec{x}_0, \vec{y}_0]$$

$$\overrightarrow{\Omega_{\text{piv}}}(D/R_0) = \dot{\Psi}\vec{z}_0$$

$$\overrightarrow{\Omega_{\text{roul}}}(D/R_0) = \dot{\phi}\vec{V}$$

Non glissement de D par rapport à R₀

Si (Δ) génératrice de contact à l'instant t considéré

$$\forall I \in (D) \quad \vec{V}(I \in D/R_0) = \vec{0}$$

Soit I ∈ (D) non glissement en J

J projection de G par rapport à (Δ). $\vec{V}(J \in D/R_0) = \vec{V}(G/R_0) + \vec{\Omega}(D/R_0) \wedge \vec{GJ}$

$$\vec{\Omega}(D/R_0) \wedge \vec{GJ} = [\dot{\Psi}\vec{z}_0 + \dot{\phi}\vec{V}] \wedge -R\vec{z}_0 = -R\dot{\phi}(\vec{V} \wedge \vec{z}_0) = -R\dot{\phi}\vec{u}$$

$$\vec{V}(J \in D/R_0) = [\dot{x}\vec{x}_0 + \dot{y}\vec{y}_0 - R\dot{\phi}\vec{u}]$$

$$\vec{u} = \cos\Psi\vec{x}_0 + \sin\Psi\vec{y}_0$$

Donc la vitesse de glissement en J est : $\vec{V}(J \in D/R_0) = \begin{pmatrix} \dot{x} - R\dot{\phi}\cos\Psi \\ \dot{y} - R\dot{\phi}\sin\Psi \\ 0 \end{pmatrix}$

Non glissement en J $\begin{cases} \dot{x} - R\cos\Psi = 0 \\ \dot{y} - R\sin\Psi = 0 \end{cases}$ c'est une liaison non holonome

