



**UNIVERSITÉ MOHAMMED V - AGDAL**

**FACULTÉ DES SCIENCES**

**RABAT**



*Master: Énergie et technologie des matériaux  
E.T.M*

# CONVECTION NATURELLE EN MILIEU CONFINE OU EN MILIEU POREUX

**KAMAL GUERAOU**

**Professeur de l'Enseignement Supérieur et Responsable de l'Équipe de Modélisation  
en Mécanique des Fluides et en Environnement**

**ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2011 □ 2012**

---

## **INTRODUCTION GÉNÉRALE**

---

Le phénomène de transfert de chaleur et de masse par la convection naturelle, dans des espaces confinés ou semi-confinés, est généralement dû à la présence des gradients de température et de concentration. Ces gradients causent une distribution non uniforme de la densité du mélange qui provoque à son tour un mouvement convectif sous l'effet de la gravité. Le contenu des espaces peut être un milieu fluide ou un milieu poreux saturé par un fluide. Dans la plupart des situations, que ce soit dans la nature ou dans l'industrie, le fluide est constitué de deux ou plusieurs composants. Ainsi, les écoulements naturels engendrés portent le nom de convection naturelle en double diffusion lorsque le fluide est binaire ou bien de convection thermosolutale lorsque le fluide est composé de deux ou plusieurs constituants.

Le phénomène de la convection thermosolutale est fréquemment rencontré dans la nature. Les exemples sont multiples et nous pouvons en citer quelques-uns : les mouvements convectifs dans les océans qui sont dus, d'une part, à la présence de gradient de température et, d'autre part, à la distribution non uniforme de la concentration du sel, la dispersion des polluants dans l'atmosphère (gaz nocifs) et dans le sol (déchets nucléaires) et la migration de l'humidité ou des sels minéraux dans les sols. Par ailleurs, les transferts de chaleur et de masse par convection sont aussi omniprésents. Ces phénomènes interviennent, par exemple, lors des mécanismes de changement de phase des métaux où la convection affecte directement la structure micrographique et les propriétés mécaniques et thermophysiques des alliages, lors des procédés de séchage de différents produits industriels et domestiques, au cours de divers procédés thermochimiques et électrochimiques, lors des stockages des gaz liquides, dans les pompes à chaleurs à absorption ou à adsorption, dans les réacteurs chimiques, dans les procédés d'oxydation ou de traitement des surfaces métalliques et lors de la migration de l'humidité dans les fibres destinées à l'isolation thermique.

Ce polycopié présente la formulation mathématique du problème de la convection naturelle laminaire d'un fluide newtonien confiné dans une enceinte cylindrique d'axe vertical chauffé par le bas. Le fluide est considéré incompressible et l'approximation de Boussinesq est introduite.

- ↳ Les mouvements de convection naturelle sont régis, dans le cas d'un milieu fluide libre et purement thermique par les équations de Navier-Stokes déduites des bilans de masse et de quantité de mouvement auxquelles il convient d'ajouter l'équation de l'énergie déduite du premier principe de la thermodynamique.
- ↳ Ensuite une formulation vorticité-fonction de courant est introduite et le nouveau système d'équations à résoudre est développé sous la forme divergence et convective.

- 
- ↪ Après présentation des équations scalaires et des conditions aux limites exprimées dans le système cylindrique, une adimensionnalisation du système ainsi obtenu est alors effectuée.
  - ↪ Ensuite nous abordons la formulation spécifique à la convection thermique ; à la magnétoconvection et à la convection thermosolutale.
  - ↪ Nous précisons pour chaque problème la nature des forces extérieures ; les groupements adimensionnels et éventuellement les équations supplémentaires à prendre en compte.
  - ↪ Pour les milieux poreux deux formulations seront présentées EBFD et REB dans un volume de contrôle.
  - ↪ Ce polycopié sera terminé par la présentation de paramètres permettant de quantifier les transferts de chaleur et de masse : Nombre de Nusselt et Nombre de Sherwood.

---

**PARTIE A**  
**PROBLEME DE CONVECTION EN MILIEU CONFINE**

---

# Chapitre 1

## Formulation mathématique

---

## 1- EQUATIONS EN MILIEU FLUIDE LIBRE

### 1.1- Equation de conservation de la masse (Equation de continuité)

La conservation de la masse de tout système matériel est un principe fondamental de la mécanique classique il implique que :

$$\frac{dm}{dt} = 0$$

D'où :

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) \right] d\Omega = 0$$

Ce qui donne :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0$$

Pour un fluide incompressible, on trouve

$\text{div}(\vec{v}) = 0 \quad (1)$
-------------------------------------

### 1.2- Equation de conservation de la quantité de mouvement

La variation de la quantité de mouvement linéaire de toute partie  $\Omega$  d'un milieu continu qu'on suit dans son mouvement est équilibrée par l'action des forces de volume (forces à distance) et les forces de contact exercées sur le contour de  $\Omega$ .

Les forces à distance sont généralement connues (Ex : gravité,....).

Les forces de contact exercées sur le contour de  $\Omega$  par la matière environnement sont des actions extérieures à  $\Omega$  mais intérieures au système milieu continu ce sont les efforts de cohésion du milieu continu.

Cauchy suppose l'existence d'une densité surfacique de force  $\vec{T}(\vec{n}, X, t)$  définit pour tout vecteur unitaire  $\vec{n}$  en tout point  $(X, t)$  du milieu continu. Donc  $\vec{T}(\vec{n}, X, t)$  représente la force par unité de surface exercée par la matière située du coté positif de  $\vec{n}$  sur la matière située du coté négatif de  $\vec{n}$ , les forces de contact exercées sur  $\Omega$  sont alors.

$$\vec{F}_{cont} = \int_S \vec{T}(\vec{n}, X, t) dS \quad ; \quad \text{Forces de contact.}$$

$$\vec{F}_{adis} = \int_{\Omega} \vec{f} d\Omega \quad ; \quad \text{Forces à distance, avec f est une densité volumique.}$$

$$\text{Or :} \quad \vec{T}(\vec{n}, X, t) = \Sigma(X, t) \vec{n}$$

Avec  $\Sigma(\mathcal{X}, t)$  appelé tenseur des contraintes.

D'où la loi de conservation de la quantité de mouvement linéaire s'écrit sous la forme suivante :

$$\int_{\Omega} \rho \frac{d\vec{v}}{dt} d\Omega = \int_S \Sigma(\mathcal{X}, t) dS + \int_{\Omega} \vec{f} d\Omega \quad (2)$$

Or  $\int_S \Sigma(\mathcal{X}, t) dS = \int_{\Omega} \text{div} \Sigma(\mathcal{X}, t) d\Omega$

D'où :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \text{div} \Sigma(\mathcal{X}, t) + \vec{f} \quad (3)$$

Pour un fluide visqueux :

$$\Sigma(\mathcal{X}, t) = -\mathcal{P}\mathbf{I} + \tau(\mathcal{X}, t) \quad (4)$$

-  $\mathcal{P}\mathbf{I}$  : est le tenseur des contraintes normales.

$\tau(\mathcal{X}, t)$  : est le tenseur des contraintes visqueuses.

$$\tau(\mathcal{X}, t) = \left( \xi - \frac{2}{3} \mu \right) \text{div}(\vec{v}) \delta + 2\mu \mathbf{D} \quad (5)$$

$\mathbf{D}$  : est appelé tenseur du taux de déformation.

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left[ \text{div}(\vec{v}) + (\text{div}(\vec{v}))^T \right] \quad (6)$$

D'où :

$$\tau(\mathcal{X}, t) = \left( \xi - \frac{2}{3} \mu \right) \text{div}(\vec{v}) \delta + \mu \left[ \text{div}(\vec{v}) + (\text{div}(\vec{v}))^T \right] \quad (7)$$

$\Omega$  est la viscosité dynamique du fluide (1<sup>ère</sup> viscosité) et  $\Psi$  est appelée 2<sup>ème</sup> viscosité.

D'où l'équation finale de conservation de la quantité de mouvement pour un fluide incompressible ( $\text{div}(\vec{v}) = 0$ ) :

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{gra } \bar{d}(\mathbf{P}) + \mu \Delta \vec{v} + \vec{f} \quad (8)$$

### 1.3- Equation de conservation de l'énergie (Premier principe de la thermodynamique)

A chaque instant, la somme de la dérivée particulaire de l'énergie interne  $E_{\text{int}}$  du système D et de la dérivée particulaire de l'énergie cinétique  $E_C$  est égale à la somme de la puissance des efforts extérieurs exercés sur D dans le mouvement réel et du taux de chaleur reçu par le système D.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho e d\Omega + \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \frac{v^2}{2} d\Omega = \int_{\Omega} (\bar{f}\bar{v} + r) d\Omega + \int_S (\bar{T}\bar{v} - \bar{q}\bar{n}) dS \quad (9)$$

$\bar{q}$  : est le vecteur flux de chaleur sortant au point M de normale  $\bar{n}$  ;  $r$  est la densité volumique de chaleur échangée par le système par rayonnement et  $e$  est une densité massique de l'énergie interne.

D'après le théorème de l'énergie cinétique on a :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \frac{v^2}{2} d\Omega = \int_{\Omega} \bar{f}\bar{v} d\Omega + \int_S \bar{T}\bar{v} dS - \int_{\Omega} \Sigma : \mathcal{D} d\Omega \quad (10)$$

On introduit l'équation (10) dans l'équation (9), on trouve :

$$\int_{\Omega} \rho \frac{de}{dt} d\Omega = \int_{\Omega} (\Sigma : \mathcal{D} + r) d\Omega - \int_S \bar{q}\bar{n} dS \quad (11)$$

Or, d'après le théorème de la divergence, on a :

$$\rho \frac{de}{dt} = \Sigma : \mathcal{D} + r - \text{div}(\bar{q}) \quad (12)$$

$$\text{Avec : } \Sigma = -\mathcal{P}\delta + 2\mu\mathcal{D}$$

$$\Sigma : \mathcal{D} = -\mathcal{P}\delta : \mathcal{D} + 2\mu\mathcal{D} : \mathcal{D} = -\mathcal{P}I_{\alpha} + \mu\phi \quad (13)$$

$$\delta : \mathcal{D} = \text{tra}(\mathcal{D}) = I_{\alpha} = \text{div}(\bar{v}) = 0$$

$$\Sigma : \mathcal{D} = \mu\phi$$

$\delta$  : Est appelée fonction de dissipation visqueuses de Rayleigh.

L'enthalpie massique s'écrit sous la forme :

$$\hat{h} = e + \frac{\mathcal{P}}{\rho} \quad (14)$$

D'où :

$$\rho \frac{de}{dt} = \rho \frac{d\hat{h}}{dt} - \frac{d\mathcal{P}}{dt} \quad (15)$$

Or :  $h$  est une fonction de la température et de la pression, d'où :

$$\frac{d\hat{h}}{dt} = \frac{\partial \hat{h}}{\partial \mathcal{T}} \frac{d\mathcal{T}}{dt} + \frac{\partial \hat{h}}{\partial \mathcal{P}} \frac{d\mathcal{P}}{dt} = C_p \frac{d\mathcal{T}}{dt} + \frac{1}{\rho} (1 - \beta_T \mathcal{T}) \frac{d\mathcal{P}}{dt}$$

Car :

$$C_p = \frac{\partial \hat{h}}{\partial \mathcal{T}} \quad (16) ;$$

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial \mathcal{P}} = \frac{1}{\rho} (1 - \beta_T \mathcal{T}) \quad (17)$$

$$\beta_T = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (18)$$

On introduit les équations (16) et (17) dans l'équation (15), on trouve :

$$\rho \frac{de}{dt} = \rho C_p \frac{dT}{dt} - \beta_T T \frac{dP}{dt} \quad (19)$$

On introduit les équations (19) et (13) dans l'équation (12), on trouve :

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = -\text{div}(\vec{q}) + r + \mu\phi + \beta_T T \frac{dP}{dt} \quad (20)$$

En convection naturelle, lorsque les vitesses de l'écoulement et les pressions mises en jeu sont relativement faibles, on néglige les termes de compressibilité et de dissipation devant les autres termes de l'équation de l'énergie et on prend  $r=0$  (pas d'échange à distance).

$$\rho C_p \frac{dT}{dt} = -\text{div}(\vec{q})$$

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad} T \quad (21) \quad \text{c'est la loi classique de Fourier.}$$

L'équation de l'énergie s'écrit finalement sous la forme suivante :

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\lambda}{\rho C_p} \Delta T = K_T \Delta T \quad (22)$$

$K_T$  : est la diffusivité thermique du fluide.

## 2- APPROXIMATION DE BOUSSINESQ

L'approximation de Boussinesq consiste à considérer que les variations de la masse volumique du fluide en fonction de la température sont négligeables sauf dans le terme de poussée (gravité).

$$\rho(T) = \rho_0 + \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p (T - T_0) = \rho_0 [1 - \beta_T (T - T_0)] \quad (24)$$

$\rho_0$  est la masse volumique du fluide à  $T=T_0$ .

Sous ces hypothèses, le système d'équations à considérer qui gouverne le phénomène de la convection naturelle laminaire devient :

**Equation de continuité :**

$$\text{div}(\vec{v}) = 0 \quad (25)$$

**Equations de Navier Stocks :**

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \text{gra } \bar{d}(\mathbf{P}) + \nu \Delta \bar{v} + [1 - \beta_T (T - T_0)] \bar{g} + \bar{f}' \quad (26)$$

Equation de l'énergie :

$$\frac{dT}{dt} = K_T \Delta T \quad (27)$$

---

**Chapitre 2**  
**FORMULATION VORTICITE-FONCTION DE COURANT**

## 1- Introduction

Pour les écoulements bidimensionnels cylindriques, il s'avère commode de remplacer les variables primitives pression et vitesse par la composante non nulle  $\vec{\Omega}$  du vecteur rotationnel de la vitesse et la fonction de courant  $\Psi$ .

$$\vec{\Omega} = \text{rot}(\vec{v}) \quad (28)$$

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial z} \quad (29)$$

et

$$w = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (30)$$

Avec :

$$\vec{v} = u\vec{e}_r + w\vec{e}_z$$

On applique l'opérateur rotationnel à l'équation (26), on trouve :

$$\vec{\nabla} \wedge \left[ \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \text{div}(\vec{v}) \right] = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} \wedge \text{grad}(\mathcal{P}) + \nu \vec{\nabla} \wedge (\Delta(\vec{v})) - \beta_T \vec{\nabla} \wedge (\mathcal{T} - \mathcal{T}_0) \vec{g} + \vec{\nabla} \wedge \vec{f}' \quad (31)$$

On a les relations suivantes :

$$\text{rot}(\text{grad}(f)) = \mathbf{0} \quad (32)$$

et

$$\text{rot} f \cdot \vec{A} = f \cdot \text{rot}(\vec{A}) - \vec{A} \wedge \text{grad}(f) \quad (33)$$

Les équations (32) et (33) donnent :

$$\vec{\nabla} \wedge \text{grad}(\mathcal{P}) = \mathbf{0} \quad (34)$$

et

$$\vec{\nabla} \wedge [\vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v}] = \vec{\nabla} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \wedge \vec{v} - \vec{v} \wedge \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) = \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{\Omega} \quad (35)$$

Vu l'identité :

$$\vec{\nabla} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{\Omega}) = \vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{\Omega} \quad (36)$$

On introduit les équations (34) et (35) dans l'équation (31), on obtient :

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = -(\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{\Omega}) - \beta_T \vec{\nabla} \wedge (\mathcal{T} - \mathcal{T}_0) \vec{g} + \nu \Delta \vec{\Omega} + \vec{\nabla} \wedge \vec{f}' \quad (37)$$

Où :

$$\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{v}) - \beta_T \vec{\nabla} \wedge (\mathcal{T} - \mathcal{T}_0) \vec{g} + \nu \Delta \vec{\Omega} + \vec{\nabla} \wedge \vec{f}' \quad (38)$$

L'équation (37) est la forme convective de l'équation du transport du rotationnel.

L'équation (38) est la forme divergence ou conservative de l'équation du transport du rotationnel.

- la forme convective de l'équation de l'énergie :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} T + k_T \Delta T \quad (39)$$

- la forme divergence de l'équation de l'énergie :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot (T\vec{v}) + k_T \Delta T \quad (40)$$

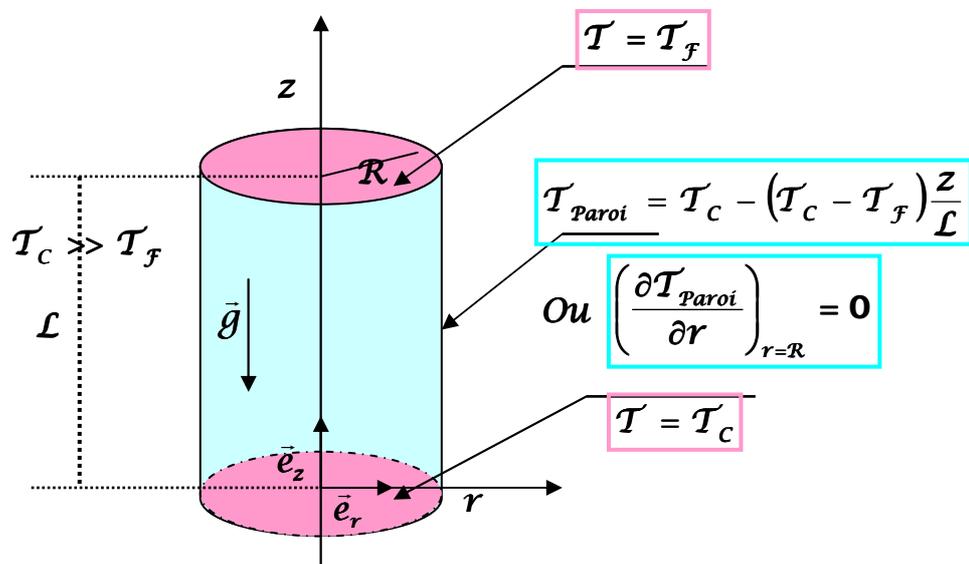
Car : Error! Objects cannot be created from editing field codes.

et  $\vec{\nabla} \vec{v} = \mathbf{0}$

La fonction de courant est reliée au vecteur rotationnel de vitesse par la relation suivante :

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{r} \left[ \Delta \Psi - \frac{2}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right] \vec{e}_\theta \quad (41)$$

## 2- EQUATIONS SCALAIRES



Le système scalaire à résoudre dans le cas de régime stationnaire pour une telle configuration est le suivant :

Equation (38) :

$$\vec{\nabla} \wedge (\nu \Omega \vec{e}_r - u \Omega \vec{e}_z) = -\beta_T \vec{\nabla} \wedge (T - T_0) \vec{g} + \nu \Delta \vec{\Omega} + \vec{\nabla} \wedge \vec{f}' \quad (44)$$

$$\frac{\partial \nu \Omega}{\partial z} + \frac{\partial u \Omega}{\partial r} = -\beta_T g \frac{\partial T}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 \Omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Omega}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} - \frac{\Omega}{r^2} \right) + (\vec{\nabla} \wedge \vec{f}') \cdot \vec{e}_\theta \quad (45)$$

D'où finalement.

$$\frac{1}{r} \frac{\partial ru\Omega}{\partial r} + \frac{\partial w\Omega}{\partial z} - \frac{u\Omega}{r} = -\beta_T g \frac{\partial T}{\partial r} + \nu \left( \Delta\Omega - \frac{\Omega}{r^2} \right) + (\vec{\nabla} \wedge \vec{f}') \cdot \vec{e}_\theta \quad (46)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial ruT}{\partial r} + \frac{\partial wT}{\partial z} = k_T \Delta T \quad (47)$$

$$\Omega = \frac{1}{r} \left( \Delta\Psi - \frac{2}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial r} \right) \quad (48)$$

### 3- CONDITIONS AUX LIMITES

#### 3.1- Conditions aux limites thermiques

##### 3.1.1- Conditions pariétales

Pour  $r=R$  on utilise la loi de Fourier :

$$\gamma \frac{\partial T_{\text{Paroi}}}{\partial r} + (1-\gamma) \left[ T_{\text{Paroi}} - T_C + (T_C - T_F) \frac{z}{L} \right] = 0 \quad (49)$$

$\gamma$  est appelé coefficient d'homotopie égale 0 pour une paroi parfaitement conductrice et 1 pour une paroi parfaitement adiabatique.

##### 3.1.2- Condition de symétrie

$$\frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (50)$$

##### 3.1.3- Conditions d'isothermie sur les bases

$$T = T_C \quad \text{pour } z = 0 \quad (51)$$

$$T = T_F \quad \text{pour } z = L \quad (52)$$

#### 3.2- Conditions aux limites dynamiques

##### 3.2.1- Conditions pariétales

Les conditions pariétales sont les conditions traduisant l'adhérence à la paroi.

Si  $z=0$  ou  $z=L$  on a  $u=w=0$

$$\text{D'où : } \Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial r} = \frac{\partial\Psi}{\partial z} = 0 \quad (53)$$

Si  $r=R$  on a aussi  $u=w=0$

$$\text{D'où : } \Psi = \frac{\partial\Psi}{\partial r} = \frac{\partial\Psi}{\partial z} = 0$$

##### 3.2.1- Conditions de symétrie de l'écoulement

$$\text{Pour } r=0 \text{ (symétrie axiale de l'écoulement), on a : } \frac{\partial\Psi}{\partial z} = 0 \quad (54)$$

On a aussi  $\Psi=0$  (raison de continuité de  $\Psi$ , elle est nulle sur les parois).

---

La condition de l'axisymétrie de l'écoulement permet de réduire le domaine d'étude à la moitié du plan vertical contenant l'axe de la cavité ;

Soit :

$$\mathbf{0 \leq r \leq \mathcal{R}} \quad \text{et} \quad \mathbf{0 \leq z \leq \mathcal{L}} \quad (55)$$

---

**Chapitre 3**  
**ADIMENSIONNALISATION**

## 1- Introduction

La convection thermique fait intervenir un grand nombre de paramètres pouvant varier dans des intervalles très larges. L'adimensionnalisation en regroupant ces paramètres dans des combinaisons sans dimensions, permet d'une part de réduire le nombre des paramètres régissant effectivement le phénomène et d'autre part d'appliquer la description mathématique d'un problème donné à une large classe de problèmes. Cette opération se fait par le choix de certaines grandeurs de référence.

$\mathcal{R}$  : pour la longueur ;

$\frac{k_T}{\mathcal{R}}$  : pour la vitesse ;

$\Delta\mathcal{T} = \mathcal{T}_c - \mathcal{T}_f$  : pour la température et

$f_0$  : pour la densité de force de volume.

Soit :

$$r^* = \frac{r}{\mathcal{R}} ; \quad z^* = \frac{z}{\mathcal{R}} ; \quad u^* = \frac{\mathcal{R}u}{k_T} ; \quad w^* = \frac{\mathcal{R}w}{k_T} ; \quad \theta = \frac{\mathcal{T} - \mathcal{T}_f}{\mathcal{T}_c - \mathcal{T}_f}$$

$$\bar{f}^* = \frac{\bar{f}}{f_0} ; \quad \Omega^* = \frac{\Omega}{k_T} \quad \text{et} \quad \Psi^* = \frac{\Psi}{\mathcal{R}k_T}$$

## 2-Adimensionnalisation de l'équation de conservation de la quantité de mouvement

L'équation traduisant la conservation de la quantité de mouvement, sous forme adimensionnelle, s'écrit :

$$\frac{1}{r^*\mathcal{R}} \frac{\partial \left( r^*\mathcal{R} \cdot \frac{k_T u^*}{\mathcal{R}} \cdot k_T \Omega^* \right)}{\partial r^*\mathcal{R}} + \frac{\partial \left( \frac{k_T w^*}{\mathcal{R}} \cdot k_T \Omega^* \right)}{\partial z^*\mathcal{R}} - \frac{k_T u^*}{\mathcal{R}} \cdot \frac{1}{r^*\mathcal{R}} \cdot k_T \Omega^* = -\beta_T g \frac{\partial}{\partial r^*\mathcal{R}} (\theta \Delta\mathcal{T} + \mathcal{T}_f)_{\mathcal{D}},$$

$$+ \nu \left( \frac{k_T}{\mathcal{R}^2} \Delta \Omega^* - \frac{k_T}{\mathcal{R}^2} \frac{\Omega^*}{r^{*2}} \right) + \frac{f_0}{\mathcal{R}} (\bar{\nabla} \wedge \bar{f}^*) \bar{e}_0$$

où

$$\frac{k_T^2}{\mathcal{R}^2} \left[ \frac{1}{r^*} \frac{\partial (r^* u^* \Omega^*)}{\partial r^*} + \frac{\partial (w^* \Omega^*)}{\partial z^*} - \frac{u^* \Omega^*}{r^*} \right] = -\frac{\beta_T g \Delta\mathcal{T}}{\mathcal{R}} \frac{\partial \theta}{\partial r^*}$$

$$+ \frac{\nu k_T}{\mathcal{R}^2} \left( \Delta \Omega^* - \frac{\Omega^*}{r^{*2}} \right) + \frac{f_0}{\mathcal{R}} (\bar{\nabla} \wedge \bar{f}^*) \bar{e}_0$$

On garde les mêmes notations des variables dimensionnelles pour les variables adimensionnelles, on trouve :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru\Omega)}{\partial r} + \frac{\partial(w\Omega)}{\partial z} - \frac{u\Omega}{r} = \text{Pr} \left( \Delta\Omega - \frac{\Omega}{r^2} \right) - \frac{1}{R^2} \text{Ra Pr} \frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{Rf_0}{k_T^2} (\vec{\nabla} \wedge \vec{f}') \cdot \vec{e}_\theta \quad (56)$$

$$\text{Ra} = \frac{\beta_T g \Delta T R^3}{\nu k_T} \quad (57)$$

Où : Ra Est le nombre de Rayleigh qui mesure le rapport des forces de poussée aux forces visqueuses.

$$\text{Pr} = \frac{\nu}{k_T} \quad (58)$$

Où : Pr Est le nombre de Prandtl qui mesure le rapport entre la diffusivité de la quantité de mouvement et la diffusivité thermique.

### 3-Adimensionnalisation de l'équation de l'énergie

L'équation d'énergie, sous forme adimensionnelle, s'écrit :

$$\frac{1}{r^* R} \frac{\partial \left( r^* R \cdot \frac{k_T u^*}{R} \cdot (\theta \Delta T + T_f) \right)}{\partial r^* R} + \frac{\partial \left( \frac{k_T w^*}{R} \cdot (\theta \Delta T + T_f) \right)}{\partial z^* R} = \frac{k_T}{R^2} \Delta (\theta \Delta T + T_f)$$

Même chose, on garde les mêmes notations, on trouve :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial ru\theta}{\partial r} + \frac{\partial w\theta}{\partial z} = \Delta\theta \quad (59)$$

### 4-Adimensionnalisation des équations (29) ; (30) et (48)

Les équations (29), (30) et (48), sous forme adimensionnelle, s'écrivent :

$$\Omega = \frac{1}{R^2} \frac{1}{r} \left( \Delta\Psi - \frac{2}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial r} \right) \quad (60)$$

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial z} \quad (61)$$

$$w = -\frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial r} \quad (62)$$

---

**Chapitre 4**  
**CONVECTION THERMIQUE**

## 1- Introduction

Dans le cas de la convection purement thermique, on a  $\vec{f}' = \vec{0}$ , l'activation du mécanisme de la convection naturelle se fait par le gradient de la température horizontal.

## 2- Conditions aux limites sous leur forme adimensionnelle

$\mathcal{AF} = \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{R}}$  : est appelé rapport d'aspect ou facteur de forme.

$$\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{\partial \Psi}{\partial z} = 0 \quad \text{pour } \mathbf{z=0} ; \mathbf{z=AF} \text{ et } \mathbf{r=1}$$

Si la paroi est parfaitement conductrice ( $\gamma=0$ ) :

$$\theta \Delta \mathcal{T} + \mathcal{T}_f - \mathcal{T}_c + (\mathcal{T}_c - \mathcal{T}_f) \frac{z^* \mathcal{R}}{\mathcal{L}} = 0 \quad \text{d'où } \theta = 1 - \frac{z^* \mathcal{R}}{\mathcal{L}} = 1 - \frac{z}{\mathcal{AF}} \quad (64) \quad \text{pour } \mathbf{r=1}$$

Si la paroi est parfaitement adiabatique ( $\gamma=1$ ) :

$$\frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \quad (65) \quad \text{pour } \mathbf{r=1}$$

$$\theta = 1 \quad \text{pour } \mathbf{z=0} \quad \text{et} \quad \theta = 0 \quad \text{pour } \mathbf{z=AF} \quad (66)$$

$$\Psi = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \quad (67) \quad \text{pour } \mathbf{r=0} \quad (\text{condition de symétrie}).$$

---

**Chapitre 5**  
**MAGNETOCONVECTION**

## 1- Introduction

On suppose maintenant le fluide est électriquement conducteur soumis d'un champ magnétique  $\vec{H}$ , ce fluide induit par son mouvement un courant électrique de densité  $\vec{J}$  normal à  $\vec{v}$  et  $\vec{H}$ . Ce courant mène à une force  $(\vec{J} \wedge \vec{H})$  opposée au mouvement (force de Lorentz).

## 2- Mise en équations

On a les équations d'induction de Maxwell suivantes :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = 4\pi\vec{J} \quad (68)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad (69)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0 \quad (70)$$

$$\text{Loi d'Ohm : } \vec{J} = \sigma(\vec{E} + (\vec{v} \wedge \vec{H})) \quad (71)$$

Les frontières du système étudié sont considérées électriquement isolantes d'où  $\frac{\partial \phi_{\text{élec}}}{\partial n} = 0$

ce qui implique que  $\text{grad} \phi_{\text{élec}} = 0$  d'où  $\vec{E} = \vec{0}$ .

$$\vec{J} = \sigma(\vec{v} \wedge \vec{H}) \quad (72)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{f}' = \vec{\nabla} \wedge (\vec{J} \wedge \vec{H}) = \vec{\nabla} \wedge [\sigma(\vec{v} \wedge \vec{H}) \wedge \vec{H}] = \vec{\nabla} \wedge [\sigma(\vec{v} \wedge \mathcal{H}_0 \vec{b}_0) \wedge \mathcal{H}_0 \vec{b}_0]$$

$$\text{D'où : } \vec{\nabla} \wedge \vec{f}' = \sigma \mathcal{H}_0^2 \vec{\nabla} \wedge [(\vec{v} \wedge \vec{b}_0) \wedge \vec{b}_0] \quad (73)$$

L'adimensionnalisation de l'équation précédente conduit à :

$$\frac{1}{\mathcal{R}} f_o (\vec{\nabla} \wedge \vec{f}') = \frac{\sigma \mathcal{H}_0^2}{\mathcal{R}} \vec{\nabla} \wedge \left[ \left( \frac{\mathcal{k}_T}{\mathcal{R}} \vec{v} \wedge \vec{b}_0 \right) \wedge \vec{b}_0 \right] = \frac{\sigma \mathcal{k}_T \mathcal{H}_0^2}{\mathcal{R}^2} \vec{\nabla} \wedge [(\vec{v} \wedge \vec{b}_0) \wedge \vec{b}_0] \quad (74)$$

Donc l'équation (56) devient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru\Omega)}{\partial r} + \frac{\partial(w\Omega)}{\partial z} - \frac{u\Omega}{r} = \text{Pr} \left( \Delta\Omega - \frac{\Omega}{r^2} \right) - \frac{1}{\mathcal{R}^2} \text{Ra Pr} \frac{\partial\theta}{\partial r} + \frac{1}{\mathcal{R}^2} \mathcal{Q Pr} [\vec{\nabla} \wedge ((\vec{v} \wedge \vec{b}_0) \wedge \vec{b}_0)]_\theta \quad (75)$$

$$\mathcal{Q} = \frac{\sigma \mathcal{R}^2 \mathcal{H}_0^2}{\nu} \quad (76)$$

Où :  $\mathcal{Q}$  est le nombre de Chandrasekhar.

$$\mathcal{Ha} = \mathcal{Q}^{1/2} = \mathcal{R} \mathcal{H}_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\nu}} \quad (77)$$

Où :  $\mathcal{Ha}$  est le nombre de Hartmann.

---

**Chapitre 6**  
**DOUBLE DIFFUSION**

Les écoulements de fluides générés par l'action simultanée des gradients de température et de concentration sont dits de type thermosolutal. Si les diffusivités thermique et massique sont différentes, ces écoulements sont alors dits à double diffusion.

On suppose maintenant un fluide incompressible et newtonien confiné dans la même configuration et contient une concentration de matière diffusante (polluant), le fluide et le polluant sont complément miscibles d'où le système étudié est une mixture fluide.

Les surfaces horizontales sont maintenant maintenues à des valeurs différentes de température et de concentration.

On néglige l'effet Dufour et l'effet Soret.

- **Effet Dufour** : rend compte de la contribution du gradient de concentration aux flux de chaleur.

- **Effet Soret** : rend compte de la contribution du gradient de température au flux massique.

La densité du fluide à pression constante dépend de la température et de la concentration du polluant.

$$\rho(\mathcal{T}, C) = \rho_0 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathcal{T}}\right)_p (\mathcal{T} - \mathcal{T}_0) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial C}\right)_p (C - C_0) \quad (78)$$

D'où :

$$\rho(\mathcal{T}, C) = \rho_0 [1 - \beta_{\mathcal{T}} (\mathcal{T} - \mathcal{T}_0) - \beta_s (C - C_0)]$$

Avec :

$$\beta_s = -\frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\partial \rho}{\partial C}\right)_p \quad (79)$$

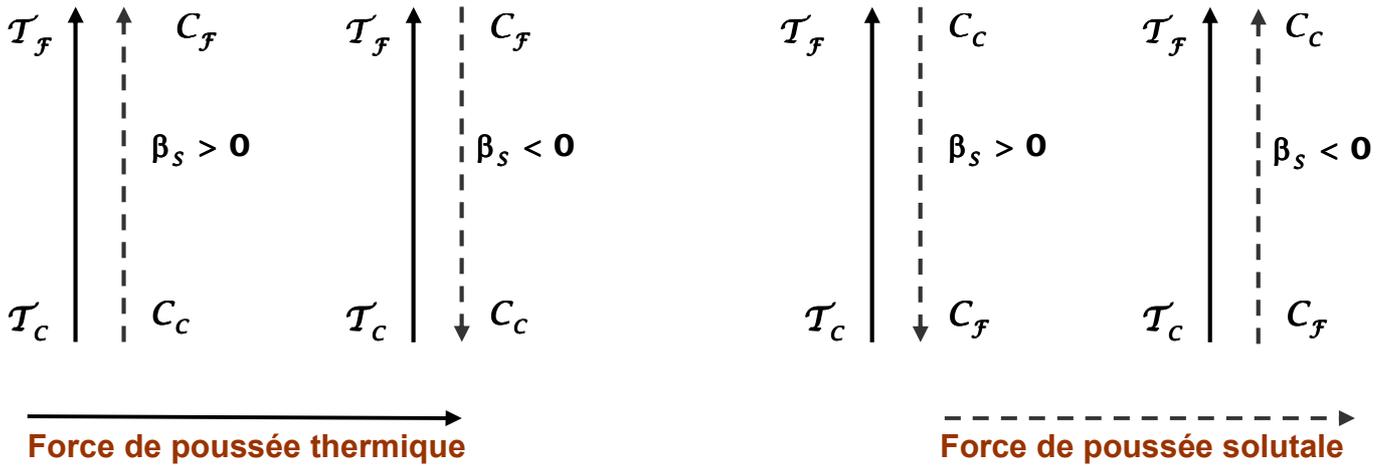
$\beta_s$  est le coefficient d'expansion de concentration.

La force de poussée due à la concentration est prise en compte dans ce cas.

$\beta_{\mathcal{T}}$  est toujours positif sauf le cas de l'eau entre 0°C et 4°C où si T diminue la masse volumique diminue aussi.

$\beta_s$  Peut être positif ou négatif, d'où les forces de poussées vont s'additionner ou s'opposer.

Quatre configurations peuvent alors être observées.



On introduit dans l'équation (56) une force de poussée solutale, on trouve :

$$\frac{\rho}{\rho_0} \bar{g} = [1 - \beta_T (\mathcal{T} - \mathcal{T}_0) - \beta_s (C - C_0)] \bar{g}$$

$$\chi = \frac{C - C_f}{C_c - C_f} = \frac{C - C_f}{\Delta C} \quad (80)$$

où :  $\chi$  est la concentration adimensionnelle.

Le terme des poussées dans l'équation de transport du rotationnel devient :

$$-\beta_T \bar{\nabla} \wedge (\mathcal{T} - \mathcal{T}_0) \bar{g} - \beta_s \bar{\nabla} \wedge (C - C_0) \bar{g} = -\beta_T g \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial r} - \beta_s g \frac{\partial C}{\partial r} \quad (81)$$

L'adimensionnalisation de (81) donne :

$$-\frac{\beta_T g \Delta \mathcal{T}}{\mathcal{R}} \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{\beta_s g \Delta C}{\mathcal{R}} \frac{\partial \chi}{\partial r} = -\frac{\beta_T g \Delta \mathcal{T}}{\mathcal{R}} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial r} + \frac{\beta_s}{\beta_T} \frac{\Delta C}{\Delta \mathcal{T}} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right] = -\frac{\beta_T g \Delta \mathcal{T}}{\mathcal{R}} \left[ \frac{\partial \theta}{\partial r} + \mathcal{N} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right] \quad (82)$$

$$\text{Avec : } \mathcal{N} = \frac{\beta_s \Delta C}{\beta_T \Delta \mathcal{T}} \quad (83)$$

$\mathcal{N}$  est appelé rapport des poussées.

$$\mathcal{N} \rightarrow 0 \text{ si } \beta_s \rightarrow 0$$

et

$$\mathcal{N} \rightarrow \infty \text{ si } \beta_T \rightarrow 0$$

L'équation (56) devient :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (ru\Omega)}{\partial r} + \frac{\partial (w\Omega)}{\partial z} - \frac{u\Omega}{r} = \text{Pr} \left( \Delta \Omega - \frac{\Omega}{r^2} \right) - \frac{1}{\mathcal{R}^2} \text{Ra Pr} \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} + \mathcal{N} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) \quad (84)$$

L'équation adimensionnelle à résoudre concerne le transport de la concentration.

Le comportement de la concentration est globalement similaire à celui de la température. On utilise la loi de Fick qui relie le vecteur flux dispersif massique au gradient de concentration, on trouve par analogie à l'équation de la température l'équation suivante :

$$\frac{dC}{dt} = k_s \Delta C$$

D'où :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ruC)}{\partial r} + \frac{\partial(wC)}{\partial z} = k_s \Delta C \quad (85)$$

$k_s$  est la diffusivité solutale.

L'adimensionnalisation de l'équation (85) donne :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru\chi)}{\partial r} + \frac{\partial(w\chi)}{\partial z} = \frac{1}{Le} \Delta \chi \quad (86)$$

$$Le = \frac{k_T}{k_s} \quad (87)$$

Où : **Le est le nombre de Lewis**, représente le rapport entre les diffusivités thermique et solutale.

$$Sc = \frac{v}{k_s} \quad (88)$$

Où : **Sc est le nombre de Schmidt**, analogue au nombre de Prandtl. Il mesure le rapport entre la diffusivité de la quantité de mouvement et la diffusivité solutale.

$$Le = \frac{k_T}{k_s} = \frac{k_T}{v} \frac{v}{k_s}$$

D'où :

$$Le = \frac{Sc}{Pr} \quad (89)$$

$$\mathcal{N} = \frac{1}{Le} \frac{Ra_s}{Ra_T} \quad (90)$$

$$Ra_s = \frac{\beta_s g \Delta C R^3}{v k_s} \quad (91)$$

Où : **Ra<sub>s</sub> est le nombre de Rayleigh solutal**.

Conditions aux limites relatives à la concentration.

$$\frac{\partial \chi}{\partial r} = 0 \quad \text{pour } r=0 \text{ et } r=1 \quad (92)$$

$$\chi = 1 \quad \text{et} \quad \chi = 0 \quad \text{pour } z=0 \text{ et } z=AF \quad (93)$$

---

**PARTIE B**  
**CONVECTION EN MILIEUX POREUX**



## **Introduction**

---

Nous allons retenir la même configuration géométrique que celle considérée pour la convection thermique d'un fluide libre à la différence que la cavité est maintenant remplie d'un milieu poreux saturé par un fluide incompressible et newtonien.



## **Chapitre 1**

### **Modèle EBFD : Extension Brinkman-Forchheimer de la loi de Darcy**

Ces extensions sont proposées pour améliorer la loi de Darcy et étendre son champ d'application. Forchheimer (1901) tient compte de l'effet non linéaire de la traînée due à la matrice solide et Brinkman (1947) tient compte de l'effet des contraintes visqueuses adjacentes aux parois.

La matrice solide et fluide convectant sont assimilés à un fluide fictif isotrope de conductivité thermique  $\lambda_T^*$  et de chaleur volumique  $(\rho c_p)^* = \varepsilon(\rho c_p)_f + (1 - \varepsilon)(\rho c_p)_s$  (94)

- L'équation du mouvement s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\rho_f}{\varepsilon^2} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = -\vec{\nabla} P + \rho_f \vec{g} - \frac{\mu'}{K} \vec{v} - \rho_f \frac{b}{K} |\vec{v}| \vec{v} + \mu \Delta \vec{v} \quad (95)$$

- L'équation de l'énergie s'écrit :

$$(\rho c_p)_f \vec{v} \cdot \vec{\nabla} T = \lambda' \Delta T \quad (96)$$

$\mu' = \mu_f$  est la viscosité apparente ; K la perméabilité du milieu poreux et b une propriété de la structure de la matrice poreux.

L'équation (95) devient :

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} = -\frac{1}{\rho_o f} \vec{\nabla} P + [1 - \beta_T (T - T_o)] \vec{g} - \frac{\mu'}{\mathcal{K} \rho_o} \vec{v} - \frac{b}{\mathcal{K}} |\vec{v}| \vec{v} + \nu \Delta \vec{v} \quad (97)$$

On applique l'opérateur rotationnel à l'équation (97), on trouve :

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \vec{\nabla} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{v}) = -\beta_T \vec{\nabla} \wedge (T - T_o) \vec{g} - \frac{\mu'}{\mathcal{K} \rho_o} \vec{\Omega} - \frac{b}{\mathcal{K}} |\vec{v}| \vec{\Omega} + \frac{b}{\mathcal{K}} \vec{v} \wedge \vec{\nabla} |\vec{v}| + \nu \Delta \vec{\Omega} \quad (98)$$

Car :

$$\vec{\nabla} \wedge \frac{b}{\mathcal{K}} |\vec{v}| \vec{v} = \frac{b}{\mathcal{K}} |\vec{v}| \vec{\nabla} \wedge \vec{v} - \vec{v} \wedge \frac{b}{\mathcal{K}} \vec{\nabla} |\vec{v}| = \frac{b}{\mathcal{K}} |\vec{v}| \vec{\Omega} - \frac{b}{\mathcal{K}} \vec{v} \wedge \vec{\nabla} |\vec{v}| \quad (99)$$

D'où le système scalaire à résoudre :

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(r u \Omega)}{\partial r} + \frac{\partial(w \Omega)}{\partial z} - \frac{u \Omega}{r} \right] = -\beta_T g \frac{\partial T}{\partial r} + \nu \left( \Delta \Omega - \frac{\Omega}{r^2} \right) - \frac{\mu'}{\rho_f K} \Omega - \frac{b}{K} |\vec{v}| \Omega + \frac{b}{K} \left[ w \frac{\partial |\vec{v}|}{\partial r} - u \frac{\partial |\vec{v}|}{\partial z} \right] \quad (100)$$

Nous faisons une adimensionnalisation du système (100) en utilisant les grandeurs de référence suivantes :

**R** : pour la longueur ;

$\Delta T = T_c - T_f$  : pour la température et

$\frac{k^*}{\mathcal{R}}$  : pour la vitesse.

On garde les mêmes notations, nous trouverons le système suivant :

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(ru\Omega)}{\partial r} + \frac{\partial(w\Omega)}{\partial z} - \frac{u\Omega}{r} \right] = \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{u}{r} - \frac{\bar{\lambda} Pr_f}{Da} - \frac{Fs}{Da} |\bar{v}| - \frac{\bar{\lambda} Pr_f}{r^2} \right] \Omega$$

$$+ \bar{\lambda} Pr_f \Delta \Omega + \frac{1}{\mathcal{R}^2} \frac{Fs}{Da} \left[ w \frac{\partial|\bar{v}|}{\partial r} - u \frac{\partial|\bar{v}|}{\partial z} \right] - \frac{1}{\mathcal{R}^2} \bar{\lambda}^2 Ra_f Pr_f \frac{\partial\theta}{\partial r}$$
(101)

Avec :

$$Fs = \frac{b}{\mathcal{R}} \quad (102)$$

Où : **Fs** est le nombre de Forchheimer.

$$Da = \frac{\mathcal{K}}{\mathcal{R}^2} \quad (103)$$

Où : **Da** est le nombre de Darcy.

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_f}{\lambda^*} \quad (104)$$

Où :  $\bar{\lambda}$  est le rapport des conductivités.

$Ra_f$  et  $Pr_f$  sont respectivement le nombre de Rayleigh et de Prandtl pour le fluide.

D'où en résolvant l'équation (59) ; (61) et (101), Les nombres de Darcy et de Forchheimer, peuvent être obtenus par les relations suivantes d'après le modèle d'Ergun :

$$Da = \frac{\varepsilon^2}{150(1-\varepsilon)^2} \left( \frac{d_p}{\mathcal{R}} \right)^2 \quad (105)$$

Et

$$Fs = \frac{1,75}{150(1-\varepsilon)} \left( \frac{d_p}{\mathcal{R}} \right) \quad (106)$$

---

## **Chapitre 2**

### **Modèle REB**

Le modèle REB part des équations de bilan de masse et de quantité de mouvement écrites dans un volume de contrôle.

- **Bilan de masse.**

$$\varepsilon \bar{u}_f \Delta Z \Big|_{r+\Delta r} - \varepsilon \bar{u}_f \Delta Z \Big|_r + \varepsilon \bar{w}_f \Delta r \Big|_{z+\Delta z} - \varepsilon \bar{w}_f \Delta r \Big|_z = 0 \quad (107)$$

$$\hat{u} = \varepsilon \bar{u}_f \quad \text{et} \quad \hat{w} = \varepsilon \bar{w}_f \quad (108)$$

D'où :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r \hat{u}}{\partial r} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} = 0 \quad (109)$$

- **Bilan de quantité de mouvement dans la direction z.**

$$\begin{aligned} \varepsilon \rho_f \bar{u}_f \bar{w}_f \Delta Z \Big|_{r+\Delta r} - \varepsilon \rho_f \bar{u}_f \bar{w}_f \Delta Z \Big|_r + \varepsilon \rho_f \bar{w}_f^2 \Delta r \Big|_{z+\Delta z} - \varepsilon \rho_f \bar{w}_f^2 \Delta r \Big|_z = -\mathcal{P}_f \Big|_{z+\Delta z} + \mathcal{P}_f \Big|_z \quad (110) \\ + \varepsilon \tau_{zz} \Delta r \Big|_{z+\Delta z} - \varepsilon \tau_{zz} \Delta r \Big|_z + \varepsilon \tau_{rz} \Delta z \Big|_{r+\Delta r} - \varepsilon \tau_{rz} \Delta z \Big|_r - \hat{\mathcal{D}}_z - \varepsilon (\rho_f - \rho_0) g \Delta r \Delta z \end{aligned}$$

$\hat{\mathcal{D}}_z$  est la traînée due à la matrice solide dans la direction z.

$$\tau_{zz} = 2\mu \frac{\partial \bar{w}_f}{\partial z} \quad (111)$$

$$\tau_{rz} = \mu \left( \frac{\partial \bar{u}_f}{\partial z} + \frac{\partial \bar{w}_f}{\partial r} \right) \quad (112)$$

$$\hat{\mathcal{D}}_z = \mathcal{A} \hat{w} + \mathcal{B} |\vec{v}| \hat{w} \quad (113)$$

$$\mathcal{A} = 150 \frac{(1-\varepsilon)^2}{\varepsilon^3} \frac{\mu}{d_p^2} \quad (114)$$

$$\mathcal{B} = 1,75 \frac{(1-\varepsilon)}{\varepsilon^3} \frac{\rho_f}{d_p^2} \quad (115)$$

$$\mathcal{K} = \frac{\varepsilon^3 d_p^2}{150(1-\varepsilon)^2} \quad (116)$$

D'où :

$$\hat{\mathcal{D}}_z = \frac{\mu}{\mathcal{K}} \hat{w} + \frac{1,75}{\sqrt{150\mathcal{K}}} \frac{\rho_f}{\varepsilon^{3/2}} |\vec{v}| \hat{w} \quad (117)$$

D'où nous déduisons l'équation de transport de la vorticité sous la forme adimensionnelle suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\varepsilon^2} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial(r\hat{u}\Omega)}{\partial r} + \frac{\partial(\hat{w}\Omega)}{\partial z} - \frac{u\Omega}{r} \right] &= \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\hat{u}}{r} - \frac{\text{Pr}_f}{\text{Da}} - \frac{1,75}{\sqrt{150}} \frac{1}{\varepsilon^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{\text{Da}}} |\bar{v}| - \frac{\text{Pr}_f}{\varepsilon r^2} \right] \Omega \\
+ \frac{\text{Pr}_f}{\varepsilon} \Delta \Omega + \frac{1}{\text{R}^2} \frac{1,75}{\sqrt{150}} \frac{1}{\varepsilon^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{\text{Da}}} &\left[ \hat{w} \frac{\partial|\bar{v}|}{\partial r} - \hat{u} \frac{\partial|\bar{v}|}{\partial z} \right] - \frac{1}{\text{R}^2} \text{Ra}_f \text{Pr}_f \frac{\partial\theta}{\partial r}
\end{aligned} \tag{118}$$

---

**Chapitre 3**  
**NOMBRE DE NUSSELT ET NOMBRE DE SHERWOOD**

Le nombre de Nusselt caractérise le transport de chaleur au niveau des parois, il est défini en un point M pris sur un élément de surface  $ds$  comme suit :

$$\mathcal{Nu}_f = \frac{\Phi_t}{\Phi_{cond}} \quad (119)$$

Or :

$$\Phi_t = \rho_o c_p (\mathcal{T} - \mathcal{T}_o) \bar{v} \bar{n} ds - \lambda \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial z} ds = \rho_o c_p (\mathcal{T} - \mathcal{T}_o) w ds - \lambda \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial z} ds \quad (120)$$

$$\Phi_{cond} = -\lambda \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial z} ds \quad (121)$$

Adimensionnalisation de (120) conduit à :

$$\Phi_t = \lambda \frac{\Delta \mathcal{T}}{\mathcal{R}} \left( w\theta - \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) ds \quad (122)$$

Adimensionnalisation de (121) conduit à :

$$\Phi_t = -\lambda \frac{\Delta \mathcal{T}}{\mathcal{R}} \frac{\partial \theta}{\partial z} ds \quad (123)$$

D'où :

$$\mathcal{Nu}_f = \frac{\left( w\theta - \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)}{\left( \frac{\partial \theta}{\partial z} \right)} \quad (124)$$

- Si la paroi est parfaitement conductrice ( $\gamma=0$ )

$$\theta = 1 - \frac{z}{\mathcal{AF}} \quad (125)$$

$$\mathcal{Nu}_f = \mathcal{AF} \left[ w\theta - \frac{\partial \theta}{\partial z} \right] \quad (126)$$

De la même manière, on peut caractériser le transfert de masse par la définition du nombre de Sherwood.

$$Sh_f = \mathcal{AF} Le \left[ w\chi - \frac{\partial \chi}{\partial z} \right] \quad (127)$$

Sur les surfaces inférieures et supérieures on a  $w=0$

d'où :

$$\mathcal{Nu}_{if} = -\mathcal{AF} \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0} \quad (128)$$

$$\mathcal{Nu}_{sf} = \mathcal{AF} \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=\mathcal{AF}} \quad (129)$$

$$Sh_{if} = -\mathcal{AFL}e \left. \frac{\partial \chi}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (130)$$

$$Sh_{sf} = \mathcal{AFL}e \left. \frac{\partial \chi}{\partial z} \right|_{z=\mathcal{AF}} \quad (131)$$

D'où :

$$Nu_{ig} = -2\mathcal{AF} \int_0^1 \left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=0} dr \quad (132)$$

Et

$$Nu_{sg} = 2\mathcal{AF} \int_0^1 \left. \frac{\partial \theta}{\partial z} \right|_{z=\mathcal{AF}} dr \quad (133)$$

$$Sh_{ig} = -2\mathcal{AFL}e \int_0^1 \left. \frac{\partial \chi}{\partial z} \right|_{z=0} dr \quad (134)$$

Et

$$Sh_{sg} = 2\mathcal{AFL}e \int_0^1 \left. \frac{\partial \chi}{\partial z} \right|_{z=\mathcal{AF}} dr \quad (135)$$

---

**Chapitre 4**  
**ESTIMATION DE LA VORTICITE AUX FRONTIERES**

Nous présentons dans cette partie quelques schémas parmi les plus utilisés pour l'estimation de la vorticité aux frontières. Ces schémas sont basés soit sur les conditions aux limites sur la fonction de courant, soit sur les conditions aux limites sur le champ des vitesses.

L'équation de la fonction de courant s'écrit :

$$\Omega = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \quad (136)$$

Fait intervenir les dérivées secondes de celle-ci. Les différents schémas pour la détermination de la vorticité aux frontières ne diffèrent, de fait, que par la manière adoptée pour approcher ces dérivées secondes.

### 1- Equations à la paroi latérale

En tenant compte des conditions aux limites sur la fonction de courant à la paroi verticale ( $\Psi = 0$  ;  $\vec{v} = \vec{0}$ ) l'équation (136) devient :

$$\Omega|_{r=1} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \Big|_{r=1} \quad (137)$$

#### 1.1- Méthode de Thom

En effectuant un développement en série de Taylor de la fonction de courant à un point de la paroi ( $r=1$ ) :

$$\Psi|_{r=1-\Delta r} = \Psi|_{r=1} - \Delta r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \Big|_{r=1} + \frac{\Delta r^2}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \Big|_{r=1} \quad (138)$$

Et comme :  $\Psi|_{r=1} = \frac{\partial \Psi}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0$  l'équation précédente de vient :

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \Big|_{r=1} = \frac{2}{\Delta r^2} \Psi|_{r=1-\Delta r} \quad \text{D'où l'expression de Thom pour la vorticité :}$$

$$\Omega|_{r=1} = \frac{2}{\Delta r^2} \Psi|_{r=1-\Delta r} \quad (139)$$

#### 1.2- Méthode de Jensen

Cette procédure consiste à utiliser un schéma décentré en trois points pour approcher la dérivée seconde, soit :

$$\Psi|_{r=1-\Delta r} = \Psi|_{r=1} - \Delta r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \Big|_{r=1} + \frac{\Delta r^2}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \Big|_{r=1} - \frac{\Delta r^3}{6} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial r^3} \Big|_{r=1} \quad (140)$$

$$\Psi|_{r=1-2\Delta r} = \Psi|_{r=1} - 2\Delta r \frac{\partial \Psi}{\partial r} \Big|_{r=1} + 2\Delta r^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \Big|_{r=1} - \frac{8\Delta r^3}{6} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial r^3} \Big|_{r=1} \quad (141)$$

En multipliant l'équation (140) par 8 et en lui soustrayant l'équation (141), on trouve :

$$\Omega|_{r=1} = \frac{-7\Psi|_{r=1} + 8\Psi|_{r=1-\Delta r} - \Psi|_{r=1-2\Delta r}}{2\Delta r^2} + \frac{3}{\Delta r} \frac{\partial \Psi}{\partial r}|_{r=1} \quad (142)$$

Avec les conditions :  $\Psi|_{r=1} = \frac{\partial \Psi}{\partial r}|_{r=1} = 0$  l'équation (142) devient :

$$\Omega|_{r=1} = \frac{8\Psi|_{r=1-\Delta r} - \Psi|_{r=1-2\Delta r}}{2\Delta r^2} \quad (143)$$

### 1.3- Méthode de Woods

On suppose que le rotationnel près de la paroi varie linéairement. On peut alors écrire :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r}|_{r=1} = \frac{\partial^3 \Psi}{\partial r^3}|_{r=1} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}|_{r=1} \quad (144)$$

En utilisant le développement (140) et en tenant compte de la condition d'adhérence à la paroi l'équation (144) se réécrit :

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r}|_{r=1} = -\frac{6}{\Delta r^3} \Psi|_{r=1-\Delta r} + \left(\frac{3}{\Delta r} - 1\right) \Omega|_{r=1} \quad (145)$$

En utilisant un schéma décentré d'ordre un en deux points pour approcher le premier membre de (145), celle-ci donne finalement :

$$\Omega|_{r=1} = \frac{\Omega|_{r=1-\Delta r}}{\Delta r - 2} - \frac{6}{\Delta r^2(\Delta r - 2)} \Psi|_{r=1-\Delta r} \quad (146)$$

### 1.4- Méthode de Vitesse 2

L'écriture de l'équation (136) en utilisant les expressions des dérivées de la fonction de courant en terme des composantes de la vitesse, donne :

$$\Omega = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \quad (147)$$

Pour la paroi verticale cette équation devient :

$$\Omega|_{r=1} = -\frac{\partial w}{\partial r}|_{r=1} \quad (148)$$

La méthode de vitesse 2 consiste à discrétiser cette relation à l'aide d'une différence décentrée du deuxième ordre en trois points, soit :

$$\Omega|_{r=1} = -\frac{3w|_{r=1} - 4w|_{r=1-\Delta r} + w|_{r=1-2\Delta r}}{2\Delta r} \quad (149)$$

Avec la condition d'adhérence à la paroi, cette relation devient :

$$\Omega|_{r=1} = \frac{4w|_{r=1-\Delta r} - w|_{r=1-2\Delta r}}{2\Delta r} \quad (150)$$

## 1.5- Méthode de Vitesse 1

Pour cette méthode, la relation (148) est approximée par une différence décentrée du premier ordre en deux points, soit :

$$\Omega|_{r=1} = \frac{w|_{r=1-\Delta r} - w|_{r=1}}{\Delta r} \quad (151)$$

Ou encore en tenant compte du fait que la vitesse est nulle à la paroi :

$$\Omega|_{r=1} = \frac{w|_{r=1-\Delta r}}{\Delta r} \quad (152)$$

## 2- Equations sur les surfaces horizontales

En tenant compte des conditions aux limites sur la fonction de courant aux surfaces horizontales l'équation (148) devient :

$$\Omega|_{z=0, \mathcal{AF}} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} \Big|_{z=0, \mathcal{AF}} \quad (153) \text{ pour } r \neq 0.$$

D'autre part, la condition de non glissement écrite pour les surfaces horizontales donne les expressions :

$$\Psi|_{z=0} = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0 \quad (154) \text{ Pour la surface inférieure et}$$

$$\Psi|_{z=\mathcal{AF}} = \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Big|_{z=\mathcal{AF}} = 0 \quad (155) \text{ pour la surface supérieure.}$$

### 2.1- Méthode de Thom

En utilisant le développement :

$$\Psi|_{z=\Delta z} = \Psi|_{z=0} - \Delta z \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{\Delta z^2}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \Big|_{z=0} \quad (156) \text{ pour la surface inférieure et le}$$

développement

$$\Psi|_{z=\mathcal{AF}-\Delta z} = \Psi|_{z=\mathcal{AF}} - \Delta z \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Big|_{z=\mathcal{AF}} + \frac{\Delta z^2}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \Big|_{z=\mathcal{AF}} \quad (157) \text{ pour la surface supérieure.}$$

On obtient les expressions de Thom :

$$\Omega|_{z=0} = \frac{1}{r} \frac{2}{\Delta z^2} \Psi|_{z=\Delta z} \quad (158) \text{ pour } r \neq 0 \text{ et.}$$

$$\Omega|_{z=\mathcal{AF}} = \frac{1}{r} \frac{2}{\Delta z^2} \Psi|_{z=\mathcal{AF}-\Delta z} \quad (159) \text{ pour } r \neq 0.$$

## 2.1- Méthode de Jensen

On utilise les développements :

$$\Psi|_{z=\Delta z} = \Psi|_{z=0} - \Delta z \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Big|_{z=0} + \frac{\Delta z^2}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \frac{\Delta z^3}{6} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial z^3} \Big|_{z=0} \quad (160)$$

$$\Psi|_{z=2\Delta z} = \Psi|_{z=0} - 2\Delta z \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Big|_{z=0} + 2\Delta z^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \Big|_{z=0} + \frac{8\Delta z^3}{6} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial z^3} \Big|_{z=0} \quad (161) \quad \text{pour la surface}$$

inférieure et

$$\Psi|_{z=\mathcal{A}F-\Delta z} = \Psi|_{z=\mathcal{A}F} - \Delta z \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Big|_{z=\mathcal{A}F} + \frac{\Delta z^2}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \Big|_{z=\mathcal{A}F} - \frac{\Delta z^3}{6} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial z^3} \Big|_{z=\mathcal{A}F} \quad (162)$$

$$\Psi|_{z=\mathcal{A}F-2\Delta z} = \Psi|_{z=\mathcal{A}F} - 2\Delta z \frac{\partial \Psi}{\partial z} \Big|_{z=\mathcal{A}F} + 2\Delta z^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \Big|_{z=\mathcal{A}F} - \frac{8\Delta z^3}{6} \frac{\partial^3 \Psi}{\partial z^3} \Big|_{z=\mathcal{A}F} \quad (163)$$

Pour la surface supérieure.

En procédant comme dans le cas de la paroi latérale, on trouve :

$$\Omega|_{z=0} = \frac{1}{r} \frac{-7\Psi|_{z=0} + 8\Psi|_{z=\Delta z} - \Psi|_{z=2\Delta z}}{2\Delta z^2} \quad (164) \quad \text{pour } r \neq 0$$

$$\Omega|_{z=\mathcal{A}F} = \frac{1}{r} \frac{-7\Psi|_{z=\mathcal{A}F} + 8\Psi|_{z=\mathcal{A}F-\Delta z} - \Psi|_{z=\mathcal{A}F-2\Delta z}}{2\Delta z^2} \quad (165) \quad \text{pour } r \neq 0$$

## 2.3- Méthode de Woods

Les développements utilisés sont ceux des expressions (160) et (162). En utilisant les relations (154) et (155) et en approchant la dérivée première de la vorticité par une différence d'ordre un en deux points, on obtient :

$$\Omega|_{z=0} = \frac{1}{r} \frac{3}{\Delta z^2} \Psi|_{z=\Delta z} - \frac{1}{2} \Omega|_{z=0} \quad (166) \quad \text{pour } r \neq 0$$

$$\Omega|_{z=\mathcal{A}F} = \frac{1}{r} \frac{3}{\Delta z^2} \Psi|_{z=\mathcal{A}F-\Delta z} - \frac{1}{2} \Omega|_{z=\mathcal{A}F} \quad (167) \quad \text{pour } r \neq 0$$

## 2.4- Méthode de vitesse 2

L'équation (147) s'écrit pour les surfaces horizontales :

$$\Omega|_{z=0, \mathcal{A}F} = \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0, \mathcal{A}F} \quad (168)$$

On approche la dérivée de la vitesse par une différence d'ordre deux en trois points, d'où :

$$\Omega|_{z=0} = \frac{-3u|_{z=0} + 4u|_{z=\Delta z} - u|_{z=\mathcal{A}F-2\Delta z}}{2\Delta z} \quad (169) \quad \text{pour la surface inférieure.}$$

(avec une différenciation à droite)

$$\Omega|_{z=\Delta F} = \frac{-3u|_{z=\Delta F} - 4u|_{z=\Delta F-\Delta z} + u|_{z=\Delta F-2\Delta z}}{2\Delta z} \quad (170) \quad \text{pour la surface supérieure}$$

(avec une différenciation à gauche).

## 2.5- Méthode de vitesse 1

La dérivée de la vitesse dans la relation (168) est approchée par une différence d'ordre un en deux points. On obtient alors :

$$\Omega|_{z=0} = \frac{u|_{z=\Delta z} - u|_{z=0}}{\Delta z} \quad (171)$$

$$\Omega|_{z=\Delta F} = \frac{u|_{z=\Delta F} - u|_{z=\Delta F-\Delta z}}{\Delta z} \quad (172)$$

---

## **RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES**

---

**ROMAIN DELAHAYE.**

Influence de l'effet Soret sur la convection naturelle au sein d'une couche de fluide binaire.  
Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Maîtrise ès Sciences Appliquées au  
Département de Génie Mécanique de l'Ecole Polytechnique de Montréal, 2002.

**MOHAMMED NABIL BOUTANA.**

Convection naturelle dans un milieu poreux Soumis à l'effet Soret.  
Mémoire présenté en vue de l'obtention du Diplôme de Maîtrise ès Sciences Appliquées au  
Département de Génie Mécanique de l'Ecole Polytechnique de Montréal, 2002.

**PHILIPPE-EMMANUEL ROCHE.**

Convection thermique turbulente en cellule de Rayleigh-Bénard cryogénique.  
Thèse présentée pour l'obtention du titre de Docteur de l'Université Grenoble I - Joseph Fourier,  
22 janvier 2001.

**LAMINE KALLA.**

Convection thermosolutale au sein d'une cavité poreuse Saturée par un fluide binaire.  
Thèse présentée en vue de l'obtention du Diplôme de Philosophiae Doctor au département  
de Génie Mécanique de l'Ecole Polytechnique de Montréal, 2004.

**A.BAHLOUL, P.VASSEUR, M.A.YAHIAOUI and L.ROBILLARD.**

Thermogravitational Separation in a Vertical Annular Porous Layer.  
Int.Comm.Heat Mass Transfer, Vol.31,No.6,pp.783-794,2004.

**R.BENNACER, A.TOBBAL et H.BEJI.**

Convection Naturelle Thermosolutale dans une Cavité Poreuse Anisotrope : Formulation  
de Darcy-Brinkman.  
Rev.Energ.Ren.Vol.5(2002)1-21.

**K.BENHADJI, L.ROBILLARD and P.VASSEUR.**

Convection in a Porous Cavity Saturated With Water Near 4°C and Subject to Dirichlet-Neumann  
Thermal Boundary Conditions.  
Int.Comm.Heat Mass Transfer, Vol.29,No.7,pp.897-906,2002.

---

**A.BENKHELIFA et M.BELHAMEL.**

Simulation de la Convection Naturelle en Régime Permanent dans une Cuve Cylindrique : Cas de l'Hydrogène Liquide.

Rev.Energ.Ren : Journées de Thermique (2001) 31-36.