



UNIVERSITÉ MOHAMMED V
FACULTÉ DES SCIENCES
Rabat



Cours de mécanique du point matériel

Pr. Bensalah Hala
2025-2026

Sommaire :

Chapitre 0 : Rappels et compléments mathématiques

Chapitre 1 : Les systèmes de coordonnées

Chapitre 2 : Cinématique du point matériel

Chapitre 3 : Dynamique du point matériel

Chapitre 4 : Travail et Energie

Chapitre 5 : Mouvements à force centrale

Rappels et compléments mathématiques

I. Les vecteurs :

a. Définition :

Un vecteur est une entité mathématique définie par une origine, une direction, un sens et un module (une norme).

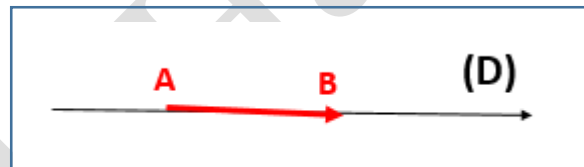
L'origine : Le point d'application.

La direction : La droite qui porte le vecteur.

Le sens : représente l'orientation origine-extrême du vecteur.

Le module ou la norme : représente la valeur de la grandeur mesurée par le vecteur.

❖ Si $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$



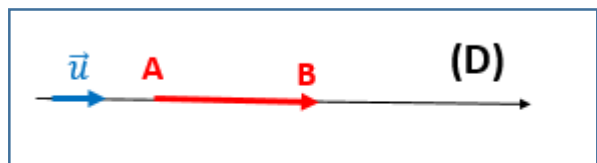
- L'origine de $\vec{V}$: A.
- La direction de $\vec{V}$: La droite (D).
- Le sens : indiqué par la flèche de A vers B.
- Le module : $V = \|\vec{V}\| = \|\overrightarrow{AB}\| = \text{Longueur du segment } [AB]$.

b. Vecteur unitaire : $\vec{u}$

Un vecteur unitaire $\vec{u}$ est un vecteur de module 1.

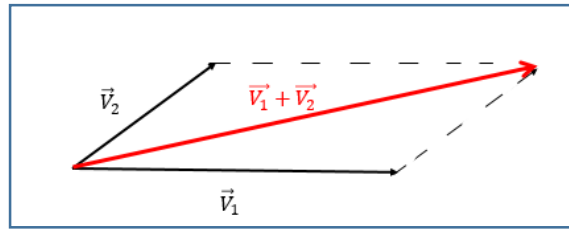
❖ Si $\vec{u}$ est le vecteur unitaire de $\vec{V} = \overrightarrow{AB}$

Alors : $\vec{u} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$



c. Addition de deux vecteurs :

Le vecteur résultant $\vec{V}_1 + \vec{V}_2$ correspond à la diagonale du parallélogramme formé par les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.



d. Multiplication d'un vecteur $\vec{V}$ par un scalaire k :

Le vecteur $k\vec{V}$ est un vecteur:

- ✓ De direction: même direction que $\vec{V}$.
- ✓ De sens: - si $k > 0$ alors $k\vec{V}$ est de même sens que $\vec{V}$.
- si $k < 0$ alors $k\vec{V}$ est de sens contraire à $\vec{V}$.
- ✓ De module: $|k| \|\vec{V}\|$.

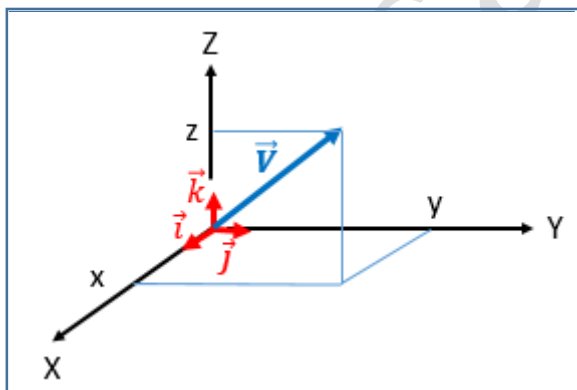
e. Composantes d'un vecteur :

On se place dans un repère orthonormé direct $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soit $\vec{V}$ un vecteur

Le vecteur $\vec{V}$ peut s'écrire sous la forme : $\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

(x, y, z) sont les composantes du vecteur $\vec{V}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$



$\vec{i}$ = vecteur unitaire de l'axe $\overrightarrow{OX}$
 $\vec{j}$ = vecteur unitaire de l'axe $\overrightarrow{OY}$
 $\vec{k}$ = vecteur unitaire de l'axe $\overrightarrow{OZ}$

La norme de $\vec{V}$ est: $\|\vec{V}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

❖ Remarque :

Deux vecteurs $\vec{V}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ et $\vec{V}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ sont égaux, si leurs composantes sont égales une à une.

$$\text{c.à.d: } \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$$

f. Dérivée par rapport au temps d'un vecteur $\vec{V}$:

Considérons un vecteur $\vec{V}$ fonction de la variable temps t tel que:

$$\vec{V}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

La dérivée du vecteur $\vec{V}$ par rapport au temps t est le vecteur:

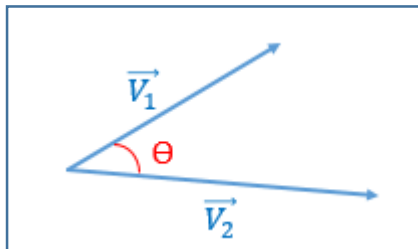
$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$$

Avec: $\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$

g. Produit scalaire de deux vecteurs :

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ faisant entre eux un angle Θ est le scalaire (le nombre) noté $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$, défini par la relation :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cdot \cos \Theta$$



$$0 \leq \Theta \leq \pi$$

$$\Theta = (\vec{V}_1, \vec{V}_2) : \text{l'angle entre } \vec{V}_1 \text{ et } \vec{V}_2$$

❖ Expression analytique du produit scalaire en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} \vec{V}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \\ \vec{V}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} \end{cases} \Rightarrow \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\begin{cases} \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 \\ \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cdot \cos \Theta \end{cases} \Rightarrow \cos \Theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\|}$$

Avec: $\|\vec{V}_1\| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$

$$\|\vec{V}_2\| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$$

❖ Propriétés :

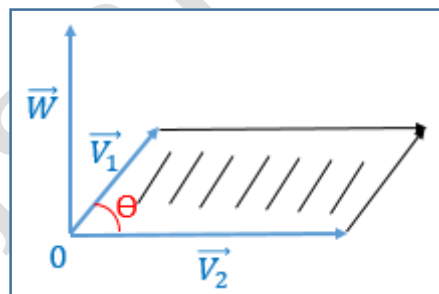
- $\vec{V} \cdot \vec{V} = \|\vec{V}\|^2$
- $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0 \Leftrightarrow$ les deux vecteurs sont orthogonaux ou l'un des deux vecteurs est nul
- Le produit scalaire est :
 - ❖ Commutatif: $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \cdot \vec{V}_1$
 - ❖ Distributif: $\vec{W} \cdot (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \vec{W} \cdot \vec{V}_1 + \vec{W} \cdot \vec{V}_2$
- $\frac{d(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)}{dt} = \frac{d\vec{V}_1}{dt} \cdot \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \cdot \frac{d\vec{V}_2}{dt}$

h. Produit vectoriel de deux vecteurs :

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ faisant entre eux un angle Θ est le vecteur

$\vec{W} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$, défini par :

- Direction $\perp$ au plan formé par les deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.
- Sens tel que le trièdre $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{W})$ soit direct, c.à.d: le sens du déplacement du tire-bouchon qui tourne de $\vec{V}_1$ vers $\vec{V}_2$.
- Module : $\|\vec{W}\| = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cdot |\sin \Theta|$: il représente l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.



$$0 \leq \Theta = (\vec{V}_1, \vec{V}_2) \leq \pi$$

❖ Expression de $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ dans une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

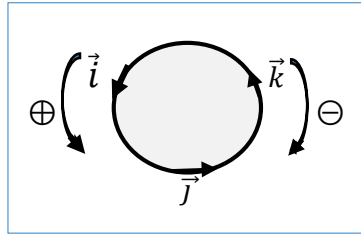
$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} + (y_1 z_2 - z_1 y_2) \\ - (x_1 z_2 - z_1 x_2) \\ + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \end{pmatrix}$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = (y_1 z_2 - z_1 y_2) \vec{i} - (x_1 z_2 - z_1 x_2) \vec{j} + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k}$$

Pour Les vecteurs $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on a :

$$\begin{cases} \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \end{cases}$$



➤ Propriétés :

➤ Le produit vectoriel est :

❖ Anticommutatif: $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$

❖ Distributif: $\vec{V}_3 \wedge (\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = \vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1 + \vec{V}_3 \wedge \vec{V}_2$

➤ $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}_1$ est parallèle à $\vec{V}_2$ ou l'un des deux vecteurs est nul.

➤ $\frac{d(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2)}{dt} = \frac{d\vec{V}_1}{dt} \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \frac{d\vec{V}_2}{dt}$

i. Produit mixte :

Le produit mixte $(\vec{U}, \vec{V}, \vec{W})$ est le scalaire défini par: $(\vec{U} \wedge \vec{V}) \cdot \vec{W}$

Il représente le volume du parallélépipède construit sur les vecteurs $\vec{U}, \vec{V}$ et $\vec{W}$.

II. Fonction à plusieurs variables et opérateurs mathématiques :

a. Fonction scalaire à plusieurs variables :

Soit la fonction $f(x, y, z)$ dépendant de trois variables (x, y, z)

➤ Ses dérivées partielles sont : $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$

Avec :

$\frac{\partial f}{\partial x}$ = dérivée de f par rapport à x et qui est obtenue en dérivant f par rapport à x et en considérant y et z comme des constantes.

$\frac{\partial f}{\partial y}$ = dérivée de f par rapport à y et qui est obtenue en dérivant f par rapport à y et en considérant x et z comme des constantes.

$\frac{\partial f}{\partial z}$ = dérivée de f par rapport à z et qui est obtenue en dérivant f par rapport à z et en considérant x et y comme des constantes.

➤ La différentielle totale df de la fonction $f(x, y, z)$ est donnée par :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}.dx + \frac{\partial f}{\partial y}.dy + \frac{\partial f}{\partial z}.dz$$

df représente la variation totale de la fonction $f(x, y, z)$ lorsque le point $M(x, y, z)$ passe en $M'(x+dx, y+dy, z+dz)$.

Exemple :

$$f(x, y, z) = x^2y + y^2z$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 2yz, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = y^2$$

$$df = 2xy.dx + (x^2 + 2yz).dy + y^2.dz$$

b. Fonction vectorielle à plusieurs variables :

La différentielle totale d'un champ vectoriel $\vec{V}(x, y, z)$ est défini par:

$$d\vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x}.dx + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y}.dy + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}.dz$$

c. Opérateurs mathématiques :

- Gradient d'une fonction scalaire $f(x, y, z)$:

Le gradient de la fonction $f(x, y, z)$ continue et dérivable est un vecteur noté $\overrightarrow{\text{grad}}f$ et qui est défini par:

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = \vec{\nabla} \cdot f$$

Avec: $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$: opérateur nabla (vecteur symbolique).

- Rotationnel d'une fonction vectorielle :

Soit $\vec{V}(M)$ un champ vectoriel défini en tout point $M(x, y, z)$ et ayant pour composantes :

$$\begin{cases} V_x(x, y, z) \\ V_y(x, y, z) \\ V_z(x, y, z) \end{cases}$$

Le rotationnel de $\vec{V}(M)$ est un vecteur noté $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}$ et qui est défini par:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$$

Les composantes cartésiennes du $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont données par :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

❖ Remarque :

$$\text{Si } \vec{V} = \overrightarrow{\text{grad}}(f) \text{ alors } \overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \cdot f) = \vec{0}$$

Donc le rotationnel d'un gradient est nul.

Par conséquent, pour montrer qu'un vecteur $\vec{V}(M)$ est un champ de gradient, il suffit de vérifier que $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{V} = \vec{0}$

- Divergence d'une fonction vectorielle :

La divergence de $\vec{V}(M)$ est un scalaire noté $\text{div} \vec{V}$ et qui est défini par :

$$\text{div} \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$$

Ainsi, la divergence d'un vecteur $\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$ est donnée par :

$$\text{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}$$

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Dans un repère $R(O, X, Y, Z)$ muni d'une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère 3 vecteurs:

$$\vec{V}_1 = \vec{i} + \vec{k} \quad , \quad \vec{V}_2 = -\vec{i} + \vec{j} \quad , \quad \vec{V}_3 = \cos(2t)\vec{i} + \sin(3t)\vec{k}$$

- Trouver l'expression du vecteur $\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$. En déduire le module de $\vec{V}$
- Trouver l'expression du vecteur unitaire $\vec{u}$ de $\vec{V}$
- Calculer le produit scalaire $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$ et en déduire l'angle Θ entre $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$
- Trouver l'expression du produit vectoriel $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$. En déduire son module. Que représente ce module ?
- Calculer $\frac{d\vec{V}_3}{dt}$

Solution :

$$a. \quad \vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 = \vec{i} + \vec{k} + (-\vec{i} + \vec{j}) = \vec{j} + \vec{k}$$

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$$

$$b. \quad \vec{u} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}.$$

$$c. \quad \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \times (-1) + 0 \times 1 + 1 \times 0 = -1$$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\| \cdot \cos\theta \rightarrow \cos\theta = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{\|\vec{V}_1\| \cdot \|\vec{V}_2\|} = \frac{-1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pm 2\pi}{3}$$

$$d. \quad \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 0 - 1 \times 1 \\ 1 \times 0 - (-1) \times 1 \\ 1 \times 1 - 0 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$$

$$\|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2\| = \sqrt{3} \text{ représente l'aire du parallélogramme construit sur } \vec{V}_1 \text{ et } \vec{V}_2$$

$$e. \quad \frac{d\vec{V}_3}{dt} = -2 \sin(2t)\vec{i} + 3 \cos(3t)\vec{k}$$

Exercice 2 :

Soit le champ scalaire défini sur $\mathbb{R}^3$ par : $f(x, y, z) = 3x^2y - y^3z$

- a. Calculer les dérivées partielles et la différentielle totale de f . En déduire $\overrightarrow{\text{grad}}(f)$
- On considère le champ de vecteurs :

$$\vec{A} = (3x^2 + 3y - 1)\vec{i} + (z^2 + 3x)\vec{j} + (2yz + 1)\vec{k}$$

- b. Montrer que $\vec{A}$ est un champ de gradients.

Solution :

a. $\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{y,z} = 6xy$; $\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{x,z} = 3x^2 - 3y^2z$; $\frac{\partial f}{\partial z}\bigg|_{x,y} = y^3$

$$df = 6xy \, dx + (3x^2 - 3y^2z)dy + y^3 \, dz$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = 6xy \vec{i} + (3x^2 - 3y^2z) \vec{j} + y^3 \vec{k}$$

b. $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3x^2+3y-1 \\ z^2+3x \\ 2yz+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(2yz+1) - \frac{\partial}{\partial z}(z^2+3x) \\ \frac{\partial}{\partial x}(2yz+1) - \frac{\partial}{\partial z}(3x^2+3y-1) \\ \frac{\partial}{\partial x}(z^2+3x) - \frac{\partial}{\partial y}(3x^2+3y-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z-2z \\ 0-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} = \vec{0} \Rightarrow \vec{A} \text{ est un champ de gradients.}$$

Les systèmes de coordonnées

Pour étudier le mouvement d'une particule, il est indispensable de pouvoir décrire sa position dans l'espace à chaque instant t . Pour cela, on choisit un repère (ou système de coordonnées).

Selon la symétrie du système étudié, on utilisera l'un des systèmes de coordonnées suivants :

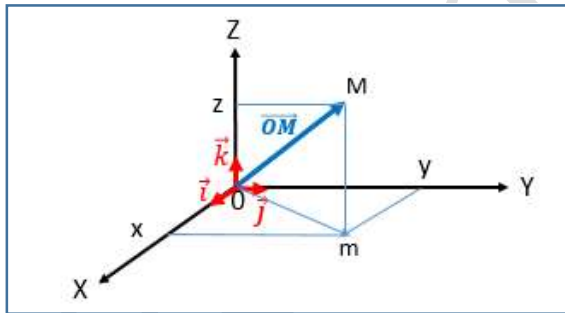
- ✓ Système de coordonnées cartésiennes (x, y, z)
- ✓ Système de coordonnées cylindriques (ρ, φ, z)
- ✓ Système de coordonnées sphériques (r, Θ, φ)

I. Système de coordonnées cartésiennes :

Dans un repère orthonormé direct fixe $R(O, X, Y, Z)$ de base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, un point matériel M est repéré par ses coordonnées: $M(x, y, z)$ telles que:

$$x = \text{Proj}_{\overrightarrow{OX}} \overrightarrow{OM} \quad , \quad y = \text{Proj}_{\overrightarrow{OY}} \overrightarrow{OM} \quad , \quad z = \text{Proj}_{\overrightarrow{OZ}} \overrightarrow{OM}$$

$$-\infty < x < +\infty \quad , \quad -\infty < y < +\infty \quad , \quad -\infty < z < +\infty$$



Dans R , le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$$

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

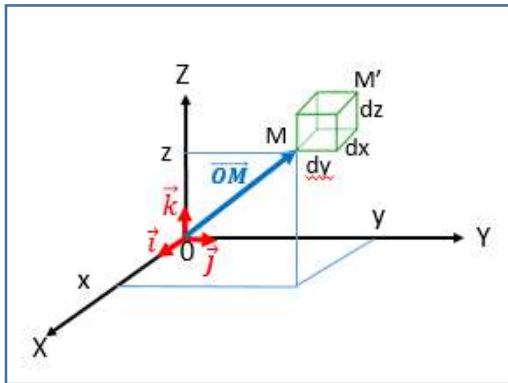
❖ Déplacement élémentaire: $d\overrightarrow{OM}$

Soit M' un point de l'espace très voisin de M : $M'(x+dx, y+dy, z+dz)$

Le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{MM'}$ s'écrit:

$$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = dx.\vec{i} + dy.\vec{j} + dz.\vec{k}$$

❖ Volume élémentaire: dV



$$dV = dx \cdot dy \cdot dz$$

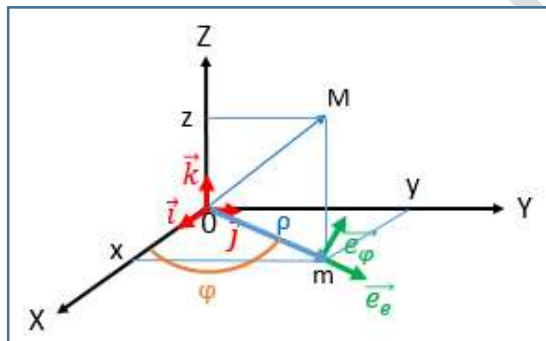
II. Système de coordonnées cylindriques :

Si la trajectoire du point M possède une symétrie axiale de révolution (c.à.d. : rotation autour d'un axe fixe), il est préférable d'utiliser les coordonnées cylindriques.

La position de M sera définie par les 3 variables (ρ, φ, z) telles que :

$$\rho = \text{Proj}_{\text{XOY}} \overrightarrow{OM} = \|\overrightarrow{Om}\| \quad , \quad \varphi = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{Om}) \quad , \quad z = \text{Proj}_{\overrightarrow{OZ}} \overrightarrow{OM}$$

$$0 \leq \rho < +\infty \quad , \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad , \quad -\infty < z < +\infty$$



Dans la base cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$, le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$$

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{k}$$

❖ Relation entre les coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) et les coordonnées cartésiennes (x, y, z) :

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos(\varphi) \\ y = \rho \cdot \sin(\varphi) \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases}$$

❖ Base cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$:

On a $\overrightarrow{Om} = \rho \vec{e}_\rho$

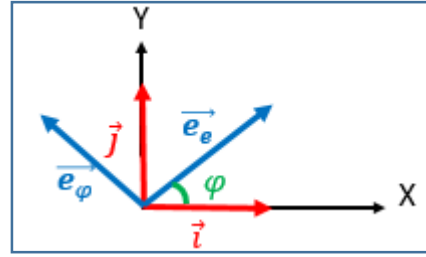
et on a aussi : $\overrightarrow{Om} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Donc $\rho \vec{e}_\rho = x\vec{i} + y\vec{j} = \rho \cos\varphi \vec{i} + \rho \sin\varphi \vec{j}$

$$\rho \vec{e}_\rho = \rho(\cos\varphi \vec{i} + \sin\varphi \vec{j})$$

$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi \vec{i} + \sin\varphi \vec{j}$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j}$$



Le système $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ forme une base cylindrique mobile, orthonormée et directe.

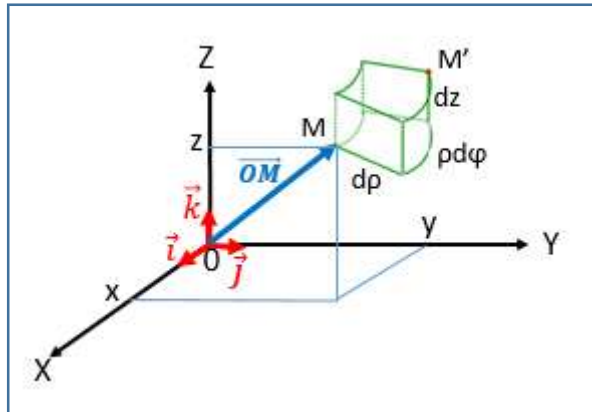
❖ Déplacement élémentaire: $d\vec{OM}$

Soit M' un point de l'espace très voisin de M : $M'(\rho+d\rho, \varphi+pd\varphi, z+dz)$

Le vecteur déplacement élémentaire $\vec{MM'}$ s'écrit:

$$d\vec{OM} = \vec{MM'} = \vec{OM'} - \vec{OM} = d\rho \cdot \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + dz \cdot \vec{k}$$

❖ Volume élémentaire : dV



$$dV = d\rho \cdot \rho d\varphi \cdot dz$$

III. Système de coordonnées polaires : (ρ, φ)

C'est un cas particulier du système de coordonnées cylindriques où $z=0$

La trajectoire de M est plane, c.à.d. M se déplace dans le plan (XOY)

Dans ce cas:
$$\begin{cases} \vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho \\ d\vec{OM} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \vec{e}_\varphi \\ dS = \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi \end{cases}$$

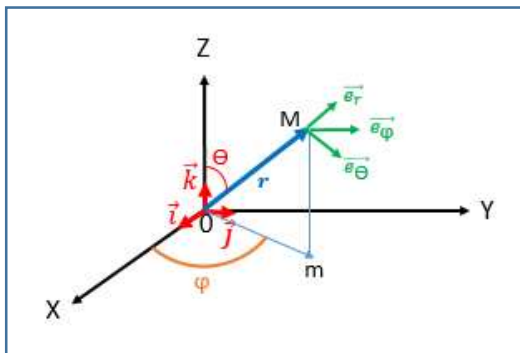
IV. Système de coordonnées sphériques :

Dans tout problème à symétrie sphérique (c.à.d. rotation autour d'un point fixe), il est préférable d'utiliser les coordonnées sphériques.

La position de M sera définie par les 3 variables (r, θ, φ) telles que :

$$\left\{ \begin{array}{l} r = \|\overrightarrow{OM}\|, \quad 0 \leq r \leq +\infty \\ \theta = (\vec{k}, \overrightarrow{OM}), \quad 0 \leq \theta \leq \pi \\ \varphi = (\overrightarrow{OX}, \overrightarrow{Om}), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \end{array} \right.$$

$\overrightarrow{Om}$: Projection orthogonale de $\overrightarrow{OM}$ sur le plan (XOY)



Dans la base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$, le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$

❖ Relation entre les coordonnées sphériques (r, θ, φ) et les coordonnées cartésiennes (x, y, z) :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ y = r \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ z = r \cdot \cos(\theta) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctg\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}\right) \\ \varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \end{array} \right.$$

❖ Base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$:

On a $\overrightarrow{Om} = r\vec{e}_r$

et on a aussi $\overrightarrow{Om} = r = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

donc $r\vec{e}_r = r\sin\theta\cos\varphi\vec{i} + r\sin\theta\sin\varphi\vec{j} + r\cos\theta\vec{k}$

$$\vec{e}_r = \sin\theta \cdot \cos\varphi \vec{i} + \sin\theta \cdot \sin\varphi \vec{j} + \cos\theta \vec{k}$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j} \quad : \text{vecteur unitaire du système des coordonnées cylindriques.}$$

$$\vec{e}_\theta = \vec{e}_\varphi \wedge \vec{e}_r = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\varphi \\ \sin\theta \sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\varphi \cos\theta \\ \cos\theta \sin\varphi \\ -\sin^2\varphi \sin\theta - \cos^2\varphi \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_\theta = \cos\theta \cdot \cos\varphi \vec{i} + \cos\theta \cdot \sin\varphi \vec{j} - \sin\theta \vec{k}$$

Le système $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ forme une base sphérique mobile, orthonormée et directe.

❖ Déplacement élémentaire: $d\vec{OM}$

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r = r \sin\theta \cos\varphi \vec{i} + r \sin\theta \sin\varphi \vec{j} + r \cos\theta \vec{k}$$

$$d\vec{OM} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} d\varphi$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r} (r \sin\theta \cos\varphi \vec{i} + r \sin\theta \sin\varphi \vec{j} + r \cos\theta \vec{k}) \\ &= \sin\theta \cos\varphi \vec{i} + \sin\theta \sin\varphi \vec{j} + \cos\theta \vec{k} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial r} = \vec{e}_r$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} &= \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin\theta \cos\varphi \vec{i} + r \sin\theta \sin\varphi \vec{j} + r \cos\theta \vec{k}) \\ &= r \cos\theta \cos\varphi \vec{i} + r \cos\theta \sin\varphi \vec{j} - r \sin\theta \vec{k} \end{aligned}$$

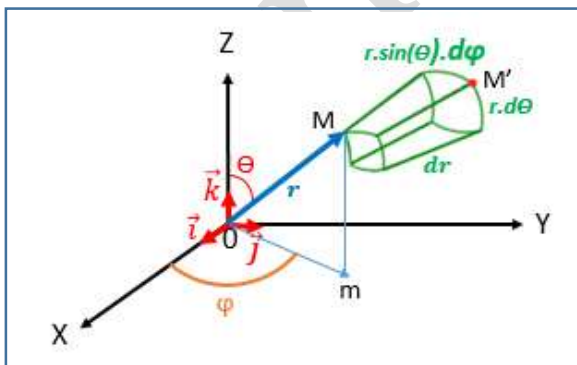
$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \theta} = r \vec{e}_\theta$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi} (r \sin\theta \cos\varphi \vec{i} + r \sin\theta \sin\varphi \vec{j} + r \cos\theta \vec{k}) \\ &= -r \sin\theta \sin\varphi \vec{i} + r \sin\theta \cos\varphi \vec{j} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \vec{OM}}{\partial \varphi} = r \sin\theta \vec{e}_\varphi$$

$$d\vec{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{e}_\varphi$$

❖ Volume élémentaire : dV



$$dV = r^2 \cdot \sin(\theta) \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Calculer par intégration les grandeurs suivantes :

- La surface latérale et le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur h.
- Le volume d'une sphère de centre O et de rayon R.

Solution :

- a. Surface latérale :

$$dS = R d\varphi dz \Rightarrow S = \iint R d\varphi dz = R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz$$

$$S = 2\pi Rh$$

Volume d'un cylindre :

$$\begin{aligned} dV = \rho d\rho d\varphi dz &\Rightarrow V = \iiint \rho d\rho d\varphi dz \\ &= \int \rho d\rho \int d\varphi \int dz \\ &= \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^R [\varphi]_0^{2\pi} [z]_0^h \end{aligned}$$

$$V = \pi R^2 h$$

- b. Volume d'une sphère :

$$\begin{aligned} dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi &\Rightarrow V = \iiint r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \\ &= \int r^2 dr \int \sin\theta d\theta \int d\varphi \\ &= \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R [-\cos\theta]_0^\pi [\varphi]_0^{2\pi} \end{aligned}$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

Exercice 2 :

Soit un point matériel de coordonnées cartésiennes: $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$, $z = 2$

Calculer :

- Ses coordonnées cylindriques (ρ , φ , z).
- Ses coordonnées sphérique (r , θ , φ).

Solution :

$$\text{a. } \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \\ z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2 \\ \varphi = \arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{k} = 2\vec{e}_\rho + 2\vec{k}$$

$$\text{b. } \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctg \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{z^2}} \\ \varphi = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ \theta = \arctg\left(\frac{\sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2}}{2^2}\right) = \arctg 1 = \frac{\pi}{4} \\ \varphi = \arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r = 2\sqrt{2} \vec{e}_r$$

Cinématique du point matériel

I. Cinématique sans changement de repère

1. Définition :

La cinématique est l'étude du mouvement des corps en fonction du temps, sans tenir compte des causes qui provoquent ou modifient le mouvement.

Le corps étudié est un point matériel dont les dimensions sont négligeables devant la distance parcourue.

2. Position d'un point matériel M :

La position d'un point matériel à un instant t est déterminée par rapport à un repère par un vecteur $\overrightarrow{OM}$ qu'on appelle vecteur position.

Son origine est le centre du repère O et son extrémité est le point matériel M .

3. La trajectoire :

La trajectoire est l'ensemble des positions occupées par un point en mouvement au cours du temps, formant une ligne ou une courbe dans l'espace. Elle définit la nature du mouvement.

❖ Equation de la trajectoire :

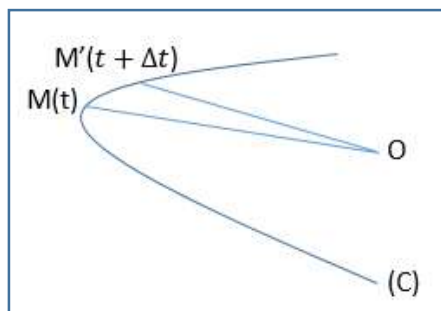
C'est la relation qui lie les coordonnées du point matériel entre eux indépendamment du temps.

Pour trouver l'équation de la trajectoire, il faut éliminer le temps entre les équations horaires.

4. Vitesse d'un point matériel M par rapport à R :

a. Vitesse moyenne : $\overrightarrow{V}_m(M/R)$

Soit un point matériel mobile qui décrit une trajectoire (C) dans un référentiel R .



La vitesse moyenne $\overrightarrow{V}_m(M/R)$ entre t et $(t + \Delta t)$ est donnée par:

$$\overrightarrow{V}_m(M/R) = \frac{\overrightarrow{MM'}}{(t+\Delta t)-t} = \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{\Delta t}$$

L'unité de la vitesse est : m/s.

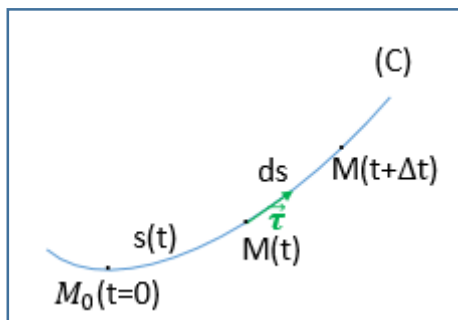
b. Vitesse instantanée : $\vec{V}(M/R)$

Par définition: $\vec{V}(M/R) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{V}_m(M/R)$

$$\vec{V}(M/R) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_R$$

$$\boxed{\vec{V}(M/R) = \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_R}$$

❖ Expression de $\vec{V}(M/R)$ en fonction de $\|\vec{V}(M/R)\|$:



M_0 = position de M à l'instant initial $t=0$

M = position à t

M' = position à $(t+\Delta t)$ (M' très proche de M)

La longueur de l'arc $M_0 M$ est appelée abscisse curviligne $s(t)$

$MM' = ds$ (M' très proche de M)

On a $\overrightarrow{MM'} = \|\overrightarrow{MM'}\| \cdot \vec{\tau} = ds \cdot \vec{\tau}$

Avec $\vec{\tau}$: vecteur unitaire de la droite tangente à la trajectoire au point M , orienté dans le sens du mouvement.

Donc: $\frac{\overrightarrow{MM'}}{dt} = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{\tau} \Rightarrow \boxed{\vec{V}(M/R) = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{\tau}}$

Le vecteur vitesse est toujours porté par la tangente à la trajectoire, orienté dans le sens du mouvement, avec :

$$\boxed{\|\vec{V}(M/R)\| = \frac{ds}{dt}}$$

❖ Expression du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{V}(M/R) = \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_R = \frac{dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}}{dt}$$

$$\boxed{\vec{V}(M/R) = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}}$$

❖ Expression du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques :

$$\vec{V}(M/R) = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_R = \frac{d\rho \cdot \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \cdot \vec{e}_\varphi + dz \cdot \vec{k}}{dt}$$

$$\vec{V}(M/R) = \frac{d\rho}{dt} \vec{e}_\rho + \rho \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$

❖ Expression du vecteur vitesse en coordonnées sphériques :

$$\vec{V}(M/R) = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_R = \frac{dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{e}_\varphi}{dt}$$

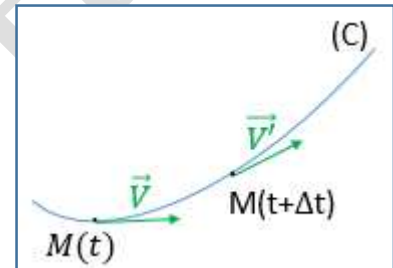
$$\vec{V}(M/R) = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + r \sin(\theta) \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi$$

5. Accélération d'un point matériel M par rapport à R :

a. Accélération moyenne : $\vec{a}_m(M/R)$

Par définition :

$$\vec{a}_m(M/R) = \frac{\vec{V}' - \vec{V}}{(t+\Delta t) - t} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$



L'unité de l'accélération est : m/s².

b. Accélération instantanée: $\vec{a}(M/R)$

$$\vec{a}(M/R) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{a}_m(M/R) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \left. \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} \right|_R$$

$$\vec{a}(M/R) = \left. \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} \right|_R = \left. \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} \right|_R$$

❖ Expression du vecteur accélération en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{a}(M/R) = \left. \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} \right|_R = \frac{d^2 x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{k}$$

❖ Expression du vecteur accélération en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} \vec{a}(M/R) &= \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\rho}{dt} \vec{e}_\rho + \rho \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi + \frac{dz}{dt} \vec{k} \right) \\ &= \frac{d^2 \rho}{dt^2} \vec{e}_\rho + \frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dt} \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi + \rho \frac{d^2 \varphi}{dt^2} \vec{e}_\varphi + \rho \frac{d\varphi}{dt} \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{k} \end{aligned}$$

On a $\vec{e}_\rho = \cos\varphi \vec{i} + \sin\varphi \vec{j}$ et $\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j}$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi \text{ et } \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\rho.$$

$$\text{Donc : } \vec{a}(M/R) = \left(\frac{d^2 \rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2 \right) \vec{e}_\rho + \left(\rho \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + 2 \frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{d\varphi}{dt} \right) \vec{e}_\varphi + \frac{d^2 z}{dt^2} \vec{k}$$

$$\text{On pose } \begin{cases} \frac{d\rho}{dt} = \dot{\rho} \text{ et } \frac{d^2\rho}{dt^2} = \ddot{\rho} \\ \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \text{ et } \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}$$

$$\vec{a}(M/R) = \left. \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} \right|_R = [\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2]\vec{e}_\rho + [\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}]\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{k}$$

❖ Expression du vecteur accélération en coordonnées sphériques :

$$\begin{aligned} \vec{a}(M/R) &= \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + r \sin\theta \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi \right) \\ &= \frac{d^2r}{dt^2} \vec{e}_r + \frac{dr}{dt} \cdot \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \vec{e}_\theta + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \vec{e}_\theta + r \frac{d\theta}{dt} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} + \frac{dr}{dt} \sin\theta \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi + r \sin\theta \frac{d^2\varphi}{dt^2} \vec{e}_\varphi + \\ &\quad r \cos\theta \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \vec{e}_\varphi + r \sin\theta \cdot \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} \end{aligned}$$

$$\text{On a } \begin{cases} \vec{e}_r = \sin\theta \cos\varphi \vec{i} + \sin\theta \sin\varphi \vec{j} + \cos\theta \vec{k} \\ \vec{e}_\theta = \cos\theta \cos\varphi \vec{i} + \cos\theta \sin\varphi \vec{j} - \sin\theta \vec{k} \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j} \end{cases}$$

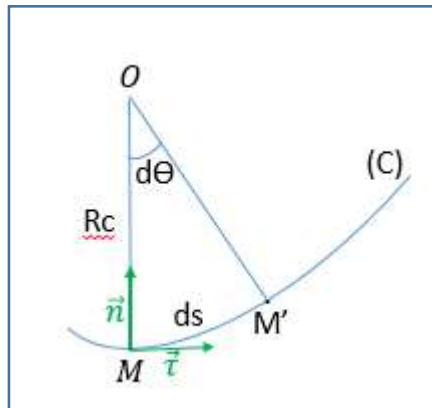
$$\begin{cases} d\vec{e}_r = \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} d\varphi = +\vec{e}_\theta \cdot d\theta + \sin\theta \cdot \vec{e}_\varphi \cdot d\varphi \\ d\vec{e}_\theta = \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} d\varphi = -\vec{e}_r \cdot d\theta + \cos\theta \cdot \vec{e}_\varphi \cdot d\varphi \\ d\vec{e}_\varphi = \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} d\varphi = (-\cos\varphi \vec{i} - \sin\varphi \vec{j}) d\varphi = (-\sin\theta \vec{e}_r - \cos\theta \vec{e}_\theta) d\varphi \end{cases}$$

$$\text{On pose } \begin{cases} \frac{dr}{dt} = \dot{r} \text{ et } \frac{d^2r}{dt^2} = \ddot{r} \\ \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \text{ et } \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} \\ \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \text{ et } \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{a}(M/R) &= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r}(\dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{\varphi} \sin\theta \cdot \vec{e}_\varphi) + r\dot{\theta} \vec{e}_\theta + r\ddot{\theta} \vec{e}_\theta + r\dot{\theta}(-\dot{\theta} \vec{e}_r + \cos\theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi) + r\dot{\varphi} \sin\theta \vec{e}_\varphi + \\ &\quad r\ddot{\varphi} \sin\theta \vec{e}_\varphi + r\cos\theta \dot{\varphi} \dot{\theta} \vec{e}_\varphi + r \sin\theta \dot{\varphi} (-\dot{\varphi} \sin\theta \vec{e}_r - \dot{\varphi} \cos\theta \vec{e}_\theta) \end{aligned}$$

$$\vec{a}(M/R) = \left. \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} \right|_R = [\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta] \vec{e}_r + [2r\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \cos\theta \sin\theta] \vec{e}_\theta + [2r\dot{\varphi} \sin\theta + 2r\dot{\theta} \dot{\varphi} \cos\theta + r\ddot{\varphi} \sin\theta] \vec{e}_\varphi$$

6. Accélération normale et tangentielle :



$$\vec{V}(M/R) = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{\tau} = V \cdot \vec{\tau}$$

$$\vec{a}(M/R) = \frac{dV}{dt} \cdot \vec{\tau} + V \cdot \frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

$$\text{avec: } \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{n} \cdot \frac{1}{R_c} \cdot V$$

et R_c = rayon de courbure

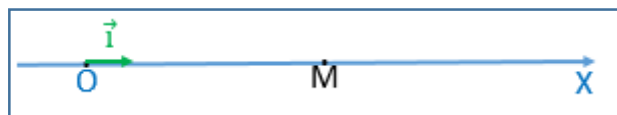
$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{a}(M/R) = \frac{dV}{dt} \cdot \vec{\tau} + \frac{V^2}{R_c} \cdot \vec{n} \\ \vec{a}_t = \frac{dV}{dt} \cdot \vec{\tau} = \frac{d^2s}{dt^2} \cdot \vec{\tau} = \text{accélération tangentielle} \\ \vec{a}_n = \frac{V^2}{R_c} \cdot \vec{n} = \text{accélération normale} \end{cases}$$

La base orthonormée directe $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{\tau} \wedge \vec{n})$ s'appelle le repère de Frenet-Serret.

7. Quelques mouvements particuliers :

a. Mouvement rectiligne :

Le mouvement rectiligne est caractérisé par une trajectoire sous forme d'une droite. Le point M est repéré par les coordonnées cartésiennes selon (OX) (si le mouvement est linéaire suivant (OX)).



Le vecteur position s'écrit: $\vec{OM} = x(t) \vec{i}$

Le vecteur vitesse est: $\vec{V}(M/R) = \frac{dx(t)}{dt} \vec{i} = \dot{x}(t) \vec{i}$

Le vecteur accélération: $\vec{a}(M/R) = \ddot{x}(t) \vec{i}$

- Si le mouvement est rectiligne uniforme: $V = \text{cte} = V_0 \Rightarrow \vec{a} = \vec{0}$

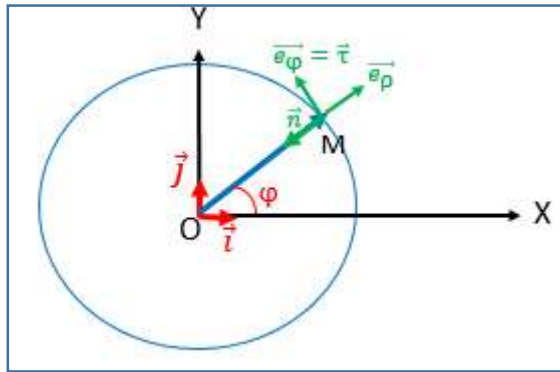
Dans ce cas: $\dot{x} = V_0 \Rightarrow x = V_0 t + x_0$ (Equation horaire)

- Si le mouvement est rectiligne uniformément varié: $\|\vec{a}\| = \text{cte} = a_0 = \ddot{x}$

Dans ce cas: $\dot{x}(t) = a_0 t + V_0 \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 + V_0 t + x_0$ (Equation horaire)

b. Mouvement circulaire :

La trajectoire du point M est un cercle dans le plan (XOY), de centre O et de rayon R.



$$\begin{aligned} \vec{e}_\varphi &= \vec{\tau} \\ \vec{e}_\rho &= -\vec{n} \end{aligned}$$

Pour déterminer l'expression des vecteurs vitesse et accélération, on peut utiliser soit les coordonnées polaires (ρ, φ) ou le repère de Frenet ($M, \vec{\tau}, \vec{n}$)

- Les coordonnées polaires :

Le vecteur position: $\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho = R \vec{e}_\rho$

Donc : $\vec{V}(M/R) = \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_R = R \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = R\dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$

et : $\vec{a}(M/R) = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} \Big|_R = R\ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi + R\dot{\varphi} \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = R\ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi - R\dot{\varphi}^2 \vec{e}_\rho$

$w = \dot{\varphi}$: vitesse angulaire $\Rightarrow \vec{V}(M/R) = R w \vec{e}_\varphi = R w (\vec{k} \wedge \vec{e}_\rho)$

On pose $\vec{w} = w \vec{k} \Rightarrow \vec{V}(M/R) = R \vec{w} \wedge \vec{e}_\rho = \vec{w} \wedge \vec{OM} \Rightarrow \frac{d\vec{OM}}{dt} \Big|_R = \vec{w} \wedge \vec{OM}$

- La base de Frenet :

$S = M_0 M = R\varphi$

Donc: $\vec{V}(M/R) = \frac{ds}{dt} \cdot \vec{\tau} = R\dot{\varphi} \cdot \vec{\tau} \quad (\vec{\tau} = \vec{e}_\varphi)$

et : $\vec{a}(M/R) = \frac{d^2 s}{dt^2} \cdot \vec{\tau} + \frac{v^2}{Rc} \cdot \vec{n} \quad (Rc = R)$
 $= R\ddot{\varphi} \cdot \vec{\tau} + R\dot{\varphi}^2 \cdot \vec{n} \quad (\vec{n} = -\vec{e}_\rho)$

Exercice d'application :

Soit un mobile M en mouvement tel que :

$$\overrightarrow{OM} = 3\cos(2t) \vec{i} + 3\sin(2t) \vec{j} + (8t - 4) \vec{k}$$

- 1) Déterminer la nature de la trajectoire de M dans l'espace R (O, X, Y, Z) ?
- 2) Exprimer $\vec{V}(M/R)$ et $\vec{a}(M/R)$. En déduire leur module.
- 3) Trouver $\vec{V}(M)$ et $\vec{a}(M)$ dans la base de Frenet.
- 4) En déduire le rayon de courbure R_c .

Solution :

$$1) \begin{cases} x = 3\cos 2t \\ y = 3\sin 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 9\cos^2 2t \\ y^2 = 9\sin^2 2t \end{cases}$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 9$$

Le mouvement dans le plan (O, x, y) est circulaire ce centre O (0,0) et de rayon R = 3.

Suivant l'axe (OZ) : $z = 8t - 4$ (équation d'une droite) donc le mouvement est rectiligne suivant (OZ).

$\Rightarrow$ Donc le mouvement de M est hélicoïdal.

$$2) \vec{V}(M/R) = \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_R = -6\sin(2t) \vec{i} + 6\cos(2t) \vec{j} + 8 \vec{k}$$

$$\vec{a}(M/R) = \left. \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} \right|_R = -12\cos(2t) \vec{i} - 12\sin(2t) \vec{j}$$

$$v = \|\vec{V}(M/R)\| = \sqrt{(-6\sin(2t))^2 + (6\cos(2t))^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10 \text{ m/s}$$

$$a = \|\vec{a}(M/R)\| = \sqrt{(-12\cos(2t))^2 + (-12\sin(2t))^2} = \sqrt{12^2} = 12 \text{ m/s}^2$$

3) Base de Frenet (M, $\vec{T}$, $\vec{N}$)

$$\vec{V} = v \cdot \vec{T} = 10\vec{T}$$

$$\vec{a} = a_T \cdot \vec{T} + a_N \cdot \vec{N}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0$$

$$a_N = a = 12 \text{ m/s}^2$$

$$\Rightarrow \vec{a} = 12\vec{N}$$

$$4) a_N = \frac{v^2}{R_c} \Rightarrow R_c = \frac{v^2}{a_N} = \frac{10^2}{12} = 8,33 \text{ m}$$

II. Cinématique avec changement de repère

L'étude du mouvement d'un point n'a pas de sens que par rapport à un repère. En effet, le mouvement est relatif : un même point peut sembler immobile dans un repère et en mouvement dans un autre.

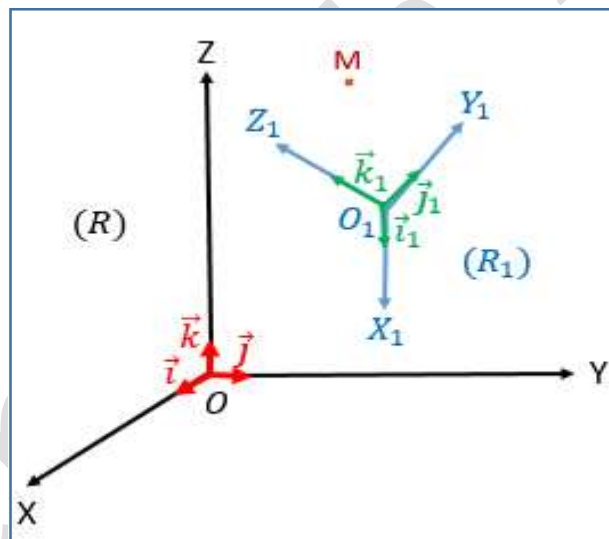
On doit donc préciser le repère par rapport auquel on étudie le mouvement.

Soient deux référentiels distincts R et R_1 :

- $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ supposé fixe (absolu)
- $R_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ mobile par rapport à R (relatif)

R_1 est en mouvement par rapport à R .

Nous allons étudier le mouvement d'un point M dans les deux repères (R et R_1), et par la suite le passage d'un repère à un autre.



1. Etude du mouvement de M dans les deux repères :

a. Dans le repère absolu R :

Le vecteur position est: $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Le vecteur vitesse est: $\vec{V}(M/R) = \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_R = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \vec{V}_a$

$\vec{V}(M/R) = \vec{V}_a$ = vitesse absolue

Le vecteur accélération : $\vec{a}(M/R) = \left. \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} \right|_R = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \vec{a}_a$

$\vec{a}(M/R) = \vec{a}_a$ = accélération absolue

b. Dans le repère relatif R_1 :

Le vecteur position est: $\overrightarrow{O_1M} = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1$

Le vecteur vitesse est: $\vec{V}(M/R_1) = \left. \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt} \right|_{R_1} = \frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1 = \vec{V}_r$

$\vec{V}(M/R_1) = \vec{V}_r$ = vitesse relative

Le vecteur accélération : $\vec{a}(M/R_1) = \left. \frac{d\vec{V}(M/R_1)}{dt} \right|_{R_1} = \frac{d^2x_1}{dt^2}\vec{i}_1 + \frac{d^2y_1}{dt^2}\vec{j}_1 + \frac{d^2z_1}{dt^2}\vec{k}_1 = \vec{a}_r$

$\vec{a}(M/R_1) = \vec{a}_r$ = accélération relative

2. Dérivée d'un vecteur mobile dans le repère fixe :

La rotation de R_1 par rapport à R se fait avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}(R_1/R)$ telle que:

$$\begin{cases} \left. \frac{d\vec{i}_1}{dt} \right|_R = \vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{i}_1 \\ \left. \frac{d\vec{j}_1}{dt} \right|_R = \vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{j}_1 \\ \left. \frac{d\vec{k}_1}{dt} \right|_R = \vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{k}_1 \end{cases}$$

Soit un vecteur quelconque $\vec{A}$

L'expression de $\vec{A}$ dans R_1 est donnée par: $\vec{A}|_{R_1} = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1$

L'expression de $\vec{A}$ dans R est donnée par: $\vec{A}|_R = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{A}_{/R1}}{dt} \right|_R &= \left. \frac{d(x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1)}{dt} \right|_R \\ &= \frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + x_1 \left. \frac{d\vec{i}_1}{dt} \right|_R + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1 + y_1 \left. \frac{d\vec{j}_1}{dt} \right|_R + \frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1 + z_1 \left. \frac{d\vec{k}_1}{dt} \right|_R \\ &= \frac{dx_1}{dt}\vec{i}_1 + \frac{dy_1}{dt}\vec{j}_1 + \frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1 + x_1 \cdot \vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{i}_1 + y_1 \cdot \vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{j}_1 + z_1 \cdot \vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{k}_1 \\ &= \left. \frac{d\vec{A}_{/R1}}{dt} \right|_{R1} + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge (x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1 + z_1\vec{k}_1) \end{aligned}$$

$$\boxed{\left. \frac{d\vec{A}_{/R1}}{dt} \right|_R = \left. \frac{d\vec{A}_{/R1}}{dt} \right|_{R1} + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{A}|_{R1}}$$

3. Loi de composition des vitesses :

$$\begin{aligned}
\vec{V}(M/R) &= \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_R = \left. \frac{d(\vec{OO_1} + \vec{O_1M})}{dt} \right|_R \\
&= \left. \frac{d\vec{OO_1}}{dt} \right|_R + \left. \frac{d\vec{O_1M}}{dt} \right|_R \\
&= \left. \frac{d\vec{OO_1}}{dt} \right|_R + \left. \frac{d\vec{O_1M}}{dt} \right|_{R_1} + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1M}
\end{aligned}$$

$$\vec{V}(M/R) = \vec{V}(M/R_1) + \left. \frac{d\vec{OO_1}}{dt} \right|_R + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1M}$$

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

$$\text{Avec } \vec{V}_e = \left. \frac{d\vec{OO_1}}{dt} \right|_R + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1M}$$

$\vec{V}_e$ = vitesse d'entraînement

La vitesse d'entraînement caractérise le mouvement de R_1 par rapport à R

4. Loi de composition des accélérations :

$$\vec{a}_a(M) = \left. \frac{d\vec{V}_a}{dt} \right|_R = \left. \frac{d(\vec{V}_r + \vec{V}_e)}{dt} \right|_R = \left. \frac{d\vec{V}_r}{dt} \right|_R + \left. \frac{d\vec{V}_e}{dt} \right|_R$$

$$\left. \frac{d\vec{V}_r}{dt} \right|_R = \left. \frac{d\vec{V}_r}{dt} \right|_{R_1} + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}_r = \vec{a}_r(M) + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}_r$$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d\vec{V}_e}{dt} \right|_R &= \left. \frac{d}{dt} \left(\left. \frac{d\vec{OO_1}}{dt} \right|_R + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1M} \right) \right|_R \\
&= \left. \frac{d^2\vec{OO_1}}{dt^2} \right|_R + \left. \frac{d\vec{\omega}(R_1/R)}{dt} \right|_R \wedge \vec{O_1M} + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge \left. \frac{d\vec{O_1M}}{dt} \right|_{R_1} \\
&= \left. \frac{d^2\vec{OO_1}}{dt^2} \right|_R + \left. \frac{d\vec{\omega}(R_1/R)}{dt} \right|_R \wedge \vec{O_1M} + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge \left[\left. \frac{d\vec{O_1M}}{dt} \right|_{R_1} + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1M} \right] \\
&= \left. \frac{d^2\vec{OO_1}}{dt^2} \right|_R + \left. \frac{d\vec{\omega}(R_1/R)}{dt} \right|_R \wedge \vec{O_1M} + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}_r + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge (\vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1M})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{a}_a(M) &= \vec{a}_r(M) + \left. \frac{d^2\vec{OO_1}}{dt^2} \right|_R + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge (\vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1M}) + \left. \frac{d\vec{\omega}(R_1/R)}{dt} \right|_R \wedge \vec{O_1M} \\
&\quad + 2\vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}_r
\end{aligned}$$

$$\vec{a}_c(M) = \vec{a}_r(M) + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)$$

$$\text{Avec } \vec{a}_e(M) = \left. \frac{d^2 \vec{OO}_1}{dt^2} \right|_R + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge (\vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{O_1M}) + \left. \frac{d\vec{\omega}(R_1/R)}{dt} \right|_R \wedge \vec{O_1M}$$

$\vec{a}_e(M)$ = Accélération d'entraînement

et $\vec{a}_c(M) = 2\vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}_r$ = accélération de Coriolis ou complémentaire.

5. Exemples de mouvements simples de R_1 par rapport à R :

a. R_1 est en mouvement de translation rectiligne par rapport à R :

$$\text{c.à.d. } \vec{\omega}(R_1/R) = \vec{0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{V}_a = \vec{V}_r + \left. \frac{d\vec{OO}_1}{dt} \right|_R = \vec{V}_r + \vec{V}_a(O_1) \\ \vec{a}_a = \vec{a}_r + \left. \frac{d^2 \vec{OO}_1}{dt^2} \right|_R = \vec{a}_r + \vec{a}_a(O_1) \end{array} \right.$$

❖ Si la translation est uniforme : $\vec{V}_a(O_1) = \vec{cte} \Rightarrow \vec{a}_a(O_1) = \vec{0}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_a(O_1) \\ \vec{a}_a = \vec{a}_r \end{array} \right.$$

b. R_1 est en mouvement de rotation par rapport à R :

$$- \text{ } O_1 \text{ est confondu avec } O \Rightarrow \vec{OO}_1 = \vec{0}, \left. \frac{d\vec{OO}_1}{dt} \right|_R = \vec{0}, \left. \frac{d^2 \vec{OO}_1}{dt^2} \right|_R = \vec{0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{OM} \\ \vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge (\vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{OM}) + \left. \frac{d\vec{\omega}(R_1/R)}{dt} \right|_R \wedge \vec{OM} \end{array} \right.$$

$$- \text{ Si en plus } \vec{\omega}(R_1/R) = \vec{cte} \Rightarrow \left. \frac{d\vec{\omega}(R_1/R)}{dt} \right|_R = \vec{0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{OM} \\ \vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{\omega}(R_1/R) \wedge (\vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{OM}) \end{array} \right.$$

Dynamique du point matériel

La dynamique est la branche de la mécanique qui étudie le mouvement des objets en tenant compte des forces qui agissent sur eux.

Contrairement à la cinématique, qui se limite à décrire le mouvement (trajectoire, vitesse, accélération), la dynamique cherche à expliquer les causes de ce mouvement (forces).

Dans ce cadre, une nouvelle grandeur physique essentielle entre en jeu : la masse, qui, avec le temps et l'espace déjà abordés en cinématique, permet de comprendre comment un corps réagit lorsqu'il est soumis à une force.

La masse d'une particule reste constante dans le temps et ne change pas lorsqu'on passe d'un référentiel à un autre. Son unité est le kilogramme (Kg).

I. Référentiels particuliers :

a. Référentiel de Copernic :

Le référentiel de Copernic (héliocentrique) est un référentiel qui a pour origine le centre du soleil, et ses axes sont dirigés vers trois étoiles très lointaines supposées fixes, ce qui permet de le considérer comme un référentiel fixe.

b. Référentiel géocentrique :

Le référentiel géocentrique est un référentiel qui est lié au centre de la terre et dont les axes sont parallèles à ceux du référentiel de Copernic.

On a $T_{t/s}$ (Période de révolution) = 365j

$$\text{Donc } w = \frac{2\pi}{T_{t/s}} = \frac{2\pi}{365 \times 24 \times 3600} = 10^{-7} \rightarrow 0$$

⇒ Le référentiel géocentrique est en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel de Copernic

⇒ Le référentiel géocentrique est appelé référentiel galiléen.

c. Référentiel du laboratoire :

Le référentiel du laboratoire est un référentiel lié à la surface de la Terre dont les axes sont parallèles aux axes du référentiel géocentrique.

Il est considéré comme un référentiel galiléen car :

$$T_{l/t} \text{ (Période de révolution)} = 24\text{h}$$

$$w = \frac{2\pi}{T_{l/t}} = \frac{2\pi}{24 \times 3600} = 7.10^{-5} \rightarrow 0$$

- ⇒ Il est donc en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport au référentiel géocentrique (galiléen).
- ⇒ Il est considéré galiléen.

Conclusion :

Tout repère en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à un repère fixe ou galiléen est considéré comme un **repère galiléen**.

II. Forces réelles :

Les forces réelles se subdivisent en deux grandes catégories :

- Forces de contact
- Forces à distance

a. Forces de contact :

Elles apparaissent uniquement lorsque deux corps sont en contact direct.

Exemples :

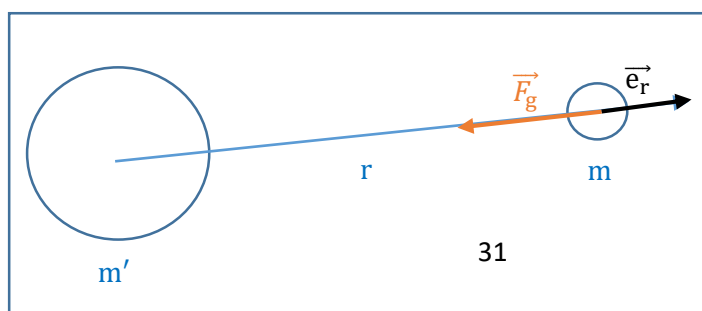
- ❖ **Force de frottement** : s'oppose au mouvement relatif de deux surfaces en contact.
- ❖ **Force normale de réaction** : force perpendiculaire à une surface de contact.
- ❖ **Force de tension du fil** : exercée par un fil ou une corde tendue.
- ❖ **Poussée d'un fluide** : exercée par un liquide ou un gaz sur un objet immergé ou en contact.
- ❖ **Force élastique d'un ressort** : lorsqu'on étire ou comprime un ressort, il exerce une force qui tend à ramener l'objet lié à sa position d'équilibre.
- ❖ ...

b. Forces à distance :

Elles s'exercent même sans contact direct entre les corps.

Exemples :

- ❖ **Force de gravitation** : attraction universelle entre deux masses.

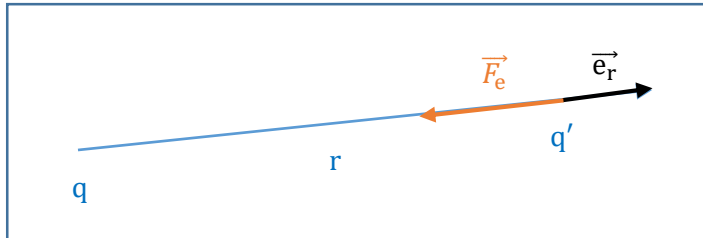


$$\vec{F}_g = - \frac{Gmm'}{r^2} \vec{e}_r = - mg\vec{e}_r$$

Avec : G = constante universelle de gravitation $G = 6,67.10^{-11} \text{N.m}^2/\text{Kg}$

g = accélération de la pesanteur.

❖ **Forces électrostatiques** : interaction entre charges électriques.



$$\vec{F}_e = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2} \vec{e}_r$$

Avec : ϵ_0 = permittivité du vide.

❖ **Forces électromagnétiques** : elles résultent de l'interaction entre charges électriques en mouvement.

$$\vec{F}_{em} = q (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) = q\vec{E} + q\vec{V} \wedge \vec{B}$$

Avec : $\vec{E}$ = champ électrique

$\vec{B}$ = champ magnétique

$\vec{V}$ = vecteur vitesse de la charge

III. Principes de la dynamique : (Lois de Newton)

a. Principe d'inertie : (1^{ère} loi de Newton)

Si les forces qui s'exercent sur un système se compensent (c.à.d. : $\Sigma \vec{F}_{ext} = \vec{0}$), alors ce système est immobile ou en mouvement rectiligne uniforme.

Le principe d'inertie n'est valable que dans un repère galiléen.

b. Principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen : (2^{ème} loi de Newton)

Dans un repère galiléen R , la résultante des forces $\Sigma \vec{F}_{ext}$, appliquées à un point matériel M est égale au produit de sa masse m par son accélération $\vec{a}(M/R)$.

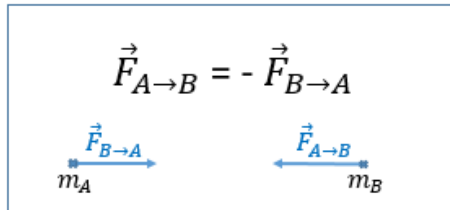
P.F.D dans un repère galiléen

$$\Sigma \vec{F}_{ext} = m. \vec{a}(M/R)$$

$\Sigma \vec{F}_{ext}$ = la résultante des forces réelles appliquées au point matériel M .

c. Principe d'action et de la réaction : (3^{ème} loi de Newton)

Lorsque deux corps A et B interagissent, le corps A exerce sur le corps B une force $\vec{F}_{A \rightarrow B}$, le corps B exerce simultanément sur A une force $\vec{F}_{B \rightarrow A}$, de même valeur mais de sens opposé.

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = - \vec{F}_{B \rightarrow A}$$


IV. Principe fondamental de la dynamique dans un référentiel non galiléen R_1 :

Soit R un repère galiléen (absolu)

Et R_1 un repère non galiléen (relatif)

Dans R, le principe fondamental de la dynamique s'écrit : $m \cdot \vec{a}(M/R) = \Sigma \vec{F}_{ext}$

D'après la loi de composition des accélérations :

$$\vec{a}(M/R) = \vec{a}(M/R_1) + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

$$\Rightarrow m \vec{a}(M/R) = m \vec{a}(M/R_1) + m \vec{a}_e + m \vec{a}_c = \Sigma \vec{F}_{ext}$$

$$\Rightarrow m \vec{a}(M/R_1) = \Sigma \vec{F}_{ext} - m \vec{a}_e - m \vec{a}_c$$

P.F.D dans un repère non galiléen

$$m \vec{a}(M/R_1) = \Sigma \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$$

Avec : $\vec{F}_{ie} = - m \vec{a}_e$: Force d'inertie d'entraînement.

$\vec{F}_{ic} = - m \vec{a}_c$: Force d'inertie de Coriolis.

- Les forces d'inertie $\vec{F}_{ie}$ et $\vec{F}_{ic}$ n'existent que si le repère mobile R_1 est accéléré par rapport à R.

V. Equilibre (repos) d'un point matériel :

a. Equilibre d'un point matériel M dans un repère galiléen :

Un point matériel M est au repos dans R si $\vec{V}(M/R) = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{a}(M/R) = \vec{0} \text{ et donc } \Sigma \vec{F}_{ext} = m \vec{a}(M/R) = \vec{0} \text{ (P.F.D)}$$

Pour qu'un point matériel M soit au repos dans un repère galiléen R, il suffit que la résultante de toutes les forces appliquées à M soit nulle.

b. Equilibre d'un point matériel M dans un repère non galiléen :

Un point matériel M est au repos dans R_1 si $\vec{V}(M/R_1) = \vec{V}_r = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{a}(M/R_1) = \vec{a}_r = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{F}_{ic} = -2m\vec{a}_c = -2m(\vec{\omega}(R_1/R) \wedge \vec{V}_r) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \Sigma \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{ie} = \vec{0} \quad (\text{P.F.D dans un repère non galiléen})$$

$$\Rightarrow \Sigma \vec{F}_{ext} = -\vec{F}_{ie}$$

Pour qu'un point matériel M soit en équilibre relatif (repos) dans un repère non galiléen, il faut que la résultante des forces réelles soit opposée et égale à la force d'inertie d'entraînement.

VI. Théorème du moment cinétique :

a. Quantité de mouvement :

La quantité de mouvement $\vec{P}$ d'un point matériel M de masse m et de vitesse $\vec{V}(M/R)$ par rapport à un référentiel quelconque R est:

$$\vec{P}(M/R) = m \cdot \vec{V}(M/R)$$

Son unité est : kg.m/s.

b. Moment d'une force :

- Le moment d'une force $\vec{F}$ appliquée en M par rapport à un point O dans le référentiel R est défini par:

$$\vec{M}(\vec{F}/O) = \vec{OM} \wedge \vec{F}$$

- Le moment de la force $\vec{F}$ par rapport à un axe Δ , passant par O est:

$$\vec{M}(\vec{F}/\Delta) = \vec{M}(\vec{F}/O) \cdot \vec{e}_\Delta$$

$\vec{e}_\Delta$: vecteur unitaire de l'axe Δ

c. Moment cinétique d'une particule :

Le moment cinétique $\vec{\sigma}(O/R)$ d'une particule M de masse m par rapport à un point O, dans un repère R quelconque est défini par:

$$\vec{\sigma}(O/R) = \vec{OM} \wedge m \cdot \vec{V}(M/R) = \vec{OM} \wedge \vec{P}(M/R)$$

$\vec{P}(M/R)$: quantité de mouvement

d. Moment dynamique par rapport à un point fixe O :

Le moment dynamique $\vec{\delta}(O/R)$ d'une particule M par rapport à un point O, dans le référentiel R est défini par:

$$\vec{\delta}(O/R) = \overrightarrow{OM} \wedge m.\vec{a}(M/R)$$

❖ Relation entre $\vec{\sigma}(A/R)$ et $\vec{\delta}(A/R)$:

On a $\vec{\sigma}(A/R) = \overrightarrow{AM} \wedge m.\vec{V}(M/R)$

Et $\vec{\delta}(A/R) = \overrightarrow{AM} \wedge m.\vec{a}(M/R)$

Donc $\left. \frac{d\vec{\sigma}(A/R)}{dt} \right|_R = \vec{V}(A/R) \wedge m.\vec{V}(M/R) + \overrightarrow{AM} \wedge m.\vec{a}(M/R)$

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}(A/R)}{dt} \right|_R = \vec{V}(A/R) \wedge m.\vec{V}(M/R) + \vec{\delta}(A/R)$$

$$\left. \frac{d\vec{\sigma}(A/R)}{dt} \right|_R = \vec{\delta}(A/R) \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{A est fixe par rapport à R} \\ \text{ou} \\ \vec{V}(A/R) \text{ et } \vec{V}(M/R) \text{ sont colinéaires} \end{array} \right.$$

e. Théorème du moment cinétique :

Enoncé:

Dans un référentiel galiléen R, le moment dynamique d'une particule M, en un point A, est égal au moment en ce point, de la résultante de toutes les forces extérieures appliquées à M.

$$\vec{\delta}(A/R) = \overrightarrow{AM} \wedge m.\vec{a}(M/R) = \overrightarrow{AM} \wedge \Sigma \vec{F}_{ext}$$

Exercice d'application :

On considère un repère galiléen R (O, X, Y, Z).

Un point M est repéré dans R par son vecteur position $\overrightarrow{OM}$ défini par: $\overrightarrow{OM} = 4t^3\vec{i} + t^4\vec{j}$

- 1) Déterminer $\vec{V}(M/R)$ et $\vec{a}(M/R)$.
- 2) Donner l'expression de la résultante $\vec{F}$ de toutes les forces appliquées à M dans R.
- 3) Calculer le moment de $\vec{F}$ par rapport à O $\vec{M}(\vec{F}/O)$.
- 4) Calculer le moment cinétique du point M par rapport à O $\vec{\sigma}_O(M/R)$.
- 5) En utilisant le théorème du moment cinétique retrouver le résultat de la question (3).

Solution :

$$1) \vec{V}(M/R) = \left. \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \right|_R = \frac{d(4t^3)}{dt}\vec{i} + \frac{d(t^4)}{dt}\vec{j}$$

$$\vec{V}(M/R) = 12t^2\vec{i} + 4t^3\vec{j}$$

$$\vec{a}(M/R) = \left. \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} \right|_R = 24t\vec{i} + 12t^2\vec{j}$$

$$2) \text{ P.F.D : } \vec{F} = m\vec{a} = 24mt\vec{i} + 12mt^2\vec{j}$$

3)

$$\begin{aligned} \vec{M}(\vec{F}/O) &= \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} 4t^3 \\ t^4 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 24mt \\ 12mt^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4t^3 \cdot 12mt^2 - t^4 \cdot 24mt \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{M}(\vec{F}/O) = 24mt^5\vec{k}$$

$$4) \vec{\sigma}_O(M/R) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/R)$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} 4t^3 \\ t^4 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 12mt^2 \\ 4mt^3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 16mt^6 - 12mt^6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{\sigma}_O(M/R) = 4mt^6\vec{k}$$

$$5) \vec{\delta}_0(M/R) = \left. \frac{d\vec{\sigma}_O(M/R)}{dt} \right|_R = \frac{d(4mt^6\vec{k})}{dt} = 24mt^5\vec{k} = \vec{M}(\vec{F}/O)$$

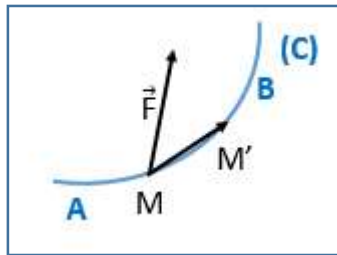
Travail et Energie

VII. Travail et puissance d'une force :

a. Travail d'une force :

Soit un point matériel M, soumis à une force $\vec{F}$ et se déplaçant le long d'un chemin (C).

Le travail élémentaire dW effectué par la force $\vec{F}$ pendant un déplacement infinitésimal $\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM}$ est défini par : $dW = \vec{F} \cdot \overrightarrow{MM'} = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}$



Le travail W effectué par $\vec{F}$ lorsque le point matériel M se déplace de la position A à la position B le long du chemin (C) est :

$$W_{AB} = \int_{AB} dW = \int_A^B \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}$$

Son unité est le Joule (J) ou N.m

❖ En coordonnées cartésiennes :

La force $\vec{F}$ s'écrit : $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ et le déplacement élémentaire : $d\overrightarrow{OM} = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k}$,
donc : $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = \int_{x_A}^{x_B} F_x \cdot dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y \cdot dy + \int_{z_A}^{z_B} F_z \cdot dz$

❖ En coordonnées cylindriques :

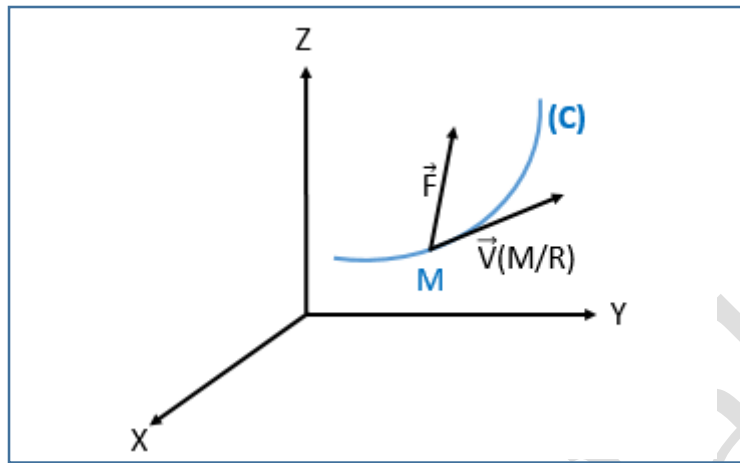
La force $\vec{F}$ s'écrit : $\vec{F} = F_\rho \vec{e}_\rho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{k}$ et le déplacement élémentaire : $d\overrightarrow{OM} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \vec{e}_\varphi + dz \vec{k}$, donc : $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = \int_A^B F_\rho d\rho + F_\varphi \rho d\varphi + F_z dz$

❖ En coordonnées sphériques :

La force $\vec{F}$ s'écrit : $\vec{F} = F_r \vec{e}_r + F_\theta \vec{e}_\theta + F_\varphi \vec{e}_\varphi$ et le déplacement élémentaire : $d\overrightarrow{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin\theta d\varphi \vec{e}_\varphi$, donc : $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = \int_A^B F_r dr + F_\theta r d\theta + F_\varphi r \sin\theta d\varphi$

b. Puissance d'une force :

Soit un point matériel M, soumis à une force $\vec{F}$ qui se déplace à la vitesse $\vec{V}(M/R)$.



La puissance P de la force $\vec{F}$, dans un référentiel R, appliquée au point matériel M est définie par :

$$P = \vec{F} \cdot \vec{V}(M/R)$$

Son unité est le watt (w).

❖ Relation entre la puissance et le travail :

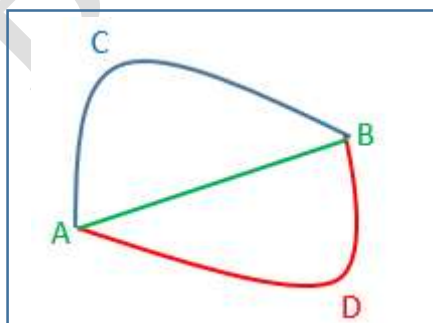
$$P = \vec{F} \cdot \vec{V}(M/R) = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dW}{dt}$$

$$P = \frac{dW}{dt}$$

VIII. Force conservative et énergie potentielle :

a. Définition :

Une force $\vec{F}$ est dite conservative si le travail qu'elle effectue sur un point matériel M ne dépend que des positions initiale (position A) et finale (position B) du point, et non du chemin suivi entre ces deux points.



Autrement dit, $\vec{F}$ est conservative si:

$$W_{AB}(\vec{F}) = W_{ACB}(\vec{F}) = W_{ADB}(\vec{F})$$

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{OM} = \int_A^B F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz = f(B) - f(A) = \int_A^B df$$

$$\Rightarrow F_x \cdot dx + F_y \cdot dy + F_z \cdot dz = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_x = \frac{\partial f}{\partial x} \\ F_y = \frac{\partial f}{\partial y} \\ F_z = \frac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right. \Rightarrow \vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}(f)$$

La force conservative $\vec{F}$ est un champ de gradients

Ainsi, pour qu'une force $\vec{F}$ soit conservative, il faut vérifier que $\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \vec{0}$

b. Energie potentielle :

L'énergie potentielle E_p est une fonction scalaire associée à un point matériel M soumis à des forces conservatives. Elle représente l'énergie que le système possède du fait de sa position ou de sa configuration.

Si une force $\vec{F}$ est conservative, on peut définir E_p telle que:

$$\vec{F} = - \overrightarrow{\text{grad}} E_p$$

❖ Relation avec le travail :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

$$\text{avec : } \vec{F} = - \overrightarrow{\text{grad}} E_p = - \frac{\partial E_p}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial E_p}{\partial z} \vec{k} \text{ et } d\vec{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

$$\text{donc : } dW = - \frac{\partial E_p}{\partial x} dx - \frac{\partial E_p}{\partial y} dy - \frac{\partial E_p}{\partial z} dz = - dE_p$$

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B dW = - \int_A^B dE_p = E_p(A) - E_p(B)$$

$$W_{AB}(\vec{F}) = E_p(A) - E_p(B)$$

IX. Energie cinétique :

L'énergie cinétique E_c d'un point matériel M de masse m se déplaçant avec une vitesse $\vec{V}(M/R)$ est l'énergie due à son mouvement.

Elle est définie par :

$$E_c = \frac{1}{2} m V^2$$

Son unité est le Joule (J).

❖ Théorème de l'énergie cinétique :

✚ Dans un référentiel galiléen :

Dans un référentiel galiléen, la variation de l'énergie cinétique entre deux positions, est égale au travail de la somme des forces $\sum \vec{F}$ appliquées sur le point matériel M entre ces deux positions:

$$\Delta_{A \rightarrow B} Ec = Ec(B) - Ec(A) = \sum W_{AB}(\vec{F})$$

Démonstration :

P.F.D dans un référentiel galiléen : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$\vec{V} \cdot \sum \vec{F} = \vec{V} \cdot m\vec{a} = m \cdot \vec{V} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$dt * \frac{dW(\sum \vec{F})}{dt} = m \vec{V} \cdot \frac{d\vec{V}}{dt} * dt$$

$$dW(\sum \vec{F}) = m \vec{V} \cdot d\vec{V} = m \left(\frac{d\vec{V}^2}{2} \right) = m \left(\frac{dV^2}{2} \right)$$

$$dW(\sum \vec{F}) = d\left(\frac{1}{2} m V^2\right)$$

$$\text{Par intégration : } \int_A^B dW(\sum \vec{F}) = \int_A^B \frac{1}{2} m V^2 = \int_A^B dEc$$

$$W_{AB}(\sum \vec{F}) = Ec(B) - Ec(A) = \Delta_{A \rightarrow B} Ec$$

✚ Dans un référentiel non galiléen :

Dans un référentiel non galiléen, la variation de l'énergie cinétique entre deux positions, est égale au travail de la somme des forces réelles $\sum \vec{F}$ et de la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie}$ appliquées sur le point matériel M entre ces deux positions:

$$\Delta_{A \rightarrow B} Ec = Ec(B) - Ec(A) = \sum W_{AB}(\vec{F}) + W_{AB}(\vec{F}_{ie})$$

Démonstration :

P.F.D : $m\vec{a}_r = \sum \vec{F} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$

$$\vec{V}_r \cdot m\vec{a}_r = \vec{V}_r \cdot \sum \vec{F} + \vec{V}_r \cdot \vec{F}_{ie} + \vec{V}_r \cdot \vec{F}_{ic}$$

$$\text{Or } \vec{V}_r \cdot \vec{F}_{ic} = \vec{V}_r \cdot (-2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r) = 0$$

$$\text{Donc } m \cdot \vec{V}_r \cdot \frac{d\vec{V}_r}{dt} = \sum \vec{F} \cdot \vec{V}_r = \vec{F}_{ie} \cdot \vec{V}_r$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mV^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} (W(\sum \vec{F})) + \frac{d}{dt} (W(\vec{F}_{ie}))$$

$$dEc = d W(\sum \vec{F}) + d W(\vec{F}_{ie})$$

$$\text{En intégrant : } Ec(B) - Ec(A) = \sum W_{AB}(\vec{F}) + W_{AB}(\vec{F}_{ie})$$

X. Energie mécanique :

L'énergie mécanique Em d'un point matériel M est la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle.

$$Em = Ec + Ep$$

❖ Cas des forces conservatives :

La résultante des forces $\sum \vec{F}$ appliquée à M est conservative :

- $dW = -dEp \Rightarrow W_{AB}(\sum \vec{F}) = Ep(A) - Ep(B)$
- Théorème de l'énergie cinétique : $W_{AB}(\sum \vec{F}) = Ec(B) - Ec(A)$

$$\text{Donc : } W_{AB}(\sum \vec{F}) = Ep(A) - Ep(B) = Ec(B) - Ec(A)$$

- $\Rightarrow Ep(A) + Ec(A) = Ep(B) + Ec(B)$
- $\Rightarrow Em(A) = Em(B)$
- $\Rightarrow Em = \text{cte}$ (conservation de l'énergie mécanique)

🚦 **Théorème de conservation de l'énergie mécanique :**

Dans un système matériel soumis uniquement à des forces conservatives, l'énergie mécanique Em reste constante à tout moment.

On dit qu'il y a conservation de l'énergie mécanique

❖ Cas des forces conservatives :

Soit un point matériel M soumis à des forces conservatives $\sum \vec{F}$ et des forces non conservatives $\sum \vec{F}'$

On a :

- $Dw(\sum \vec{F}) = -dEp \Rightarrow W_{AB}(\sum \vec{F}) = Ep(A) - Ep(B)$
- Théorème de l'énergie cinétique : $W_{AB}(\sum \vec{F}) + W_{AB}(\sum \vec{F}') = Ec(B) - Ec(A)$

$$\text{Donc : } W_{AB}(\sum \vec{F}) + W_{AB}(\sum \vec{F}') = Ec(B) - Ec(A)$$

$$\Rightarrow Ep(A) - Ep(B) + W_{AB}(\sum \vec{F}') = Ec(B) - Ec(A)$$

$$\Rightarrow W_{AB}(\sum \vec{F'}) = Ep(B) + Ec(B) - (Ep(A) + Ec(A))$$

$$\Rightarrow W_{AB}(\sum \vec{F'}) = Em(B) - Em(A)$$

$$\Rightarrow W_{AB}(\sum \vec{F'}) = \Delta_{A \rightarrow B} Em$$

XI. Stabilité d'un équilibre :

Soit un point matériel M, soumis à des forces conservatives dont la résultante est $\vec{F}$:
 $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}Ep$

En coordonnées cartésiennes : $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$ et $\overrightarrow{grad}Ep = \frac{\partial Ep}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial Ep}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial Ep}{\partial z} \vec{k}$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_x = -\frac{\partial Ep}{\partial x} \\ F_y = -\frac{\partial Ep}{\partial y} \\ F_z = -\frac{\partial Ep}{\partial z} \end{cases}$$

Si M est en équilibre au point M_E

$$\text{Alors : } \vec{F}(M_E) = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial Ep}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Ep}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial Ep}{\partial z} = 0 \end{cases} \Rightarrow (x_{M_E}, y_{M_E}, z_{M_E})$$

Avec : $M_E(x_{M_E}, y_{M_E}, z_{M_E})$ = position d'équilibre

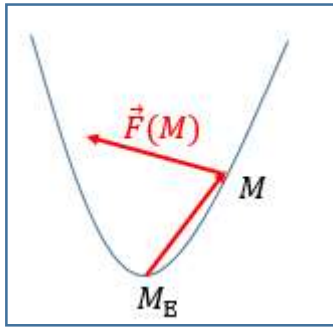
Une position d'équilibre se traduit donc par un extremum de la fonction énergie potentielle Ep ($Ep_{\max}$ ou $Ep_{\min}$).

❖ $Ep(M_E)$ minimale :

Ce qui se traduit mathématiquement par :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 Ep}{\partial x^2} \Big|_{x_{M_E}} > 0 \\ \text{et} \\ \frac{\partial^2 Ep}{\partial y^2} \Big|_{y_{M_E}} > 0 \\ \text{et} \\ \frac{\partial^2 Ep}{\partial z^2} \Big|_{z_{M_E}} > 0 \end{cases}$$

On écarte le mobile de sa position d'équilibre M_E vers M (très voisine)



$$Ep(M_E) < Ep(M)$$

$$Ep(M_E) < Ep(M) \Rightarrow Ep(M_E) - Ep(M) < 0$$

Le travail $W_{M_E M}(\vec{F})$ est donné par :

$$W_{M_E M}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{M_E M} = Ep(M_E) - Ep(M) < 0$$

$\Rightarrow \vec{F}(M)$ a tendance à ramener le point M à sa position d'équilibre M_E .

$$W_{M_E M}(\vec{F}) = \|\vec{F}\| \cdot \|\overrightarrow{M_E M}\| \cdot \cos(\vec{F}, \overrightarrow{M_E M}) < 0$$

$$\Rightarrow (\vec{F}, \overrightarrow{M_E M}) > \frac{\pi}{2}$$

Conclusion :

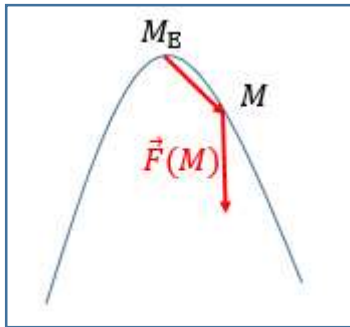
L'équilibre est stable si, et seulement si, l'énergie potentielle est minimale au point d'équilibre.

❖ $Ep(M_E)$ maximale :

Ce qui se traduit mathématiquement par :

$$\left[\begin{array}{l} \frac{\partial^2 Ep}{\partial x^2} \Big|_{x_{M_E}} < 0 \\ \text{ou} \\ \frac{\partial^2 Ep}{\partial y^2} \Big|_{y_{M_E}} < 0 \\ \text{ou} \\ \frac{\partial^2 Ep}{\partial z^2} \Big|_{z_{M_E}} < 0 \end{array} \right.$$

On écarte le mobile de sa position d'équilibre M_E vers M (très voisine)



$$Ep(M_E) > Ep(M)$$

$$Ep(M_E) > Ep(M) \Rightarrow Ep(M_E) - Ep(M) > 0$$

Le travail $W_{M_E M}(\vec{F})$ est donné par :

$$W_{M_E M}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{M_E M} = Ep(M_E) - Ep(M) > 0$$

$\Rightarrow \vec{F}(M)$ a tendance à éloigner le point M de sa position d'équilibre M_E .

$$W_{M_E M}(\vec{F}) = \|\vec{F}\| \cdot \|\overrightarrow{M_E M}\| \cdot \cos(\vec{F}, \overrightarrow{M_E M}) > 0$$

$$\Rightarrow (\vec{F}, \overrightarrow{M_E M}) < \frac{\pi}{2}$$

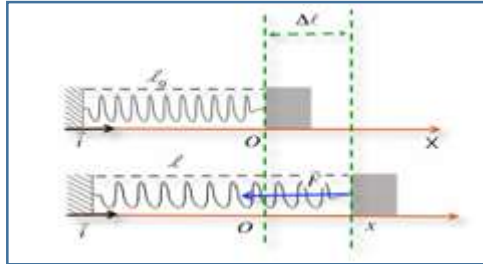
Conclusion :

L'équilibre est instable si, et seulement si, l'énergie potentielle est maximale au point d'équilibre.

Exercices d'application :

Exercice 1 :

Un point matériel M de masse m est attaché à un ressort horizontal de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 . On déplace le point matériel d'une distance x par rapport à sa position d'équilibre et on le lâche sans vitesse initiale (voir figure ci-dessous).



- Calculer le travail élémentaire de la force de rappel $\vec{F}$ et en déduire E_p . On donne $E_p(x=0) = 0$.
- Donner l'expression de l'énergie cinétique E_c . En déduire l'expression de son énergie mécanique E_m .

Solution :

- a) On a $\vec{F} = -k \Delta l \cdot \vec{i} = -k x \cdot \vec{i}$
et $\overrightarrow{OM} = x \cdot \vec{i}$ donc : $d\overrightarrow{OM} = dx \cdot \vec{i}$
d'où $dW = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = -k x \cdot dx$
or $dW = -dE_p \Rightarrow dE_p = k x \cdot dx$

$$\Rightarrow E_p = \frac{kx^2}{2} + \text{cte}$$

On a $E_p(x=0) = 0 \Rightarrow \text{cte} = 0$

D'où $E_p = \frac{kx^2}{2}$

- b) $E_c = \frac{1}{2} m V^2$ avec $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} = \dot{x} \vec{i} \Rightarrow V^2 = \dot{x}^2$

Alors : $E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

On a $E_m = E_c + E_p$

$$E_m = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

Exercice 2 :

Dans un repère fixe orthonormé direct (O, X, Y, Z), un point matériel M est soumis à une force $\vec{F}$ telle que : $\vec{F} = (3x^2 - x) \vec{i} + (2 - y) \vec{j}$.

Déterminer les positions d'équilibre de M et étudier leurs stabilités.

Solution :

M est en équilibre $\Rightarrow \vec{F} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x^2 - x = 0 \\ 2 - y = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(3x - 1) = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = \frac{1}{3} \\ y = 2 \end{cases}$$

Les positions d'équilibre sont : (0,2) et $(\frac{1}{3}, 2)$

- Stabilité des positions d'équilibre :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}Ep} = -\frac{\partial Ep}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial Ep}{\partial y} \vec{j} - \frac{\partial Ep}{\partial z} \vec{k}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial Ep}{\partial x} = x - 3x^2 \\ \frac{\partial Ep}{\partial y} = y - 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 Ep}{\partial x^2} = 1 - 6x \\ \frac{\partial^2 Ep}{\partial y^2} = 1 > 0 \end{cases}$$

➤ $PE_1 = (0, 2)$

$$\left. \frac{\partial^2 Ep}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 1 > 0 \text{ et } \frac{\partial^2 Ep}{\partial y^2} > 0$$

$\Rightarrow$ Equilibre stable

➤ $PE_2 = (\frac{1}{3}, 2)$

$$\left. \frac{\partial^2 Ep}{\partial x^2} \right|_{x=\frac{1}{3}} = -1 < 0$$

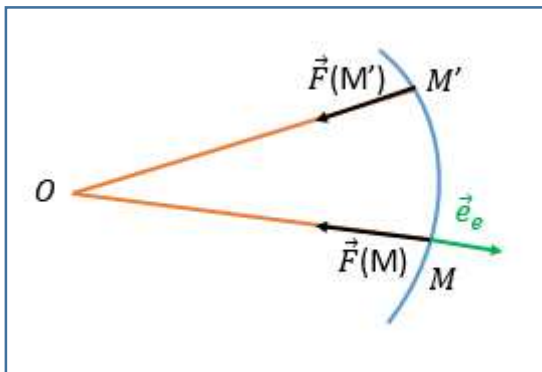
$\Rightarrow$ Equilibre instable

Mouvements à force centrale

I. Généralités sur les forces centrales :

1. Définition :

Un mouvement est dit à force centrale lorsqu'un point matériel M est soumis à une force $\vec{F}$ dont la direction passe toujours par un point fixe O, appelé centre de force.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \rho \vec{e}_\rho \\ \vec{F} &= -F \vec{e}_\rho \\ \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} &= \vec{0}\end{aligned}$$

2. Propriétés des forces centrales :

a. Conservation du moment cinétique :

En appliquant le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{\sigma}_0(M/R)}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} \quad \text{or} \quad \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

$$\text{Donc : } \frac{d\vec{\sigma}_0(M/R)}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{\sigma}_0(M/R) = c\vec{e}}$$

b. Mouvement plan :

$$\text{On a : } \vec{\sigma}_0(M/R) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M/R) = m\vec{C} \text{ (vecteur constant)}$$

$$\text{Avec : } \vec{C} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M/R)$$

Donc $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{V}(M/R)$ se trouvent à chaque instant dans un même plan (P) $\perp$ à la direction fixe de $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M/R) = \vec{C}$.

$\Rightarrow$ Le mouvement de M est plan.

Conclusion :

Tout mouvement à force centrale est un mouvement plan, et donc on peut utiliser les coordonnées polaires (ρ, φ) .

c. Loi des aires :

❖ Constante des aires :

Dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ on a : $\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho$

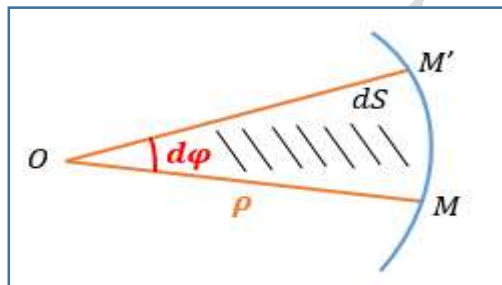
$$\text{Donc : } \vec{V}(M/R) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \vec{e}_\rho + \rho \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \vec{e}_\rho + \rho \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{C} = \vec{OM} \wedge \vec{V}(M/R) = \rho \vec{e}_\rho \wedge (\dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi) = \rho^2 \dot{\varphi} \vec{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{C = \rho^2 \dot{\varphi}} : \text{constante des aires}$$

❖ Loi des aires :

Les mouvements à force centrale vérifient la loi des aires c.à.d : « le vecteur position balaye des surfaces égales en des intervalles de temps égaux ».



En effet :

$$\Rightarrow \text{La surface balayée } dS \text{ est égale : } dS = \frac{1}{2} \|\vec{OM} \wedge \vec{MM'}\|$$

$$\text{avec } M' \text{ très voisin de } M \Rightarrow \vec{MM'} = d\vec{OM}$$

$$\Rightarrow dS = \frac{1}{2} \|\vec{OM} \wedge d\vec{OM}\| = \frac{1}{2} \|\vec{OM} \wedge \vec{V}(M/R).dt\| = \frac{1}{2} \|\vec{OM} \wedge \vec{V}(M/R)\|.dt$$

$$\Rightarrow dS = \frac{1}{2} C.dt \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} C : \text{vitesse aréolaire}$$

$$\Rightarrow \boxed{S(t) = \frac{1}{2} Ct + S_0} : \text{loi des aires}$$

II. Trajectoire dans un champ Newtonien :

1. Définition :

Une force Newtonienne $\vec{F}$ est une force centrale dont l'intensité (le module) est inversement proportionnelle au carré de la distance au centre $(\frac{1}{\rho^2})$.

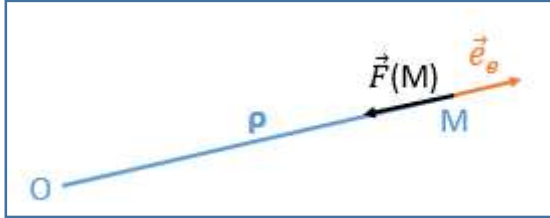
$$\text{La force } \vec{F} \text{ s'écrit sous la forme : } \boxed{\vec{F} = \frac{-k}{\rho^2} \vec{e}_\rho}$$

Si $k > 0$, on dit que la force est attractive

Si $k < 0$, on dit que la force est répulsive

2. Equation de la trajectoire :

La particule M est soumise à la force : $\vec{F} = \frac{-k}{\rho^2} \vec{e}_\rho$



$$\|\vec{OM}\| = \rho$$

$$\vec{e}_\rho = \text{vecteur unitaire de } \vec{OM}$$

Dans un référentiel galiléen R, le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$\sum \vec{F}_r = m\vec{a}(M/R) \Rightarrow \vec{F} = m\vec{a}(M/R)$$

$$\text{On a : } \vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho \Rightarrow \vec{V}(M/R) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{a}(M/R) = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} = \ddot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{\rho} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \rho \dot{\varphi} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \rho \ddot{\varphi} \vec{e}_\varphi - \rho \dot{\varphi}^2 \vec{e}_\rho$$

$$\Rightarrow \vec{a}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi$$

$$\text{Donc : } \frac{-k}{\rho^2} \vec{e}_\rho = m((\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi)$$

$$\Rightarrow \frac{-k}{\rho^2} = m(\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 = \frac{-k}{m\rho^2}}$$

Equation différentielle difficile à résoudre d'où l'introduction du changement de variable de Binet ($u = \frac{1}{\rho}$) qui va nous permettre de résoudre cette équation.

Remarque :

Cette équation peut être établie aussi en utilisant la conservation de l'énergie mécanique.

3. Formules de Binet :

a. Première formule de Binet (Energie cinétique)

$$\text{On a : } \vec{V}(M/R) = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\text{D'où : } V^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2$$

$$\text{En posant : } u = \frac{1}{\rho} \text{ (changement de Binet)}$$

On a : $C = \rho^2 \dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{C}{\rho^2} = C \cdot u^2$

Et : $\dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d(\frac{1}{u})}{d\varphi} \cdot C \cdot u^2 = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{d\varphi} \cdot C \cdot u^2 \Rightarrow \dot{\rho} = -C \cdot \frac{du}{d\varphi}$

$$\Rightarrow V^2 = \left(-C \cdot \frac{du}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{u^2} (C \cdot u^2)^2$$

$$\Rightarrow V^2 = C^2 \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + C^2 u^2$$

$$\Rightarrow V^2 = C^2 \left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right]$$

$$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} m C^2 \left[\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2\right] : \text{1}^{\text{ère}} \text{ formule de Binet}$$

b. Deuxième formule de Binet (La force)

On a : $\vec{a}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho + (2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi}) \vec{e}_\varphi$

Or l'accélération est centrale $\Rightarrow \vec{a}(M/R)$ est portée par $\vec{e}_\rho$

$$\Rightarrow \vec{a}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2) \vec{e}_\rho$$

$$\Rightarrow a = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2$$

On a : $\dot{\varphi} = C \cdot u^2$ et $\dot{\rho} = -C \cdot \frac{du}{d\varphi}$

Donc : $\ddot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d\rho}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -C \cdot \frac{d^2 u}{d\varphi^2} \cdot \dot{\varphi} = -C \cdot \frac{d^2 u}{d\varphi^2} \cdot C \cdot u^2$

$$\Rightarrow \ddot{\rho} = -C^2 u^2 \cdot \frac{d^2 u}{d\varphi^2} \text{ et } \rho \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{u} \cdot C^2 u^4 = C^2 u^3$$

$$\Rightarrow a = -C^2 u^2 \cdot \frac{d^2 u}{d\varphi^2} - C^2 u^3$$

$$\Rightarrow \vec{a}(M/R) = \left(-C^2 u^2 \cdot \frac{d^2 u}{d\varphi^2} - C^2 u^3\right) \vec{e}_\rho$$

$$\Rightarrow \vec{a}(M/R) = -C^2 u^2 \left[\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u\right] \vec{e}_\rho$$

$$\Rightarrow \vec{F} = m \vec{a}(M/R) = -m C^2 u^2 \left[\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u\right] \vec{e}_\rho : \text{2}^{\text{ème}} \text{ formule de Binet}$$

4. Résolution de l'équation de la trajectoire :

On a : $a = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 = \frac{-k}{m \rho^2}$

Donc : $-C^2 u^2 \left[\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u\right] = \frac{-k}{m} \cdot u^2$ (2^{ème} formule de Binet)

D'où : $\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{k}{m C^2}$ Equation différentielle de 2^{ème} ordre avec second membre constant ($\frac{k}{m C^2}$)

La solution générale de cette équation différentielle est : $u = u_{\text{ssm}} + u_p$

Avec : u_{ssm} = solution de l'équation générale sans second membre : $\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = 0$

Et : u_p = solution particulière ($u_p = \text{cte}$)

$$u_{ssm} = u_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$$

$$u_p = \frac{k}{mC^2}$$

$$\Rightarrow u(\varphi) = u_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{k}{mC^2}$$

avec : u_0 et φ_0 : à déterminer à partir des conditions initiales.

$$\text{Donc : } u(\varphi) = \frac{k}{mC^2} \left(\frac{u_0 m C^2}{k} \cos(\varphi - \varphi_0) + 1 \right)$$

$$\text{On pose : } P = \frac{mC^2}{k} \text{ et } e = u_0 \cdot P$$

$$\Rightarrow u(\varphi) = \frac{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}{P}$$

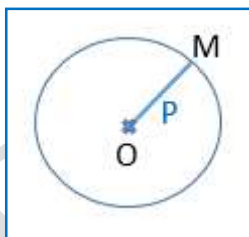
$$\Rightarrow \rho(\varphi) = \frac{P}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)} : \text{c'est l'équation d'une conique, de paramètre } P \text{ et d'excentricité } e (e \geq 0).$$

$$\text{On prend le cas particulier } \varphi_0 = 0 \Rightarrow \rho(\varphi) = \frac{P}{1 + e \cos(\varphi)}$$

5. Nature de la trajectoire en fonction de e :

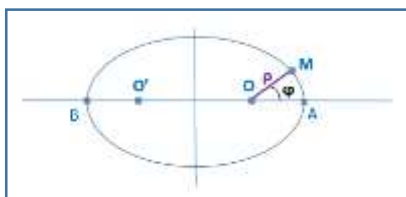
- Si $e = 0$: la trajectoire de M est un cercle de centre O et de rayon P.

$$\rho = P = \frac{mC^2}{k} \Rightarrow C(O, P)$$



- Si $0 < e < 1$: la trajectoire de M est une ellipse.

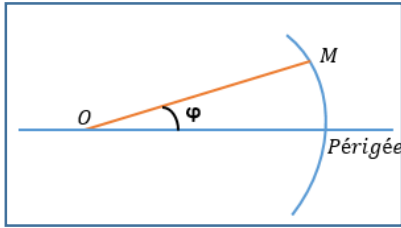
$$\rho(P) = \frac{P}{1 + e \cos(\varphi)}$$



- Si $e = 1$: la trajectoire de M est une parabole.

$$\rho(P) = \frac{P}{1 + \cos(\varphi)}$$

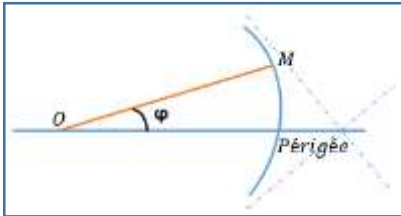
$$\rho(\text{Périgée}) = \rho(\varphi = 0) = \frac{P}{2}$$



- Si $e > 1$: la trajectoire de M est une hyperbole.

$$\rho(P) = \frac{P}{1 + e \cos(\varphi)}$$

$$\rho(\text{Périgée}) = \rho(\varphi = 0) = \frac{P}{1 + e}$$



6. Nature de la trajectoire en fonction de l'énergie mécanique :

a. Energie potentielle :

La force $\vec{F}$ est conservative ($\text{rot} \vec{F} = \vec{0}$), elle dérive donc d'une énergie potentielle E_p .

$$\vec{F} = - \overrightarrow{\text{grad}} E_p = \frac{-k}{\rho^2} = - \frac{\partial E_p}{\partial \rho}$$

$$\Leftrightarrow E_p = \int \frac{k}{\rho^2} d\rho = \frac{-k}{\rho} + \text{cte}$$

$$E_p(\infty) = 0 \Rightarrow \text{cte} = 0$$

$$\text{D'où : } E_p = \frac{-k}{\rho} = - \frac{k}{P} (1 + e \cos(\varphi))$$

b. Energie cinétique :

En utilisant la 1^{ère} formule de Binet : $E_c = \frac{1}{2} m C^2 \left[\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 \right]$

$$\text{Or } u = \frac{1 + e \cos(\varphi)}{P} \Rightarrow \frac{du}{d\varphi} = \frac{-e \sin(\varphi)}{P}$$

$$\text{D'où } E_c = \frac{1}{2} m C^2 \left[\left(\frac{-e \sin(\varphi)}{P} \right)^2 + \left(\frac{1 + e \cos(\varphi)}{P} \right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{2} m C^2 \left[\frac{e^2 \sin^2(\varphi)}{P^2} + \frac{1 + 2e \cos(\varphi) + e^2 \cos^2(\varphi)}{P^2} \right]$$

$$E_c = \frac{m C^2}{2 P^2} [1 + 2e \cos(\varphi) + e^2]$$

On a : $P = \frac{mC^2}{k} \Rightarrow mC^2 = P.k$

Donc $E_c = \frac{k}{2P}(1 + 2e\cos(\varphi) + e^2)$

c. Energie mécanique :

On a : $E_m = E_c + E_p$

Donc $E_m = \frac{k}{2P}(1 + 2e\cos(\varphi) + e^2) - \frac{k}{P}(1 + e\cos(\varphi))$
 $= \frac{k}{2P}(1 + 2e\cos(\varphi) + e^2 - 2 - 2e\cos(\varphi))$
 $= \frac{k}{2P}(-1 + e^2)$

$E_m = \frac{-k}{2P}(e^2 - 1)$

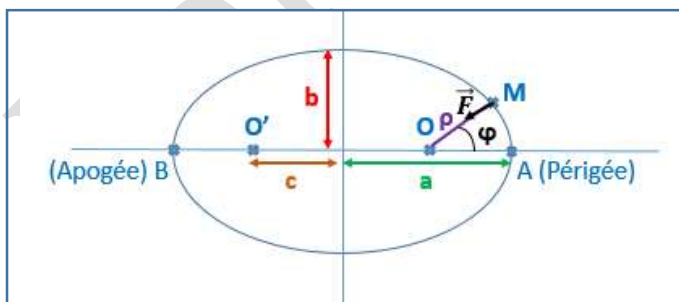
- Si $e = 0 \Rightarrow E_m = \frac{-k}{2P} < 0 \Rightarrow |E_c| < |E_p|$: la trajectoire est un cercle.
- Si $0 < e < 1 \Rightarrow \frac{-k}{2P} < E_m < 0 \Rightarrow |E_c| < |E_p|$: la trajectoire est une ellipse.
- Si $e = 1 \Rightarrow E_m = 0 \Rightarrow |E_c| = |E_p|$: la trajectoire est une parabole.
- Si $e > 1 \Rightarrow E_m > 0 \Rightarrow |E_c| > |E_p|$: la trajectoire est une hyperbole.

III. Mouvement des planètes autour du soleil :

Le soleil exerce une force gravitationnelle sur les planètes, qui les attire vers lui.

Cette force agit comme « une corde invisible » qui maintient les planètes en orbite au lieu qu'elles s'échappent dans l'espace.

La trajectoire des planètes autour du soleil est elliptique.



$$\vec{F} = -\frac{k}{\rho^2} \vec{e}_\rho$$

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho$$

$$\rho = \frac{P}{1 + e\cos(\varphi)} \text{ avec } 0 < e < 1$$

- $\rho(\text{Apogée}) = \rho(\varphi = \pi) = \rho_{\max} = \frac{P}{1 - e}$
- $\rho(\text{Périgée}) = \rho(\varphi = 0) = \rho_{\min} = \frac{P}{1 + e}$

$$\begin{cases} \rho_{\max} + \rho_{\min} = 2a = \frac{P}{1-e} + \frac{P}{1+e} = \frac{2P}{1-e^2} \\ \rho_{\max} - \rho_{\min} = 2c = \frac{P}{1-e} - \frac{P}{1+e} = \frac{2Pe}{1-e^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{P}{1-e^2} \\ c = \frac{Pe}{1-e^2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{e = \frac{c}{a}}$$

On a aussi (théorème de Pythagore) : $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b = \frac{P}{\sqrt{1-e^2}}$

1. 1^{ère} loi de Kepler : (Loi des orbites)

Les planètes ont des trajectoires elliptiques dont le soleil est situé à l'un des foyers.

2. 2^{ème} loi de Kepler : (Loi des aires)

Une planète parcourt des aires égales pendant des intervalles de temps égaux :

$$S = \frac{C}{2} t + S_0$$

3. 3^{ème} loi de Kepler : (Loi des périodes)

Le carré de la période de révolution d'une planète est proportionnel au cube du demi grand axe (a).

On a : la vitesse aréolaire de M : $\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2} = \text{cte}$

$$\Rightarrow \frac{C}{2} = \frac{\Delta S}{T} = \frac{\pi ab}{T}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{C}{2}\right)^2 = \left(\frac{\pi ab}{T}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{C^2}{4} = \frac{\pi^2 a^2 b^2}{T^2}$$

$$\text{Or } P = \frac{mC^2}{k} \Rightarrow C^2 = \frac{Pk}{m}$$

$$\text{D'où } \frac{Pk}{4m} = \frac{\pi^2 a^2 b^2}{T^2}$$

$$\text{On a } b = \frac{P}{\sqrt{1-e^2}} \Rightarrow b^2 = \frac{P^2}{1-e^2} = a.P$$

$$\text{Donc } \frac{Pk}{4m} = \frac{\pi^2 a^3 P}{T^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{k} = \text{cte}}$$

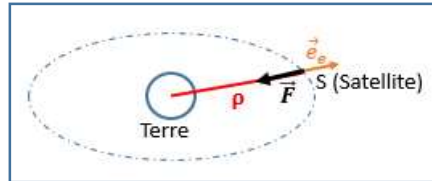
IV. Mouvement des satellites :

Un satellite artificiel est un objet (de taille très petite par rapport à la Terre et donc on peut l'assimiler à un point matériel) qui tourne autour de la terre.

La terre exerce sur ce satellite de masse m une force Newtonienne : $\vec{F} = -\frac{GMm}{\rho^2} \vec{e}_\rho$

Avec M : la masse de la terre.

m : la masse du satellite.



La trajectoire de S est une conique de paramètre $P = \frac{mc^2}{k}$ et d'excentricité $e = u_0 P$

L'énergie mécanique du satellite est :

$$E_m = \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{GMm}{\rho_0} = \frac{k}{2P}(e^2 - 1)$$

Avec : V_0 : la vitesse initiale.

$\rho_0 = R_T + h$ (R_T : rayon de la terre et h : l'altitude).

1. Vitesse de libération : V_L

La vitesse de libération d'un satellite correspond à la vitesse minimale nécessaire pour qu'un satellite puisse quitter définitivement l'attraction gravitationnelle de la terre, permettant ainsi au satellite d'avoir une trajectoire ouverte.

Cette vitesse correspond à la vitesse pour une trajectoire parabolique : $e = 1$ ($E_m = 0$)

$$\text{D'où } E_m = -\frac{GMm}{\rho_0} + \frac{1}{2}mV_L^2 = 0$$

$$\Rightarrow V_L = \sqrt{\frac{2GM}{\rho_0}} = \text{vitesse de libération}$$

- Si $V_0 \geq V_L$: trajectoire parabolique ou hyperbolique
- ⇒ Le satellite s'éloigne indéfiniment de la terre et il ne reviendrait plus jamais sur terre.
- Si $V_0 < V_L$: trajectoire circulaire ou elliptique
- ⇒ Le satellite reste en orbite.

2. Mise sur orbite d'un satellite :

La mise en orbite d'un satellite se fait en deux grandes étapes :

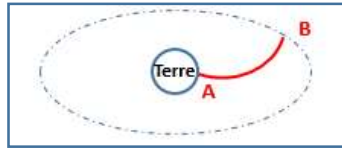
a. Le lancement :

Lancement à partir d'une station terrestre à une vitesse $V_0 > V_L$.

Le but est d'amener le satellite depuis la surface terrestre A jusqu'à une altitude suffisante pour entrer en orbite B.

b. La satellisation :

La fusée ajuste le vitesse du satellite ($V_0 < V_L$) selon l'altitude désirée puis le satellite est séparé du lanceur, et continue en orbite stable.



3. Satellite géostationnaire :

Un satellite géostationnaire est un satellite placé sur une orbite circulaire au-dessus de l'équateur, à environ 36000km d'altitude, qui tourne autour de la terre en 24h, à la même vitesse que sa rotation. Il reste ainsi immobile par rapport à un observateur lié à la terre.

$$\text{On a: } \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \frac{GMm}{\rho_0^2} = ma_N = m\frac{V_1^2}{R_c} = m\frac{V_1^2}{\rho_0}$$

$$\text{D'où } V_1 = \sqrt{\frac{GM}{\rho_0}} = \frac{V_L}{\sqrt{2}} < V_L$$

Exercice d'application :

Considérons un point matériel M de masse m soumis à l'interaction gravitationnelle par une masse ponctuelle M_s située au point O. Soit le référentiel galiléen R (O, X, Y, Z).

- 1) Montrer que le moment cinétique est conservé. En déduire que le mouvement est plan.

On choisit R tel que le mouvement de M soit dans le plan (XOY). On utilise dans la suite de l'exercice les coordonnées polaires (ρ , φ)

- 2) Calculer l'énergie cinétique E_c et l'énergie potentielle E_p de M. On prend $E_p(\infty) = 0$.

En déduire que l'énergie mécanique de M est donnée par: $E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + \frac{m C^2}{2 \rho^3} - \frac{k}{\rho}$

- 3) On pose: $\rho = \frac{1}{u}$, retrouve l'expression de E_m en fonction de $(u, \frac{du}{d\varphi})$

- 4) En utilisant le théorème de l'énergie mécanique, montrer que l'équation du mouvement en $u(\varphi)$ est: $\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{k}{m C^2}$.

- 5) Résoudre l'équation du mouvement en $u(\varphi)$. En déduire que l'équation du mouvement en $\rho(\varphi)$ est de la forme: $\rho = \frac{P}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}$.

Quelle est la nature de la trajectoire en précisant les expressions de P et de e ?

- 6) En utilisant l'expression de E_m en fonction de $u(\varphi)$, montrer que: $E_m = \frac{G M_s m}{2P} (e^2 - 1)$.

Discuter la nature de la trajectoire en fonction de e et en déduire le signe de E_m pour chaque type de trajectoire.

- 7) En utilisant la conservation de l'énergie mécanique, déduire que l'excentricité dans ce cas est donnée par: $e = \sqrt{1 + \frac{P V_0^2}{G M_s} - \frac{2P}{\rho_0}}$ où $\rho(t=0) = \rho_0$ et $\|\vec{V}(M/R)\|_{t=0} = V_0$.

Solution :

- 1) Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{\sigma}_0(M/R)}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \Sigma \vec{F} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_0(M/R) = c t \vec{e} \text{ (Moment cinétique est conservé)}$$

$$\vec{\sigma}_0(M/R) = \overrightarrow{OM} \wedge m \vec{V}(M/R) = c t \vec{e}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} \text{ et } \vec{V}(M/R) \text{ se trouvent à chaque instant dans un même plan } \perp \text{ à la direction fixe de } \overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M/R)$$

$$\Rightarrow \text{Mouvement est plan.}$$

$$2) E_c = \frac{1}{2} m V^2$$

$$\text{On a } \overrightarrow{OM} = \rho \overrightarrow{e_\rho}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(M/R) = \dot{\rho} \overrightarrow{e_\rho} + \rho \dot{\varphi} \overrightarrow{e_\varphi}$$

$$\Rightarrow V^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2$$

$$\Rightarrow E_c = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2)$$

$\vec{F}$ est conservative ($\overrightarrow{\text{rot}} \vec{F} = \vec{0}$)

Donc $\vec{F} = - \overrightarrow{\text{grad}} E_p$

$$\frac{-k}{\rho^2} \overrightarrow{e_\rho} = - \frac{\partial E_p}{\partial \rho} \overrightarrow{e_\rho} \Rightarrow E_p = \int \frac{k}{\rho^2} d\rho = \frac{-k}{\rho} + \text{cte}$$

$$\text{Or } E_p(\infty) = 0 \Rightarrow \text{cte} = 0$$

$$\Rightarrow E_p = \frac{-k}{\rho}$$

$$\text{D'où } E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{k}{\rho}$$

$$\text{Or } C = \rho^2 \dot{\varphi} \Rightarrow C^2 = \rho^4 \dot{\varphi}^2 \Rightarrow \rho^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{C^2}{\rho^2}$$

$$\Rightarrow E_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + \frac{m C^2}{2 \rho^2} - \frac{k}{\rho}$$

$$3) \text{ On pose : } \rho = \frac{1}{u}$$

$$\Rightarrow \dot{\rho} = \frac{d\rho}{dt} = \frac{d(\frac{1}{u})}{dt} = \frac{d(\frac{1}{u})}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{-1}{u^2} \cdot \frac{du}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi}$$

$$\Rightarrow \dot{\rho}^2 = \frac{1}{u^4} \cdot \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 \cdot \dot{\varphi}^2 = C^2 \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2$$

$$\text{Donc : } E_m = \frac{m C^2}{2} \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + \frac{m C^2 u^2}{2} - k u$$

$$4) \frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dE_m}{d\varphi} = 0$$

$$\frac{m C^2}{2} \cdot 2 \frac{du}{d\varphi} \cdot \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + m C^2 u \frac{du}{d\varphi} - k \frac{du}{d\varphi} = 0$$

$$m C^2 \cdot \frac{d^2 u}{d\varphi^2} + m C^2 u - k = 0$$

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{k}{m C^2}$$

$$5) U = U_{ssm} + U_p \text{ avec } U_p = \frac{k}{m C^2}$$

$$U_{ssm} = U_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$$

$$\Rightarrow U = U_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{k}{m C^2}$$

$$\Rightarrow U = \frac{k}{mC^2} \left(1 + \frac{U_0 m C^2}{k} \cos(\varphi - \varphi_0) \right)$$

On pose : $P = \frac{mC^2}{k}$ et $e = \frac{U_0 m C^2}{k} = U_0 \cdot P$

$$\Rightarrow U = \frac{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}{P}$$

D'où : $\rho = \frac{P}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}$

- Si $e = 0$: trajectoire circulaire
- Si $0 < e < 1$: trajectoire elliptique
- Si $e = 1$: trajectoire parabolique
- Si $e > 1$: trajectoire hyperbolique

6) On a $\frac{du}{d\varphi} = \frac{-e \sin(\varphi - \varphi_0)}{P}$

Donc : $E_m = \frac{mC^2}{2} \left(\frac{e^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0)}{P^2} \right) + \frac{mC^2}{2} \left(\frac{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}{P} \right)^2 - k \left(\frac{1 + e \cos(\varphi - \varphi_0)}{P} \right)$

$$E_m = \frac{mC^2}{2P^2} (e^2 \sin^2(\varphi - \varphi_0)^2 + 1 + 2e \cos(\varphi - \varphi_0) + e^2 \cos^2(\varphi - \varphi_0)^2) - \frac{mC^2}{P^2} (1 + e \cos(\varphi - \varphi_0))$$

$$E_m = \frac{mC^2}{2P^2} (1 + e^2 + 2e \cos(\varphi - \varphi_0) - 2 - 2e \cos(\varphi - \varphi_0))$$

$$E_m = \frac{mC^2}{2P^2} (e^2 - 1) = \frac{k}{2P} (e^2 - 1) = \frac{GM_s m}{2P} (e^2 - 1)$$

- Si $e = 0 \Rightarrow E_m = \frac{-GM_s m}{2P} < 0$: trajectoire circulaire
- Si $0 < e < 1 \Rightarrow E_m < 0$: trajectoire elliptique
- Si $e = 1 \Rightarrow E_m = 0$: trajectoire parabolique
- Si $e > 1 \Rightarrow E_m > 0$: trajectoire hyperbolique

7) $E_m = \text{cte} = E_m(t=0)$

$$\frac{GM_s m}{2P} (e^2 - 1) = \frac{1}{2} m V_0^2 - \frac{GM_s m}{\rho_0}$$

$$\Rightarrow \frac{GM_s m}{2P} (e^2 - 1 + \frac{2P}{\rho_0}) = \frac{m V_0^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{GM_s}{P} (e^2 - 1 + \frac{2P}{\rho_0}) = V_0^2$$

$$\Rightarrow e^2 - 1 + \frac{2P}{\rho_0} = \frac{P V_0^2}{GM_s}$$

$$\Rightarrow e^2 = \frac{P V_0^2}{GM_s} + 1 - \frac{2P}{\rho_0}$$

$$\Rightarrow e = \sqrt{1 + \frac{P V_0^2}{GM_s} - \frac{2P}{\rho_0}}$$