UNIVERSITÉ MOHAMMED V
FACULTÉ DES SCIENCES
Rabat

cours :

Mécanique de solide

SMP3 2014-2015

KAMAL GUERAOUI
Professeur de l'Enseignement Supérieur et Responsable de l'Equipe de Modélisation en Mécanique des Fluides et en Environnement

Chapitre 1: Champs de vecteurs et Torseurs

I. Champs de vecteurs

1. Types de vecteurs

a. vecteur libre

On dit qu’un vecteur est libre s’il est défini par ses trois éléments ; sa longueur, sa direction et son sens.

b. vecteur glissant

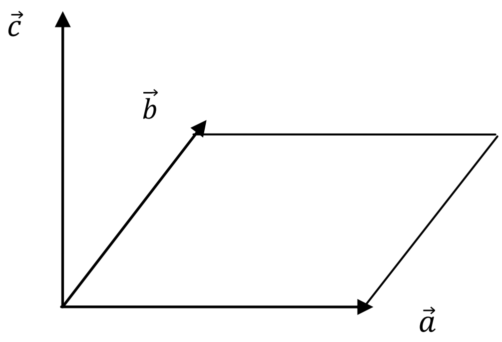
On dit qu’un vecteur est glissant s’il est défini en plus des trois éléments précédents par son support (D).

c. vecteur lié

On dit qu’un vecteur est lié si son point d’application est défini.

2. Produit vectoriel :

2.1. Définition :



$\vec{a} \in R^3, \vec{b} \in R^3$ $\quad \vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$

$\vec{c}$ Vecteur glissant

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ Direct et $\vec{c} \perp \vec{a}$ et $\vec{c} \perp \vec{b}$

$\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \left|\sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})\right|$

Représente l’aire du parallélogramme construit à partir des deux vecteurs $(\vec{a}, \vec{b})$

2.2. Propriétés :

- $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$ anti-commutativité
- $\vec{a} \wedge (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \vec{c}$
- Si $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{0}$ soit $\vec{a} = \vec{0}$ ou $\vec{b} = \vec{0}$ ou $\vec{a} \parallel \vec{b}$
- Base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

$$\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$$

$\vec{\imath}.\vec{\jmath}, = \vec{\jmath}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{\imath} = 0$ $\quad\quad$ $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$ $\quad\quad$ $\vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath}$

$\vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$

2.3. Double produit vectoriel :

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \wedge \vec{c} = (\vec{a}.\vec{c}).\vec{b} - (\vec{b}.\vec{c}).\vec{a}$$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a}.\vec{b}).\vec{b} - (\vec{a}.\vec{c}).\vec{c}$$

2.4. Produit Mixte :

$\vec{u}.(\vec{v} \wedge \vec{w}) \overset{not\acute{e}\ aussi}{\Longleftrightarrow} (\vec{u}.\vec{v}.\vec{w})$ Invariant par mutation circulaire =$(\vec{w}.\vec{u}.\vec{v})$ =$(\vec{v}.\vec{w}.\vec{u})$

Par contre $(\vec{u}.\vec{v}.\vec{w}) = -(\vec{v}.\vec{u}.\vec{w})$

Le produit mixte représente le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}\ et\ \vec{w}$

3. Application linéaire de $\mathrm{R}^3 \rightarrow \mathrm{R}^3$

On appelle application L de $\mathrm{R}^3 \rightarrow \mathrm{R}^3$ une relation mathématique définit par :

$$L: \vec{u} \in R^3 \quad \rightarrow \quad L(\vec{u}) \in R^3$$

L est linéaire si et seulement si $\forall \alpha \in R \qquad \forall \beta \in R$

$$L(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}) = \alpha L(\vec{u}) + \beta L(\vec{v})$$

Si $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ est une base orthonormée de $R^3 alors\ L$ est représentée par une matrice $IL\ associée$ à L.

$$IL = (l_{ij})_{i,j\in 3} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} l(e_1) & l(e_2) & l(e_3) \end{array} \\ \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$l_{ij} = \vec{e_i}.L(\vec{e_j})$$

4. Application linéaire antisymétrique

4.1. Définition

L est linéaire de $R^3 \rightarrow R^3$

L est antisymétrique $\rightarrow \quad \forall \vec{u} \in R^3, \quad \forall \vec{v} \in R^3 \quad \vec{v}.L(\vec{u}) = -\vec{u}.L(\vec{v})$

4.2. Propriété :

Si L est antisymétrique alors il existe $\vec{R}$ un vecteur associé à L tel que

$\forall \vec{u} \in R^3 \quad L(\vec{u}) = \vec{R} \wedge \vec{u}$

- ***Démonstration :***

$$L(\vec{u}) = \vec{R} \wedge \vec{u}$$

$\forall \vec{u} \in R^3 \qquad \vec{u}.L(\vec{u}) = -\vec{u}.L(\vec{u}) = 0$

$\forall \vec{u} \in R^3 \qquad \vec{u}.L(\vec{u}) = 0 \leftrightarrow \vec{u} \perp L(\vec{u})$ donc $L(\vec{u}) = \vec{R} \wedge \vec{u}$ unicité.

On suppose $\overrightarrow{R_1}$ et $\overrightarrow{R_2}$: $\forall \vec{u} \in R^3 \quad L(\vec{u}) = \overrightarrow{R_1} \wedge \vec{u}$ et $L(\vec{u}) = \overrightarrow{R_2} \wedge \vec{u}$

En faisant la soustraction de ces deux expressions, on obtient :

$$\vec{0} = \overrightarrow{R_1} \wedge \vec{u} - \overrightarrow{R_2} \wedge \vec{u}$$

$$\vec{0} = \left(\overrightarrow{R_1} - \overrightarrow{R_2}\right) \wedge \vec{u} \qquad \forall \vec{u} \rightarrow \qquad \overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{R_2}$$

Calcul pratique de $\vec{R}$:

Soit $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ base orthonormée direct de R^3

$\vec{R} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} \overrightarrow{e_i} \wedge L(\overrightarrow{e_i}) \qquad \vec{R} = \begin{vmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{vmatrix}$

$L(\overrightarrow{e_1}) = \vec{R} \wedge \overrightarrow{e_1}$

$L(\overrightarrow{e_2}) = \vec{R} \wedge \overrightarrow{e_2}$ donc $\overrightarrow{e_1} \wedge L(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1} \wedge \left(\vec{R} \wedge \overrightarrow{e_1}\right) = \vec{R} - R_1\overrightarrow{e_1}$

$L(\overrightarrow{e_3}) = \vec{R} \wedge \overrightarrow{e_3} \quad donc \quad \overrightarrow{e_2} \wedge L(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_2} \wedge \left(\vec{R} \wedge \overrightarrow{e_2}\right) = \vec{R} - R_2\overrightarrow{e_2}$

$\overrightarrow{e_3} \wedge L(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{e_3} \wedge \left(\vec{R} \wedge \overrightarrow{e_3}\right) = \vec{R} - R_3\overrightarrow{e_1}$

5. Champs vectoriels :

5.1. Définition 1 :

On appelle champ de vecteurs $\vec{\tau}$, l'application définit par : $\forall\vec{P} \in R^3 \to \vec{\tau}(P) \in R^3$

Ce champ est uniforme si $\vec{\tau}(P) = \overrightarrow{cst}$

Ce champ est central si $\exists A \in R^3, \forall P \in R^3 \qquad \vec{\tau}(P) \parallel \overrightarrow{AP}$

5.2. Définition 2 :

Le champ $\vec{M}$ est affine s'il existe un point $A \in R^3$ et une application linéaire L de $R^3 \to R^3$ tel que :

$$\forall P \in R^3 \qquad \vec{M}(P) = \vec{M}(A) + L(\overrightarrow{AP})$$

5.3. Définition 3 :

$\vec{M}$ est affine et antisymétrique si de plus L est antisymétrique.

$\vec{M}$ antisymétrique $\to \forall P \in R^3 \qquad \vec{M}(P) = \vec{M}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AP}$

Où : $\vec{R}$ est le vecteur associé à L.

5.4. Propriété :

$$\forall P \in R^3, \forall Q \in R^3 \qquad \vec{M}(P) = \vec{M}(Q) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{QP}$$

En effet $\forall P \in R^3 \qquad \vec{M}(P) = \vec{M}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AP}$

$\forall Q \in R^3 \qquad \vec{M}(Q) = \vec{M}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AQ}$

$$\vec{M}(P) - \vec{M}(Q) = \vec{R} \wedge \overrightarrow{AP} - \vec{R} \wedge \overrightarrow{AQ} = \vec{R} \wedge \left(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AQ}\right) = \vec{R} \wedge \overrightarrow{QP}$$

5.5. Définition :

Un champ vectoriel $\vec{M}$ est équiprojectif ssi :

$$\forall P \in R^3, \forall Q \in R^3 \qquad \overrightarrow{QP}.\left(\vec{M}(P) - \vec{M}(Q)\right) = 0$$

Démonstration :

D'une part :

$\vec{M}$ est équiprojectif $\forall P \in R^3, \forall Q \in R^3$, $\left(\vec{M}(P) - \vec{M}(Q)\right).\overrightarrow{QP} = 0,$

donc $\overrightarrow{QP}$ $est\ perpendiculaire$ à $\left(\vec{M}(P) - \vec{M}(Q)\right)$ par conséquent il existe un vecteur $\vec{R}$ tel que : $\vec{M}(P) - \vec{M}(Q) = \vec{R} \wedge \overrightarrow{QP}$, d'où le champs est antisymétrique.

II. Torseurs :

1. Définition :

Un torseur τ est objet mathématique défini par la donnée de deux vecteurs :

- Un champ vectoriel antisymétrique noté $\vec{M}$ appelé champ de moment de τ
- un vecteur $\vec{R}$ associé à ce champ appelé résultante de τ

2. Remarque :

$\vec{R}$ est indépendant du point P (mais il peut dépendre de d'autres paramètres, exemple, le temps t).

$\{\vec{R}, \vec{M}(A)\}$ sont appelés éléments de réduction de τ en A .

La donnée des éléments de réduction en A détermine complément τ

En effet $\forall P \in R^3$

$\vec{M}(P) = \vec{M}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AP}$ Formule de distribution des champs de moments de τ

- **Exemple :**

L'étude de (S) par rapport à R

Soit $\vec{f}(P \in S)$ la densité δ des efforts appliqués sur (S) par rapport à R.

- **_Démonstration :_**

$$\begin{cases} \vec{f}(P \in S)\ si\ P \in S \\ \quad \vec{0} \qquad si\ non \end{cases}$$

$$\forall A \qquad \vec{M}(A) = \int \overrightarrow{AP} \wedge \vec{f}(P \in S)dm$$

Est-ce $\vec{M}$ un champ de moments de torseur ?

$$\forall A, \forall B \qquad \vec{M}(A) = \int \overrightarrow{AP} \wedge \vec{f}(P \in S)dm$$

$$= \int \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}\right) \wedge \vec{f}(P \in S)dm$$

$$= \int \overrightarrow{AB} \wedge \vec{f}(P \in S)dm + \int \overrightarrow{BP} \wedge \vec{f}(P \in S)dm$$

$$\vec{M}(A) = \overrightarrow{AB} \wedge \int \vec{f}(P \in S)dm + \vec{M}(B)$$

On pose $\vec{R} = \int \vec{f}(P \in S)dm$ indépendant de P, la densité $\vec{f}(P \in S)$ définit un torseur τ

5. Définition :

On appelle invariant scalaire I du torseur $\tau\{\vec{R}, \vec{M}(A)\}$ le scalaire $I = \vec{R}.\vec{M}(A)$

6. Remarque :

Cette quantité I est indépendante du point A utilisé pour le calculer.

$$\forall P \in R^3 \qquad I = \vec{R}.\vec{M}(A) = I = \vec{R}.\vec{M}(P)$$

- **_Démonstration :_**

$$\forall P \in R^3 \qquad I = \vec{R}.\vec{M}(A) = \vec{R}.\left[\vec{M}(P) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{PA}\right]$$

$$= \vec{R}.\vec{M}(A) + \vec{R} \wedge \left(\vec{R} \wedge \overrightarrow{PA}\right) = \vec{R}.\vec{M}(P)$$

- Axe centrale d'un torseur :

L'axe central d'un torseur $\tau\{\vec{R} \neq \vec{0}, \vec{M}(A)\}\ avec\ A \in R^3$ est par définition l'ensemble des points $P \in R^3$ tels que $\vec{M}(P) \parallel \vec{R}$

L'axe central de $\tau\{\vec{R} \neq \vec{0}, \vec{M}(A)\}$ est une droite Δ de R^3

- ***Démonstration :***

$$\forall P \in R^3 \qquad \qquad \vec{M}(P) = \vec{M}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP}$$

On décompose $\vec{M}(P)$ $de\ la\ manière\ suivante$ $\vec{M}(P) = \vec{\beta} + \vec{\alpha}(P)$ et $\vec{M}(O) = \vec{\beta} + \vec{\alpha}(O)$

Les vecteurs $\vec{\beta}$ sont indépendants de P.

$\vec{\beta} + \vec{\alpha}(P) = \vec{\beta} + \vec{\alpha}(O) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{OP}$

On cherche $P\ /\vec{M}(P) \parallel \vec{R} \leftrightarrow P/\vec{\alpha}(P) = \vec{0}$

$\overrightarrow{OP} \wedge \vec{R} = \vec{\alpha}(O)$ [Division vectorielle → T.D]

D'après l'exercice 5 de la série 1, on a :

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{\alpha}(O)}{\|\vec{R}\|^2} + \lambda\vec{R}$$

Donc :

$$\overrightarrow{OP} = \frac{\vec{R} \wedge \vec{M}(O)}{\|\vec{R}\|^2} + \lambda\vec{R}$$

L'axe central du torseur $\tau\{\vec{R} \neq \vec{0}, \vec{M}(A)\}$

$\Delta = (P_0, \vec{R})$

En pratique $R(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ si $\vec{R} = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ $\qquad \vec{M}(P) = \begin{vmatrix} f(x,y,z) \\ g(x,y,z) \\ h(x,y,z) \end{vmatrix}$

$\Delta = (P/\vec{M}(P) = \lambda\vec{R}, \lambda \in R)$

Les équations cartésiennes de Δ sont : $\frac{f(x,y,z)}{a} = \frac{g(x,y,z)}{b} = \frac{h(x,y,z)}{c}$

7. Operateur sur les torseurs

a. Egalité de deux torseurs :

Soit $A \in R^3$, $\tau_1[\overrightarrow{R_1}, \overrightarrow{M_1}(A)]$ et $\tau_2[\overrightarrow{R_2}, \overrightarrow{M_2}(A)]$

$\tau_1 = \tau_2 \rightarrow$ Les résultantes sont égales $\overrightarrow{R_1} = \overrightarrow{R_2}\ et\ \ \exists\, B \in R^3\ /\ \overrightarrow{M_1}(B) = \overrightarrow{M_2}(B)$

- ***Démonstration :***

$A \in R^3$ $\overrightarrow{M_1}(P) = \overrightarrow{M_1}(B) + \overrightarrow{R_1} \wedge \overrightarrow{\mathrm{BP}} = \overrightarrow{M_2}(B) + \overrightarrow{R_2} \wedge \overrightarrow{\mathrm{BP}} = \overrightarrow{M_2}(P)$

b. Somme de deux torseurs :

$\tau\ [\overrightarrow{R}, \overrightarrow{M}(A)]$ $\tau = \tau_1 + \tau_2 = [\vec{R} = \overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_2}, \vec{M}(A) = \overrightarrow{M_1}(A) + \overrightarrow{M_2}(A)]$

d. Multiplication d'un torseur par un scalaire :

$$\tau = \alpha\tau_1\ avec\ (\alpha \in R) \rightarrow \tau = [\vec{R} = \alpha\overrightarrow{R_1}, \vec{M}(A) = \alpha\overrightarrow{M_1}(A)]$$

e. Torseur nul :

On dit que le torseur $\tau est\ nul\ si\ et\ seulemnt\ si\ \leftrightarrow [\vec{R} = \vec{0}, \vec{M}(A) = \vec{0}]$

8. Produit de deux torseurs :

Le produit de deux torseurs τ_1 et τ_2 est un scalaire défini par :

$\tau_1.\tau_2 = \overrightarrow{R_1}.\overrightarrow{M_2}(A) + \overrightarrow{R_2}.\overrightarrow{M_1}(A)$ Au même point A.

La valeur de $(\tau_1.\tau_2)$ est indépendante de A choisi dans R^3.

Remarque :

$$\vec{\tau}.\vec{\tau} = \vec{R}.\vec{M}(P) + \vec{R}.\vec{M}(P) = 2\vec{R}.\vec{M}(P) = 2I$$

9. Torseurs particuliers :

a. Les glisseurs :

1. Définition :

τ est un glisseur noté g , si $\exists A \in R^3\ \ \vec{M}(A) = \vec{0}$

$$\forall P \in R^3 \quad \vec{M}(P) = \vec{R} \wedge \overrightarrow{AP}$$

2. Conséquences :

$$\forall P \in R^3 \quad \vec{M}(P) \perp \vec{R}$$

$$I = \vec{R}.\vec{M}(P) = 0$$

L'axe central de τ: $\Delta = \left(P \in R^3 / \vec{M}(P) = \vec{0}\right) = (A, \vec{R})$

On note $\tau = \left(A, \vec{R}\right) = \left[\vec{R}, \vec{M}(P) = \vec{0}\right]$

3. Exemple :

Soit F une force concentrée $A \in (S)$.

Densité $\vec{f}(P \in S) = \begin{cases} \vec{F} & si\ P \equiv A \in (S) \\ \vec{0} & ailleurs \end{cases}$

$$\overrightarrow{M_A}\left(\vec{F}\right) = \vec{0} = \overrightarrow{AA} \wedge \vec{F}$$

$(A, \vec{R})$ est un glisseur $g = (A, \vec{F})$

$$\forall P \qquad \vec{M}(P) = \overrightarrow{PA} \wedge \vec{F} = \vec{F} \wedge \overrightarrow{AP}$$

b. Les couples :

1. Définition :

τ est un couple $si\ et\ seulement\ si\ \ \vec{R} = \vec{0}$

2. Conséquences :

$$\forall A, \forall Q \in R^3 \qquad \vec{M}(P) = \vec{M}(Q) = \vec{M}$$

$Le\ champ\ de\ moments\ est\ uniforme$

$$I = 0 = \vec{R}.\vec{M}(P)$$

3. Exemples :

Sur (S) $\begin{cases} \vec{F} & en \quad A \in (S) \\ -\vec{F} & en \quad B \in (S) \\ \vec{0} & ailleurs \end{cases}$

$$\vec{R} = \vec{F} + \left(-\vec{F}\right) = \vec{0} \qquad \rightarrow \qquad Couple = \left(A, \vec{F}\right).\left(B, -\vec{F}\right)$$

$$\forall P \in R^3 \qquad \vec{M}(P) = \vec{F} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AP}} - \vec{F} \wedge \overrightarrow{\mathrm{BP}} = \vec{F} \wedge \left(\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{BP}}\right)$$

$$= \vec{F} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$