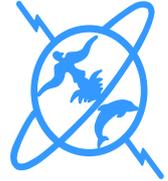




UNIVERSITÉ MOHAMMED V- AGDAL
FACULTÉ DES SCIENCES
Rabat



*Master: Énergie et technologie des matériaux
E.T.M*

***Module 9 : Analyse numérique.
Méthode des volumes finis***

KAMAL GUERAOU

**Professeur de l'Enseignement Supérieur et Responsable de l'Équipe
de Modélisation Théorique et Numérique en Mécanique des Fluides
et en Environnement**

ANNÉE UNIVERSITAIRE : 2009 - 2010

INTRODUCTION GENERALE

Les problèmes physiques rencontrés dans notre quotidien (le transport de polluants, les problèmes de convection, les écoulements dans les conduites, la modélisation de l'écoulement des polymères fondus, la modélisation de la pollution atmosphérique, etc.) sont décrits par des équations à dérivées partielles fortement couplées et non linéaires.

En général, Ces équations n'admettent pas de solutions analytiques sauf dans des cas très simplifiés. C'est pourquoi un recours aux méthodes de résolution numériques s'avère nécessaire.

Il existe plusieurs méthodes numériques :

- méthode des différences finies
- méthode des volumes finis
- méthode des éléments finis
- méthodes spectrales,...

Chaque méthode de résolution numérique d'un problème continu comporte une phase de maillage et une phase de discrétisation.

La phase de maillage consiste à diviser le domaine d'étude en de petits volumes appelés volumes de contrôle.

La phase de discrétisation transforme le problème continu en un problème discret. Les équations ainsi que les conditions aux limites sont approchées par des équations et conditions discrètes.

L'objectif de ce polycopié est de développer les principes de la méthode des volumes finis.

Le premier chapitre sera consacré à l'exposer de la méthode des volumes finis pour le problème de la diffusion pure.

L'objet du deuxième chapitre sera l'utilisation de la méthode des volumes finis pour le problème stationnaire de diffusion - convection.

Le chapitre trois expose la méthode des volumes finis en coordonnées cylindriques.

Le quatrième chapitre sera réservé à l'illustration de la méthode de résolution itérative de double balayage.

L'objet du dernier chapitre sera l'étude du problème instationnaire de diffusion convection.

Chapitre 1
Problème stationnaire de diffusion pure

I- Introduction

Les méthodes des volumes finis ont été parmi les premières à atteindre un stade de développement avancé pour les calculs d'écoulements stationnaires et instationnaires. Elles ont permis une prise en compte complète des effets de non linéarité et de compressibilité ainsi que les effets de viscosité à l'aide des équations de Navier-Stokes, et de turbulence.

Les méthodes aux volumes finis ont supplanté les méthodes classiques basées sur les différences finies dans le traitement des problèmes complexes notamment tridimensionnels.

La technique comprend deux étapes importantes :

- le maillage : il consiste à diviser le domaine en plusieurs intervalles réguliers appelés volumes de contrôle.
- La discrétisation : lors de cette étape les équations sont intégrées dans les volumes de contrôle.

II- Etude d'un problème de diffusion à une dimension

Soit le problème de transport de la variable Φ par diffusion régi par l'équation suivante :

$$\text{div}(\Gamma \text{grad} \Phi) + S_{\Phi} = 0 \quad (1)$$

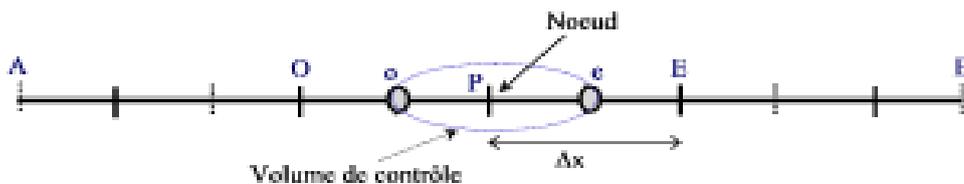
Où : Γ est le coefficient de diffusion et S le terme source.

A une dimension, l'équation (1) prend la forme suivante :

$$\frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right) + S = 0 \quad (2)$$

II-1 Maillage

Dans le cas d'une étude à une dimension de l'espace, le maillage est constitué d'une droite subdivisée en un nombre fini de segments réguliers. Ceux-ci constituent les volumes de contrôle dans le cas unidimensionnel. Ci-dessous, nous donnons l'exemple d'un maillage comprenant cinq volumes de contrôle qu'on peut adopter pour la discrétisation de l'équation (2):



La valeur de Φ est maintenue constante aux frontières. E et O sont appelés « Est » et « Ouest ». P, E et O sont appelés nœuds et Δx le pas.

Dans cette première étape, on divise le domaine de calcul en un nombre fini et discret de volumes de contrôle. Le centre de chaque volume est placé exactement au milieu du segment correspondant. Par

commodité, on s'arrange pour que les facettes des nœuds de frontières coïncident exactement avec les valeurs aux frontières du domaine de calcul. Dans notre exemple, le domaine est divisé en cinq volumes de contrôle.

II-2 Discrétisation

L'intégration de l'équation (2) sur le volume de contrôle de centre P donne :

$$\int_{VC} \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right) dv + \int_{VC} S dv = 0 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \left[\Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right]_e - \left[\Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right]_o + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (4)$$

Où : \bar{S} est la valeur moyenne de la source et ΔV le volume de contrôle correspondant.

Signalons que dans ce cas, une dimension, $\Delta V = \Delta x$.

En général, le terme source peut dépendre de la fonction Φ elle-même. C'est pourquoi on l'écrit:

$$\bar{S} \Delta V = S_u + S_P \Phi_P \quad (5)$$

Le coefficient de diffusivité n'est pas toujours constant. Ses valeurs sur les facettes " e " et " o " du volume de contrôle sont exprimées en fonction des valeurs aux points nodaux P, O et E par les relations suivantes :

$$\Gamma_e = \frac{\Gamma_E + \Gamma_O}{2} \quad \text{et} \quad \Gamma_o = \frac{\Gamma_P + \Gamma_O}{2} \quad (6)$$

Par application d'un schéma centré d'ordre deux, on remplace les dérivées premières sur les facettes du volume de contrôle par les relations :

$$\left[\Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right]_e = \Gamma_e \left(\frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta x} \right) \quad (7)$$

$$\left[\Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right]_o = \Gamma_o \left(\frac{\Phi_P - \Phi_O}{\Delta X} \right) \quad (8)$$

En substituant les équations (5), (6), (7) et (8) dans l'équation (4) on obtient :

$$\Gamma_e \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta X} - \Gamma_o \frac{\Phi_P - \Phi_O}{\Delta x} + (S_u + S_P \Phi_P) = 0 \quad (9)$$

Et après arrangement on trouve :

$$a_P \Phi_P = a_O \Phi_O + a_E \Phi_E + S_u \quad (10)$$

Avec :

$$a_O = \frac{\Gamma_o}{\Delta x}, \quad a_E = \frac{\Gamma_e}{\Delta x} \quad \text{et} \quad a_P = a_E + a_O - S_P \quad (11)$$

Les volumes de contrôle étant choisis réguliers, on peut supposer que le nœud P occupe une position d'indice i , le nœud O, la position d'indice $i-1$, le nœud E, la position d'indice $i+1$, etc. L'équation (10) peut donc se mettre sous la forme suivante :

$$a_i \Phi_i = a_{i-1} \Phi_{i-1} + a_{i+1} \Phi_{i+1} + S_u \quad (12)$$

L'équation (12) est donc construite pour tous les volumes de contrôle du domaine d'intégration qui ne sont pas influencés par les conditions aux limites. Afin de tenir compte des conditions aux

limites, un traitement spécial est réservé aux nœuds se trouvant aux frontières. Le système d'équations résultant est un système d'équations algébriques linéaires comportant autant d'équations que d'inconnues.

La distribution discrète de la variable Φ sur le domaine de calcul peut alors être obtenue par les méthodes directes de résolution des systèmes d'équations linéaires : inversion de la matrice du système, méthode des déterminants,...

Cependant, on préfère les méthodes itératives telles que la méthode de Gauss-Seidel ou la méthode de Jacobi qui sont bien adaptées pour ce genre de systèmes à matrice bande. Mais comme pour tout calcul itératif, il faudra alors définir un critère de convergence pour pouvoir arrêter les calculs à un moment donné.

III- Etude d'un problème de diffusion à deux dimensions

III-1 Introduction

L'équation qui gouverne le problème stationnaire de diffusion en deux dimensions dépend des variables de l'espace "x" et "z". Il convient de rappeler que dans ce cas, deux dimensions de l'espace, le volume de contrôle est constitué du produit " $\Delta x \cdot \Delta z$ ".

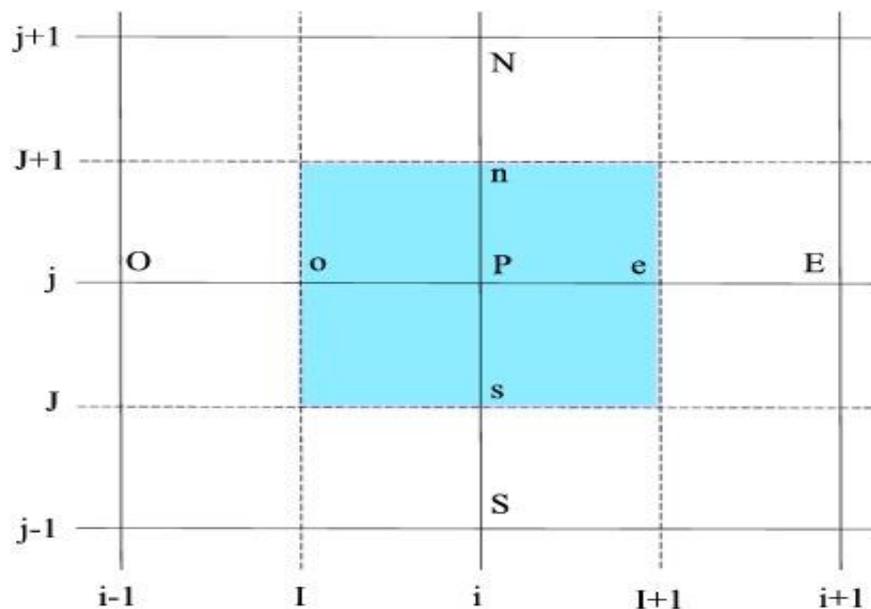
A deux dimensions, l'équation (1) prend la forme suivante :

$$\frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\Phi}{dx}\right) + \frac{d}{dz}\left(\Gamma \frac{d\Phi}{dz}\right) + S = 0 \quad (13)$$

III-2 Maillage

A deux dimensions, le domaine est subdivisé en un nombre fini de volumes de contrôle qui sont alors constitués d'éléments de surface réguliers.

Le maillage a la forme suivante :



Où : P est le nœud principal, i l'indice de discrétisation suivant l'axe des "x", j l'indice de discrétisation suivant l'axe des "z".

Le temps sera indexé par l'indice "k".

En général, les lettres E, O, N et S représentent respectivement l'Est, l'Ouest, le Nord et le Sud.

Le carré coloré en bleu clair représente un élément de volume de contrôle. Les segments [PE] et [PN] valent respectivement Δx et Δz .

Par la suite, nous allons adopter les maillages suivants :

→ Suivant l'axe des "x" :

$$x(i) = (i-1)\Delta x$$

Où : Δx est le pas de discrétisation suivant cette direction.

→ Suivant l'axe des "z" :

$$z(j) = (j-1)\Delta z$$

Où : Δz est le pas de discrétisation suivant cette direction.

III-3 Discrétisation

L'intégration de l'équation (13) sur le volume de contrôle de centre P donne :

$$\int_{vc} \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right) dv + \int_{vc} \frac{d}{dz} \left(\Gamma \frac{d\Phi}{dz} \right) dv + \int_{vc} S dv = 0 \quad (14)$$

⇔

$$\left[\Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right]_e - \left[\Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right]_o + \left[\Gamma \frac{d\Phi}{dz} \right]_n - \left[\Gamma \frac{d\Phi}{dz} \right]_s + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (15)$$

Où : \bar{S} est la valeur moyenne de la source et ΔV le volume de contrôle correspondant.

Signalons que dans ce cas, deux dimensions, $\Delta V = \Delta x \Delta z$.

En général, le terme source peut dépendre de la fonction Φ elle-même. C'est pourquoi on l'écrit:

$$\bar{S} \Delta V = S_u + S_p \Phi_p \quad (16)$$

Le coefficient de diffusivité n'est pas toujours constant. Ses valeurs sur les facettes " e ", " o ", " n " et " s ", du volume de contrôle sont exprimées en fonction des valeurs aux points nodaux P, S, N, O et E par les relations suivantes :

$$\Gamma_e = \frac{\Gamma_E + \Gamma_P}{2} \quad \text{et} \quad \Gamma_o = \frac{\Gamma_P + \Gamma_O}{2} \quad (17)$$

$$\Gamma_n = \frac{\Gamma_P + \Gamma_N}{2} \quad \text{et} \quad \Gamma_s = \frac{\Gamma_S + \Gamma_P}{2} \quad (18)$$

Par application d'un schéma centré d'ordre deux, on remplace les dérivées premières sur les facettes du volume de contrôle par les relations :

$$\left[\Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right]_e = \Gamma_e \left(\frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta x} \right) \quad (19)$$

$$\left[\Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right]_o = \Gamma_o \left(\frac{\Phi_P - \Phi_O}{\Delta X} \right) \quad (20)$$

$$\left[\Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right]_n = \Gamma_n \left(\frac{\Phi_N - \Phi_P}{\Delta z} \right) \quad (21)$$

$$\left[\Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right]_s = \Gamma_s \left(\frac{\Phi_P - \Phi_S}{\Delta z} \right) \quad (22)$$

En substituant les équations (16), (17), (18), (19), (20), (21) et (22) dans l'équation (15) on obtient :

$$\Gamma_e \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta X} - \Gamma_o \frac{\Phi_P - \Phi_O}{\Delta X} + \Gamma_n \frac{\Phi_N - \Phi_P}{\Delta z} - \Gamma_s \frac{\Phi_P - \Phi_S}{\Delta z} + (S_u + S_p \Phi_p) = 0 \quad (23)$$

Et après arrangement on trouve :

$$a_P \Phi_P = a_O \Phi_O + a_E \Phi_E + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + S_u \quad (24)$$

$$\text{Avec : } a_O = \frac{\Gamma_o}{\Delta x}, \quad a_E = \frac{\Gamma_e}{\Delta x}, \quad a_N = \frac{\Gamma_n}{\Delta z} \quad \text{et} \quad a_S = \frac{\Gamma_s}{\Delta z}$$

$$a_P = a_E + a_O + a_N + a_S - S_P \quad (25)$$

Les volumes de contrôle étant choisis réguliers, on peut supposer que le nœud P occupe une position d'indice (i,j), le nœud O, la position d'indice (i-1,j), le nœud E, la position d'indice (i+1,j), le nœud S, la position d'indice (i,j-1), le nœud N, la position d'indice (i,j+1), L'équation (24) peut donc se mettre sous la forme suivante :

$$a_{i,j} \Phi_{i,j} = a_{i-1,j} \Phi_{i-1,j} + a_{i+1,j} \Phi_{i+1,j} + a_{i,j-1} \Phi_{i,j-1} + a_{i,j+1} \Phi_{i,j+1} + S_u \quad (26)$$

L'équation (26) est donc construite pour tous les volumes de contrôle du domaine d'intégration qui ne sont pas influencés par les conditions aux limites. Afin de tenir compte des conditions aux limites, un traitement spécial est réservé aux nœuds se trouvant aux frontières. Le système d'équations résultant est un système d'équations algébriques linéaires comportant autant d'équations que d'inconnues.

Chapitre 2

Problème stationnaire de diffusion convection

I- Introduction

Le problème stationnaire de diffusion convection de la variable Φ est gouverné par les équations suivantes :

$$\text{div}(\Gamma \text{grad } \Phi) + S_{\Phi} = \text{div}(\rho \vec{V} \phi) \quad (1)$$

$$\text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (2)$$

Γ est appelé coefficient de diffusion, ρ la masse volumique du fluide, \vec{v} la vitesse du fluide et S terme source.

II- Etude d'un problème de diffusion à une dimension

A une dimension, les équations (1) et (2) prennent la forme suivante :

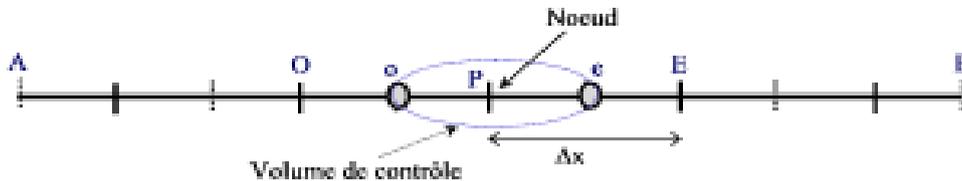
$$\frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right) + S = \frac{d}{dx} (\rho u \phi) \quad (3)$$

$$\frac{d}{dx} (\rho u) = 0 \quad (4)$$

II- Maillage

Dans le cas d'une étude à une dimension de l'espace, le maillage est constitué d'une droite subdivisée en un nombre fini de segments réguliers. Ceux-ci constituent les volumes de contrôle dans le cas unidimensionnel. Ci-dessous, nous donnons

l'exemple d'un maillage comprenant cinq volumes de contrôle qu'on peut adopter pour la discrétisation des équations (3) et (4):



La valeur de Φ est maintenue constante aux frontières. E et O sont appelés « Est » et « Ouest ». P, E et O sont appelés nœuds et Δx le pas.

Dans cette première étape, on divise le domaine de calcul en un nombre fini et discret de volumes de contrôle. Le centre de chaque volume est placé exactement au milieu du segment correspondant. Par commodité, on s'arrange pour que les facettes des nœuds de frontières coïncident exactement avec les valeurs aux frontières du domaine de calcul. Dans notre exemple, le domaine est divisé en cinq volumes de contrôle.

II-2 Discrétisation

L'intégration de l'équation (3) sur le volume de contrôle de centre P donne :

$$\int_{VC} \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right) dv + \int_{VC} S dv = \int_{VC} \frac{d}{dx} (\rho u \Phi) \quad (5)$$

$$\Leftrightarrow \left[\Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right]_e - \left[\Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right]_o + \bar{S} \Delta V = [\rho u \phi]_e - [\rho u \phi]_o \quad (6)$$

Où : \bar{S} est la valeur moyenne de la source et ΔV le volume de contrôle correspondant.

L'intégration de l'équation (4) sur le volume de contrôle de centre P donne :

$$\int_{VC} \frac{d}{dx} (\rho u) dv = 0 \quad (7)$$

$$(\rho u)_e - (\rho u)_o = 0 \quad (8)$$

En général, le terme source peut dépendre de la fonction Φ elle-même. C'est pourquoi on l'écrit :

$$\bar{S} \Delta V = S_u + S_P \Phi_P \quad (9)$$

Le coefficient de diffusivité n'est pas toujours constant. Ses valeurs sur les facettes " e " et " o " du volume de contrôle sont exprimées en fonction des valeurs aux points nodaux P, O et E par les relations suivantes :

$$\Gamma_e = \frac{\Gamma_E + \Gamma_O}{2} \quad \text{et} \quad \Gamma_o = \frac{\Gamma_P + \Gamma_O}{2} \quad (10)$$

Par application d'un schéma centré d'ordre deux, on remplace les dérivées premières sur les facettes du volume de contrôle par les relations :

$$\left[\Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right]_e = \Gamma_e \left(\frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta x} \right) \quad (11)$$

$$\left[\Gamma \frac{d\Phi}{dx} \right]_o = \Gamma_o \left(\frac{\Phi_P - \Phi_O}{\Delta X} \right) \quad (12)$$

On pose : $F = (\rho u)$, le flux massique par convection et on approxime la fonction Φ aux nœuds e et o par une différence centrée, il vient :

$$\phi_e = (\phi_P + \phi_E)/2 \quad (13)$$

$$\phi_o = (\phi_P + \phi_O)/2 \quad (14)$$

En substituant les équations (9), (10), (11), (12), (13) et (14) dans l'équation (6) on obtient :

$$\Gamma_e \frac{\Phi_E - \Phi_P}{\Delta X} - \Gamma_o \frac{\Phi_P - \Phi_O}{\Delta X} + (S_u + S_P \Phi_P) = \frac{F_e}{2} (\phi_P + \phi_E) - \frac{F_o}{2} (\phi_P + \phi_O) \quad (15)$$

Et après arrangement on trouve :

$$a_P \Phi_P = a_O \Phi_O + a_E \Phi_E + S_u \quad (16)$$

$$\text{Avec : } a_O = \frac{\Gamma_o}{\Delta X} + \frac{F_o}{2}, a_E = \frac{\Gamma_e}{\Delta X} + \frac{F_e}{2}$$

$$\text{et } a_P = a_E + a_O + F_e - F_o - S_P$$

Les volumes de contrôle étant choisis réguliers, on peut supposer que le nœud P occupe une position d'indice i , le nœud O, la position d'indice $i-1$, le nœud E, la position d'indice $i+1$, etc. L'équation (16) peut donc se mettre sous la forme suivante :

$$a_i \Phi_i = a_{i-1} \Phi_{i-1} + a_{i+1} \Phi_{i+1} + S_u \quad (17)$$

L'équation (17) est donc construite pour tous les volumes de contrôle du domaine d'intégration qui ne sont pas influencés par les conditions aux limites. Afin de tenir compte des conditions aux limites, un traitement spécial est réservé aux nœuds se trouvant aux frontières. Le système d'équations résultant est

un système d'équations algébriques linéaires comportant autant d'équations que d'inconnues.

Cependant, on préfère les méthodes itératives telles que la méthode de Gauss-Seidel ou la méthode de Jacobi qui sont bien adaptées pour ce genre de systèmes à matrice bande. Mais comme pour tout calcul itératif, il faudra alors définir un critère de convergence pour pouvoir arrêter les calculs à un moment donné.

III- Etude d'un problème de diffusion à deux dimensions

Le cas bidimensionnel peut être obtenu en utilisant la même technique que précédemment pour les deux directions x et z . L'équation discrétisée s'écrit sous la forme :

$$a_P \Phi_P = a_O \Phi_O + a_E \Phi_E + a_N \Phi_N + a_S \Phi_S + S_u \quad (18)$$

Chapitre 3

Etude d'un problème de transfert de chaleur à deux dimensions en coordonnées cylindriques

I- Introduction

Soit le problème de transfert de chaleur de la grandeur physique T (la température) régi par l'équation suivante :

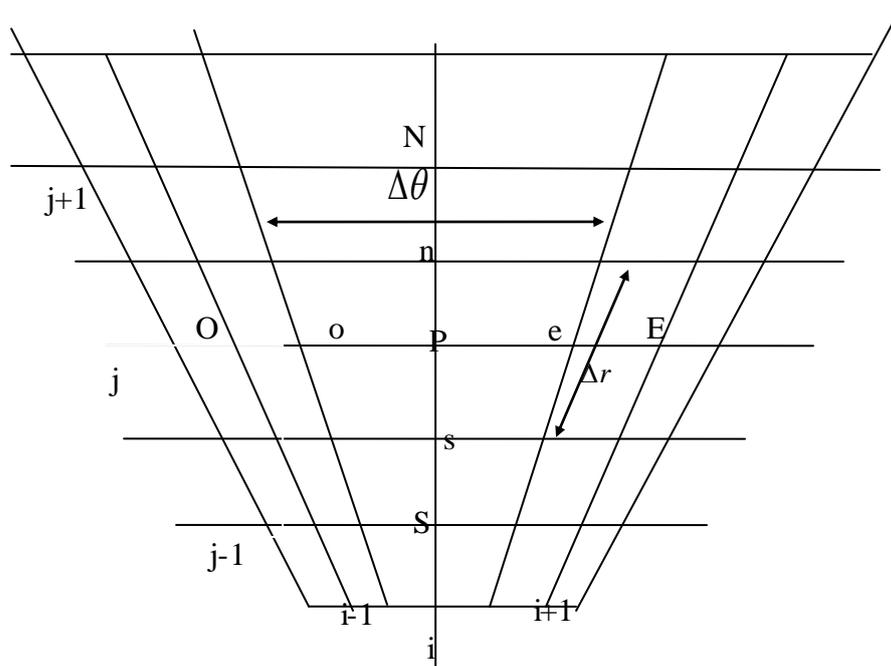
$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + S = 0 \quad (1)$$

Où :

T est la température, S le terme source, θ la variable azimutale et r la variable radiale .

II- Maillage

Dans le cas d'une étude à deux dimensions de l'espace, le maillage est constitué de trapèze subdivisé en un nombre fini de petits trapèzes réguliers. Ceux-ci constituent les volumes de contrôle dans le cas bidimensionnel. Nous donnons, ci-dessous, l'exemple d'un maillage adopté à ce problème.



III- Discrétisation

L'intégration de l'équation (1) sur le volume de contrôle de centre P conduit à:

$$\int_{V_c} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + S \right) dV = 0 \quad (1)$$

Soit :

$$\int_{V_c} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) r dr d\theta + \int_{V_c} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} r dr d\theta + \int_{V_c} S r dr d\theta = 0$$

$$r_e \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_e \Delta\theta - r_o \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)_o \Delta\theta + \frac{1}{r_p} \left(\left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)_N - \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)_S \right) \Delta r + \bar{S} \Delta V = 0 \quad (2)$$

Où :

\bar{S} est la valeur moyenne de la source et ΔV Le volume de contrôle.

Signalons que dans ce cas : $\Delta V = r\Delta r\Delta\theta$

En général, le terme source peut dépendre de la température T . C'est pourquoi on l'écrit :

$$\bar{S}\Delta V = S_T + S_P T_P \quad (3)$$

Or:

$$r_e = \frac{r_E + r_P}{2} \quad \text{et} \quad r_o = \frac{r_O + r_P}{2} \quad (4)$$

Par application d'un schéma centré d'ordre deux, on remplace les dérivées premières sur les facettes du volume de contrôle par les relations :

$$\left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right)_e - \left(r \frac{\partial T}{\partial r}\right)_o = r_e \left(\frac{T_E - T_P}{\Delta r}\right) - r_o \left(\frac{T_P - T_O}{\Delta r}\right) \quad (5)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)_n - \left(\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)_s = \frac{T_N - T_P}{\Delta \theta} - \frac{T_P - T_S}{\Delta \theta} \quad (6)$$

En substituant les équations (3), (4), (5) et (6) dans l'équation (1) on obtient :

$$r_e \left(\frac{T_E - T_P}{\Delta r}\right) \Delta \theta - r_o \left(\frac{T_P - T_O}{\Delta r}\right) \Delta \theta + \frac{T_N - T_P}{r_p \Delta \theta} \Delta r - \frac{T_P - T_S}{r_p \Delta \theta} \Delta r + S_T + S_P T_P = 0 \quad (7)$$

Ce qui conduit à :

$$a_p T_P = a_N T_N + a_S T_S + a_E T_E + a_O T_O + S_T \quad (8)$$

Avec :

$$a_N = a_S = \frac{1}{r_p} \frac{\Delta r}{\Delta \theta} ;$$

$$a_E = \frac{r_E + r_P}{2} \frac{\Delta \theta}{\Delta r} ;$$

$$a_O = \frac{r_O + r_P}{2} \frac{\Delta \theta}{\Delta r} ;$$

Et :
$$a_p = a_N + a_S + a_E + a_O - S_p$$

Les volumes de contrôle sont choisis réguliers, on peut supposer que le nœud P occupe une position d'indice (i, j) , le nœud O la position d'indice $(i-1, j)$, le nœud E la position d'indice $(i+1, j)$, le nœud S la position d'indice $(i, j-1)$ et le nœud N occupe la position d'indice $(i, j+1)$.

L'équation (8) peut donc se mettre sous la forme suivante :

$$a(i, j)T(i, j) = a(i, j+1)T(i, j+1) + a(i, j-1)T(i, j-1) + a(i+1, j)T(i+1, j) + a(i-1, j)T(i-1, j) \quad (9)$$

L'équation (9) est donc construite pour tous les volumes de contrôle du domaine d'intégration qui ne sont pas influencés par les conditions aux limites.

Afin de tenir compte des conditions aux limites, un traitement spécial est réservé aux nœuds se trouvant aux frontières.

Chapitre 4

Méthode de double balayage

On considère l'équation algébrique suivante qui peut représenter n'importe quelle grandeur physique ϕ :

$$A(i)\phi(i-1) + B(i)\phi(i) + C(i)\phi(i+1) = D(i) \quad (1)$$

Le principe de la méthode de double balayage permet d'écrire :

$$\phi(i) = \alpha(i)\phi(i+1) + \beta(i) \quad (2)$$

Où encore :

$$\phi(i-1) = \alpha(i-1)\phi(i) + \beta(i-1) \quad (3)$$

En introduisant l'équation (3) dans l'équation (1), il vient :

$$A(i)\alpha(i-1)\phi(i) + B(i)\phi(i) + C(i)\phi(i+1) + A(i)\beta(i-1) = D(i) \quad (4)$$

L'équation (4) peut sous mettre sous la forme :

$$\phi(i) = \frac{-C(i)}{B(i) + A(i)\alpha(i-1)}\phi(i+1) + \frac{D(i) - A(i)\beta(i-1)}{B(i) + A(i)\alpha(i-1)} \quad (5)$$

Une comparaison entre l'équation (2) et l'équation (5) donne :

$$\alpha(i) = \frac{-C(i)}{B(i) + A(i)\alpha(i-1)} \quad (6)$$

Et :

$$\beta(i) = \frac{D(i) - A(i)\beta(i-1)}{B(i) + A(i)\alpha(i-1)} \quad (7)$$

Les formules de récurrences (6) et (7) sont amorcées à l'aide de la donnée de $\alpha(1)$ et de $\beta(1)$ issus des conditions aux limites.

Lors du premier balayage allant de $i = 2$ jusqu'à $i = i_{\max}$, on détermine les fonctions α et β .

La grandeur physique ϕ sera déterminée lors du balayage inverse allant de $i = i_{\max-1}$ jusqu'à $i = 2$.

Chapitre 5
Problème instationnaire de diffusion convection

I- Introduction

Les étapes de maillage et discrétisation restent les même que pour les cas des problèmes stationnaires. La différence majeure repose sur l'intégration qui se fait aussi bien sur le volume du domaine que sur l'intervalle de temps $[t, t + \Delta t]$.

La méthode des volumes finis permet en général une permutation des intégrations suivant le temps et suivant l'espace.

On pose :

$$\int_t^{t+\Delta t} f dt = \Delta t (\theta f^{t+\Delta t} + (1 - \theta) f^t)$$

Où : f^t et $f^{t+\Delta t}$ sont respectivement les images de la fonction f respectivement aux temps t et $t + \Delta t$ et θ un nombre réel tel que $0 \leq \theta \leq 1$.

Dans la suite, nous nous baserons sur le cas où

$\theta = 1$, c'est à dire $\int_t^{t+\Delta t} f dt = f^{t+\Delta t} \Delta t$, ce qui correspond à la méthode dite implicite.

Remarque :

Notre étude portant sur un modèle bidimensionnel et instationnaire, nous avons préféré traiter en détail ces aspects dans le paragraphe suivant correspondant justement au cas de notre étude. Quant au cas tridimensionnel, il constitue juste une extension des autres cas, mais le principe concernant le maillage et la discrétisation reste pratiquement le même.

Dans la suite nous allons appliquer la méthode des volumes finis aux équations (49), (50) et (51), ainsi qu'aux conditions aux limites, en tenant compte du maillage ci-dessus.

II- Cas de l'équation de vorticité

L'équation de vorticité s'écrit :

$$\frac{\beta^2}{P_r} \frac{\partial \Omega}{\partial t} = -\frac{\partial(\Omega U)}{\partial x} - \frac{\partial(\Omega W)}{\partial z} - R_a P_r \frac{\partial \theta}{\partial x} + P_r \nabla^2 \Omega - \sigma H_0^2 \frac{a}{W_0} \frac{\partial U}{\partial z} \quad (1)$$

En intégrant cette équation suivant le volume de contrôle et le long de l'intervalle de temps de longueur dt , on aura :

$$\int_{VC} \int_T \frac{\beta^2}{P_r} \frac{\partial \Omega}{\partial t} dt dx dz = \int_{VC} \int_t^{t+\Delta t} \left(-\frac{\partial(\Omega U)}{\partial x} - \frac{\partial(\Omega W)}{\partial z} - R_a P_r \frac{\partial \theta}{\partial x} - \sigma H_0^2 \frac{a}{W_0} \frac{\partial U}{\partial z} + P_r \nabla^2 \Omega \right) dt dx dz$$

On rappelle que dans notre cas, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

En calculant terme à terme les intégrales de l'équation ci-dessus, on trouve :

$$A = \frac{\beta^2}{P_r} \int_{VC} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \Omega}{\partial t} dt dx dz = \frac{\beta^2}{P_r} \Delta x \Delta z (\Omega_P^{t+\Delta t} - \Omega_P^t)$$

B =

$$-\int_{VC} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\Omega U)}{\partial x} dt dx dz = -\frac{\Delta z \Delta t}{4} [(U_E - U_O)\Omega_P + (U_E + U_P)\Omega_E - (U_P + U_O)\Omega_O]$$

C =

$$-\int_{VC} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial(\Omega W)}{\partial z} dt dx dz = -\frac{\Delta x \Delta z}{4} [(W_N - W_S)\Omega_P + (W_N + W_P)\Omega_N - (W_P + W_O)\Omega_S]$$

D

=

$$\int_{VC} \int_t^{t+\Delta t} \left(-R_a P_r \frac{\partial \theta}{\partial x} - \sigma H_0 \frac{a}{W_0} \frac{\partial U}{\partial z} \right) dt dx dz = S_p \Delta x \Delta z \Delta t$$

E =

$$P_r \int_{VC} \int_t^{t+\Delta t} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial z^2} \right) dt dx dz = \frac{P_r \Delta t \Delta z}{\Delta x} (\Omega_E - 2\Omega_P + \Omega_O) + \frac{P_r \Delta t \Delta x}{\Delta z} (\Omega_N - 2\Omega_P + \Omega_S)$$

On remarque que les quatre résultats des intégrales B, C, D et E sont considérés à l'instant $t + \Delta t$ mais on a omis de les indexer pour des raisons d'encombrement des expressions.

En regroupant les résultats ci-dessus et en les rangeant par rapport à l'inconnu Ω , on obtient :

$$\begin{aligned} & \Omega_P^{t+\Delta t} \left[\frac{\beta^2}{P_r} \Delta x \Delta z + \frac{\Delta z \Delta t}{4} (U_E - U_O) + \frac{\Delta x \Delta t}{4} (W_N - W_S) + 2P_r \frac{\Delta t \Delta x}{\Delta z} + 2P_r \frac{\Delta t \Delta z}{\Delta x} \right] \\ & + \Omega_E^{t+\Delta t} \left[\frac{\Delta z \Delta t}{4} (U_E + U_P) - P_r \frac{\Delta t \Delta z}{\Delta x} \right] - \Omega_O^{t+\Delta t} \left[\frac{\Delta z \Delta t}{4} (U_P + U_O) + P_r \frac{\Delta t \Delta z}{\Delta x} \right] \\ & + \Omega_N^{t+\Delta t} \left[\frac{\Delta x \Delta t}{4} (W_N + W_P) - P_r \frac{\Delta x \Delta t}{\Delta z} \right] - \Omega_S^{t+\Delta t} \left[\frac{\Delta x \Delta t}{4} (W_P + W_S) + P_r \frac{\Delta x \Delta t}{\Delta z} \right] \\ & - S_p^{t+\Delta t} \Delta x \Delta z \Delta t = \frac{\beta^2}{P_r} \Delta x \Delta z \Omega_P^t \end{aligned}$$

En tenant compte du maillage fait pour les variables de l'espace ainsi que pour le temps, On obtient le système d'équations algébriques suivant:

$$\begin{aligned}
& \left. \Omega(i, j, k+1) \left\{ \frac{\beta^2}{P_r} \Delta x \Delta z + \frac{\Delta z \Delta t}{4} [U(i+1, j, k+1) - U(i-1, j, k+1)] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{\Delta x \Delta t}{4} [W(i, j+1, k+1) - W(i, j-1, k+1)] + 2 \frac{P_r \Delta t \Delta z}{\Delta x} + 2 \frac{P_r \Delta t \Delta x}{\Delta z} \right\} \right. \\
& + \Omega(i+1, j, k+1) \left\{ \frac{\Delta z \Delta t}{4} [U(i+1, j, k+1) + U(i, j, k+1)] - P_r \frac{\Delta t \Delta z}{\Delta x} \right\} \\
& - \Omega(i-1, j, k+1) \left\{ \frac{\Delta z \Delta t}{4} [U(i, j, k+1) + U(i-1, j, k+1)] + P_r \frac{\Delta t \Delta z}{\Delta x} \right\} \\
& + \Omega(i, j+1, k+1) \left\{ \frac{\Delta x \Delta t}{4} [W(i, j+1, k+1) + W(i, j, k+1)] - P_r \frac{\Delta t \Delta x}{\Delta z} \right\} \\
& - \Omega(i, j-1, k+1) \left\{ \frac{\Delta x \Delta t}{4} [W(i, j, k+1) + W(i, j-1, k+1)] + P_r \frac{\Delta x \Delta t}{\Delta z} \right\} \\
& - \Delta x \Delta z \Delta t S(i, j, k+1) \\
& = \frac{\beta^2}{P_r} \Delta x \Delta z \Omega(i, j, k)
\end{aligned}$$

Le système d'équations algébriques ci-dessus s'applique seulement pour les zones du maillage non influencées par les conditions aux limites. Il convient donc de déterminer les équations applicables sur les régions voisines du contour délimité par le maillage.

Nous rappelons que d'après le maillage que nous avons choisi ci-dessus, suivant l'axe des abscisses indexé par l'indice "i", nous avons 21 nœuds délimitant 20 colonnes (i=1, ..., 21). Les nœuds

influencés directement par les conditions aux limites sont donc ceux situés à $i=2$ et $i=20$. C'est donc pour ces nœuds que nous allons déterminer les équations particulières qui tiendront compte des conditions aux limites.

Il en est bien évidemment de même pour l'axe des côtes indexé par l'indice "j". Ici il s'agira par contre des nœuds situés sur les lignes $j=2$ et $j=20$.

Pour obtenir l'équation algébrique suivant la colonne indexée par l'indice $i=2$, on considère comme nœud principal le nœud $i=2$ et on suit la même procédure d'intégration que précédemment. Ceci sera aussi appliqué pour la colonne indexée par $i=20$, la ligne indexée par $j=2$ et la ligne $j=20$.

L'opération sera reprise pour l'équation (1).

Les équations pour les colonnes et lignes influencées par les conditions aux limites concernant l'équation (1) sont donc les suivantes :

II-1 Equation suivant la colonne (2)

Cette équation, (2), s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \Omega(2, j, k+1) \left\{ \frac{\beta^2}{P_r} \Delta x \Delta z + \frac{\Delta z \Delta t}{4} [U(3, j, k+1) - U_{CL}] \right. \\
& \quad \left. + \frac{\Delta x \Delta t}{4} [W(2, j+1, k+1) - W(2, j-1, k+1)] + 2 \frac{P_r \Delta t \Delta z}{\Delta x} + 2 \frac{P_r \Delta t \Delta x}{\Delta z} \right\} \\
& + \Omega(3, j, k+1) \left\{ \frac{\Delta z \Delta t}{4} [U(3, j, k+1) + U(2, j, k+1)] - P_r \frac{\Delta t \Delta z}{\Delta x} \right\} \\
& - \Omega_{CL} \left\{ \frac{\Delta z \Delta t}{4} [U(2, j, k+1) + U_{CL}] + P_r \frac{\Delta t \Delta z}{\Delta x} \right\} \\
& + \Omega(2, j+1, k+1) \left\{ \frac{\Delta x \Delta t}{4} [W(2, j+1, k+1) + W(2, j, k+1)] - P_r \frac{\Delta t \Delta x}{\Delta z} \right\} \\
& - \Omega(2, j-1, k+1) \left\{ \frac{\Delta x \Delta t}{4} [W(2, j, k+1) + W(2, j-1, k+1)] + P_r \frac{\Delta x \Delta t}{\Delta z} \right\} \\
& - \Delta x \Delta z \Delta t S(2, j, k+1) = \frac{\beta^2}{P_r} \Delta x \Delta z \Omega(2, j, k)
\end{aligned}$$

II-3 Equation suivant la colonne (20)

Cette équation, (3), s'écrit:

$$\begin{aligned}
& \Omega(20, j, k+1) \left\{ \frac{\beta^2}{P_r} \Delta x \Delta z + \frac{\Delta z \Delta t}{4} [U_{CL} - U(19, j, k+1)] \right. \\
& \quad \left. + \frac{\Delta x \Delta t}{4} [W(20, j+1, k+1) - W(20, j-1, k+1)] + 2 \frac{P_r \Delta t \Delta z}{\Delta x} + 2 \frac{P_r \Delta t \Delta x}{\Delta z} \right\} \\
& + \Omega_{CL} \left\{ \frac{\Delta z \Delta t}{4} [U_{CL} + U(20, j, k+1)] - P_r \frac{\Delta t \Delta z}{\Delta x} \right\} \\
& - \Omega(19, j, k+1) \left\{ \frac{\Delta z \Delta t}{4} [U(20, j, k+1) + U(19, j, k+1)] + P_r \frac{\Delta t \Delta z}{\Delta x} \right\} \\
& + \Omega(20, j+1, k+1) \left\{ \frac{\Delta x \Delta t}{4} [W(20, j+1, k+1) + W(20, j, k+1)] - P_r \frac{\Delta t \Delta x}{\Delta z} \right\} \\
& - \Omega(20, j-1, k+1) \left\{ \frac{\Delta x \Delta t}{4} [W(20, j, k+1) + W(20, j-1, k+1)] + P_r \frac{\Delta x \Delta t}{\Delta z} \right\} \\
& - \Delta x \Delta z \Delta t S(20, j, k+1) = \frac{\beta^2}{P_r} \Delta x \Delta z \Omega(20, j, k)
\end{aligned}$$

II-3 Equation suivant la ligne (2)

Cette équation, (4), s'écrit:

$$\begin{aligned}
& \Omega(i,2,k+1) \left\{ \frac{\beta^2}{P_r} \Delta x \Delta z + \frac{\Delta z \Delta t}{4} [U(i+1,2,k+1) - U(i-1,2,k+1)] \right\} \\
& \left\{ + \frac{\Delta x \Delta t}{4} [W(i,3,k+1) - W_{CL}] + 2 \frac{P_r \Delta t \Delta z}{\Delta x} + 2 \frac{P_r \Delta t \Delta x}{\Delta z} \right\} \\
& + \Omega(i+1,2,k+1) \left\{ \frac{\Delta z \Delta t}{4} [U(i+1,2,k+1) + U(i,2,k+1)] - P_r \frac{\Delta t \Delta z}{\Delta x} \right\} \\
& - \Omega(i-1,2,k+1) \left\{ \frac{\Delta z \Delta t}{4} [U(i,2,k+1) + U(i-1,2,k+1)] + P_r \frac{\Delta t \Delta z}{\Delta x} \right\} \\
& + \Omega(i,3,k+1) \left\{ \frac{\Delta x \Delta t}{4} [W(i,3,k+1) + W(i,2,k+1)] - P_r \frac{\Delta t \Delta x}{\Delta z} \right\} \\
& - \Omega_{CL} \left\{ \frac{\Delta x \Delta t}{4} [W(i,2,k+1) + W_{CL}] + P_r \frac{\Delta x \Delta t}{4} \right\} \\
& - \Delta x \Delta z \Delta t S(i,2,k+1) = \frac{\beta^2}{P_r} \Delta x \Delta z \Omega(i,2,k)
\end{aligned}$$

II-4 Equation suivant la ligne (20)

Cette équation, (5), s'écrit:

$$\begin{aligned}
& \Omega(I,20,k+1) \left\{ \frac{\beta^2}{P_r} \Delta x \Delta z + \frac{\Delta z \Delta t}{4} [U(i+1,20,k+1) - U(i-1,20,k+1)] \right\} \\
& \left\{ + \frac{\Delta x \Delta t}{4} [W_{CL} - W(i,19,k+1)] + 2 \frac{P_r \Delta t \Delta z}{\Delta x} + 2 \frac{P_r \Delta t \Delta x}{\Delta z} \right\} \\
& + \Omega(i+1,20,k+1) \left\{ \frac{\Delta z \Delta t}{4} [U(i+1,20,k+1) + U(i,20,k+1)] - P_r \frac{\Delta t \Delta z}{\Delta x} \right\} \\
& - \Omega(i-1,20,k+1) \left\{ \frac{\Delta z \Delta t}{4} [U(i,20,k+1) + U(i-1,20,k+1)] + P_r \frac{\Delta t \Delta z}{\Delta x} \right\} \\
& + \Omega_{CL} \left\{ \frac{\Delta x \Delta t}{4} [W_{CL} + W(i,20,k+1)] - P_r \frac{\Delta t \Delta x}{\Delta z} \right\} \\
& - \Omega(i,19,k+1) \left\{ \frac{\Delta x \Delta t}{4} [W(i,20,k+1) + W(i,19,k+1)] + P_r \frac{\Delta x \Delta t}{4} \right\} \\
& - \Delta x \Delta z \Delta t S(i,20,k+1) = \frac{\beta^2}{P_r} \Delta x \Delta z \Omega(i, j20,k)
\end{aligned}$$

III- Cas de l'équation de température réduite

Cette équation est :

$$\frac{\beta^2}{P_r} \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial(U\theta)}{\partial x} - \frac{\partial(W\theta)}{\partial z} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}$$

En intégrant cette équation on a :

$$\int_{VC} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\beta^2}{P_r} \frac{\partial \theta}{\partial t} dt dx dz = \int_{VC} \int_t^{t+\Delta t} \left(-\frac{\partial(U\theta)}{\partial x} - \frac{\partial(W\theta)}{\partial z} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) dt dx dz$$

En suivant les mêmes étapes de discrétisation que précédemment, on trouve le système, (6), d'équations algébriques suivant :

$$\begin{aligned} & \theta(i, j, k+1) \left\{ \frac{\beta^2}{P_r} \Delta x \Delta z + \frac{\Delta t \Delta z}{4} [U(i+1, j, k+1) - U(i-1, j, k+1)] + 2 \frac{\Delta t \Delta z}{\Delta x} \right\} \\ & \left\{ \frac{\Delta t \Delta x}{4} [W(i, j+1, k+1) - W(i, j-1, k+1)] + 2 \frac{\Delta t \Delta x}{\Delta z} \right\} \\ & + \theta(i+1, j, k+1) \left\{ \frac{\Delta t \Delta z}{4} [U(i+1, j, k+1) + U(i, j, k+1)] - \frac{\Delta t \Delta z}{\Delta x} \right\} \\ & - \theta(i-1, j, k+1) \left\{ \frac{\Delta t \Delta z}{4} [U(i, j, k+1) + U(i-1, j, k+1)] + \frac{\Delta t \Delta z}{\Delta x} \right\} \\ & + \theta(i, j+1, k+1) \left\{ \frac{\Delta t \Delta x}{4} [W(i, j+1, k+1) - W(i, j, k+1)] - \frac{\Delta t \Delta x}{\Delta z} \right\} \\ & - \theta(i, j-1, k+1) \left\{ \frac{\Delta t \Delta x}{4} [W(i, j, k+1) + W(i, j-1, k+1)] + \frac{\Delta t \Delta x}{\Delta z} \right\} \\ & = \frac{\beta^2}{P_r} \Delta x \Delta z \theta(i, j, k) \end{aligned}$$

Le système d'équations ci-dessus concerne les zones non influencées par les conditions aux limites. Nous allons comme précédemment déterminer les équations des zones sous influence à

savoir les colonnes (2) et (20) ainsi que les lignes (2) et (20).

III-1 Equation suivant la colonne (2)

Cette équation, (7), s'écrit:

$$\begin{aligned}
 & \theta(2, j, k+1) \left\{ \frac{\beta^2}{P_r} \Delta x \Delta z + \frac{\Delta t \Delta z}{4} [U(3, j, k+1) - U_{CL}] + 2 \frac{\Delta t \Delta z}{\Delta x} \right. \\
 & \left. \frac{\Delta t \Delta x}{4} [W(2, j+1, k+1) - W(2, j-1, k+1)] + 2 \frac{\Delta t \Delta x}{\Delta z} \right\} \\
 & + \theta(3, j, k+1) \left\{ \frac{\Delta t \Delta z}{4} [U(3, j, k+1) + U(2, j, k+1)] - \frac{\Delta t \Delta z}{\Delta x} \right\} \\
 & - \theta_{CL} \left\{ \frac{\Delta t \Delta z}{4} [U(2, j, k+1) + U_{CL}] + \frac{\Delta t \Delta z}{\Delta x} \right\} \\
 & + \theta(2, j+1, k+1) \left\{ \frac{\Delta t \Delta x}{4} [W(2, j+1, k+1) - W(2, j, k+1)] - \frac{\Delta t \Delta x}{\Delta z} \right\} \\
 & - \theta(2, j-1, k+1) \left\{ \frac{\Delta t \Delta x}{4} [W(2, j, k+1) + W(2, j-1, k+1)] + \frac{\Delta t \Delta x}{\Delta z} \right\} \\
 & = \frac{\beta^2}{P_r} \Delta x \Delta z \theta(2, j, k)
 \end{aligned}$$

III-2 Equation suivant la colonne (20)

Cette équation, (8), s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \theta(20, j, k+1) \left\{ \frac{\beta^2}{P_r} \Delta x \Delta z + \frac{\Delta t \Delta z}{4} [U_{CL} - U(19, j, k+1)] + 2 \frac{\Delta t \Delta z}{\Delta x} \right. \\
& \left. \frac{\Delta t \Delta x}{4} [W(20, j+1, k+1) - W(20, j-1, k+1)] + 2 \frac{\Delta t \Delta x}{\Delta z} \right\} \\
& + \theta_{CL} \left\{ \frac{\Delta t \Delta z}{4} [U_{CL} + U(20, j, k+1)] - \frac{\Delta t \Delta z}{\Delta x} \right\} \\
& - \theta(19, j, k+1) \left\{ \frac{\Delta t \Delta z}{4} [U(20, j, k+1) + U(19, j, k+1)] + \frac{\Delta t \Delta z}{\Delta x} \right\} \\
& + \theta(20, j+1, k+1) \left\{ \frac{\Delta t \Delta x}{4} [W(20, j+1, k+1) - W(20, j, k+1)] - \frac{\Delta t \Delta x}{\Delta z} \right\} \\
& - \theta(20, j-1, k+1) \left\{ \frac{\Delta t \Delta x}{4} [W(20, j, k+1) + W(20, j-1, k+1)] + \frac{\Delta t \Delta x}{\Delta z} \right\} \\
& = \frac{\beta^2}{P_r} \Delta x \Delta z \theta(20, j, k)
\end{aligned}$$

III-3 Equation suivant la ligne (2)

Cette équation, (9), s'écrit :

$$\begin{aligned}
& \theta(i, 2, k+1) \left\{ \frac{\beta^2}{P_r} \Delta x \Delta z + \frac{\Delta t \Delta z}{4} [U(i+1, 2, k+1) - U(i-1, 2, k+1)] + 2 \frac{\Delta t \Delta z}{\Delta x} \right. \\
& \left. \frac{\Delta t \Delta x}{4} [W(i, 3, k+1) - W_{CL}] + 2 \frac{\Delta t \Delta x}{\Delta z} \right\} \\
& + \theta(i+1, 2, k+1) \left\{ \frac{\Delta t \Delta z}{4} [U(i+1, 2, k+1) + U(i, 2, k+1)] - \frac{\Delta t \Delta z}{\Delta x} \right\} \\
& - \theta(i-1, 2, k+1) \left\{ \frac{\Delta t \Delta z}{4} [U(i, 2, k+1) + U(i-1, 2, k+1)] + \frac{\Delta t \Delta z}{\Delta x} \right\} \\
& + \theta(i, 3, k+1) \left\{ \frac{\Delta t \Delta x}{4} [W(i, 3, k+1) - W(i, 2, k+1)] - \frac{\Delta t \Delta x}{\Delta z} \right\} \\
& - \theta_{CL} \left\{ \frac{\Delta t \Delta x}{4} [W(i, 2, k+1) + W_{CL}] + \frac{\Delta t \Delta x}{\Delta z} \right\} = \frac{\beta^2}{P_r} \Delta x \Delta z \theta(i, 2, k)
\end{aligned}$$

III-4 Equation suivant la ligne (20)

Cette équation, (10), s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & \theta(i,20,k+1) \left\{ \frac{\beta^2}{P_r} \Delta x \Delta z + \frac{\Delta t \Delta z}{4} [U(i+1,20,k+1) - U(i-1,20,k+1)] + 2 \frac{\Delta t \Delta z}{\Delta x} \right\} \\
 & \left\{ \frac{\Delta t \Delta x}{4} [W_{CL} - W(i,19,k+1)] + 2 \frac{\Delta t \Delta x}{\Delta z} \right\} \\
 & + \theta(i+1,20,k+1) \left\{ \frac{\Delta t \Delta z}{4} [U(i+1,20,k+1) + U(i,20,k+1)] - \frac{\Delta t \Delta z}{\Delta x} \right\} \\
 & - \theta(i-1,20,k+1) \left\{ \frac{\Delta t \Delta z}{4} [U(i,20,k+1) + U(i-1,20,k+1)] + \frac{\Delta t \Delta z}{\Delta x} \right\} \\
 & + \theta_{CL} \left\{ \frac{\Delta t \Delta x}{4} [W_{CL} - W(i,20,k+1)] - \frac{\Delta t \Delta x}{\Delta z} \right\} \\
 & - \theta(i,19,k+1) \left\{ \frac{\Delta t \Delta x}{4} [W(i,20,k+1) + W(i,19,k+1)] + \frac{\Delta t \Delta x}{\Delta z} \right\} \\
 & = \frac{\beta^2}{P_r} \Delta x \Delta z \theta(i,20,k)
 \end{aligned}$$

IV- CONDITIONS AUX LIMITES

Les conditions aux limites doivent aussi être discrétisées tout comme l'ont été les autres équations de notre étude. On utilisera bien sûr les mêmes indices de discrétisation que pour précédemment. Les conditions aux limites deviennent donc comme suit:

IV-1 Conditions à la paroi

Sur la paroi latérale de l'enceinte, on a :

$$\theta(x=0, z) = \theta_1 - z$$

D'où les conditions discrétisées :

$$\blacktriangleright \theta(1, j, k+1) = \theta_1 - (j-1)\Delta z \quad (11)$$

$$\blacktriangleright \theta(21, j, k+1) = \theta_1 - (j-1)\Delta z \quad (12)$$

IV-2 Conditions d'isothermie sur les bases

Ces conditions s'écrivent :

$$\blacktriangleright \theta(x, z=0) = \theta_1$$

$$\text{D'où : } \theta(i, 1, k+1) = \theta_1 \quad (13)$$

$$\blacktriangleright \theta(x, z=1) = \theta_2$$

$$\text{D'où : } \theta(i, 21, k+1) = \theta_2 \quad (14)$$

IV-3 Conditions aux limites dynamiques

On a les conditions dynamiques suivantes :

$$\blacktriangleright \psi(x, z=0) = 0$$

$$\text{D'où : } \psi(i, 1, k+1) = 0 \quad (15)$$

$$\blacktriangleright \psi(x, z=1) = 0$$

$$\text{D'où : } \psi(i, 21, k+1) = 0 \quad (16)$$

$$\blacktriangleright \psi(x=0, z) = 0$$

$$\text{D'où : } \psi(1, j, k+1) = 0 \quad (17)$$

$$\blacktriangleright \psi(x=1, z) = 0$$

$$\text{D'où : } \psi(21, j, k+1) = 0 \quad (18)$$

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Abbès AZZI, "Méthodes numériques, la méthode des volumes finis"

Faculté de Génie Mécanique, USTO, Oran, Algérie.

- Mrabti A. "Simulation numérique d'écoulement de convection naturelle...", Thèse de doctorat, 1999.
- J.M.Seinfeld et S.N.Pandis, "Atmospheric chemistry and physics from air pollution to climate change", Wiley, New-York, 1998.
- H.K.Versteg et W. Malalasekera, "an introduction to computational fluid dynamics" . The finite volume methode, 1^{ère} édition, Longman Group Ltd, England, 1995.
- Launder B.E.et Spalding D.b.1974, the numerical computation of turbulent flows, computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol.3,pp.269-289.
- Viollet P.L.1988, On the numerical modeling of stratified flows, Physical Processes in Estuaries (eds.Dronkers and van leussen) Springer verlay, pp.257-277.