SPM3 :

COURS D'ANALYSE 3

Partie :

Séries de Fourier

Cours et exercices corrigés

Hamid EZZAHRAOUI

Département de Mathématiques

Octobre 2019

Table des matières

1 Introduction **1**

1.1 Comment peut-on produire un son particulier ? 1

1.2 Vers les séries de Fourier 4

2 Série de Fourier **6**

2.1 Séries trigonométriques 6

2.2 Calcul des coefficients de la série trigonométrique. Cas réel 7

2.2.1 Calcul de a_0 7

2.2.2 Calcul des autres coefficients. 7

2.2.3 Développement d'une fonction en série de Fourier 9

2.3 Théorème fondamental 11

2.4 Exemples 12

2.5 Interprétation physique 16

2.6 Séries de Fourier complexes 17

2.7 Égalité de Parseval 19

2.7.1 Égalité de Parseval -Théorème 19

2.7.2 Égalité de Parseval-Interprétation physique 19

2.8 Propriété des coefficients de Fourier 20

3 Exercices **21**

4 Le phénomène de Gibbs **39**

4.1 Rappels 39

4.1.1 Séries alternées 39

4.1.2 La transformation d'Abel 40

4.1.3 Théorème de la convergence dominée pour les fonctions Riemann-intégrables 40

4.1.4 Séries entières 41

4.2 Problème 42

4.3 Description du phénomène de Gibbs 49

1 Introduction

1.1 Comment peut-on produire un son particulier ?

Tout d'abord, on sait qu'un son est une onde sonore, plus ou moins périodique, qui se propage dans l'air. C'est d'ailleurs ce qui le différencie de ce qu'on appelle communément un bruit.

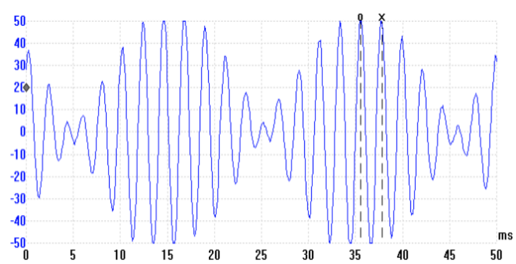


FIGURE 1.1 – Un son, caractérisé par une certaine répétition.

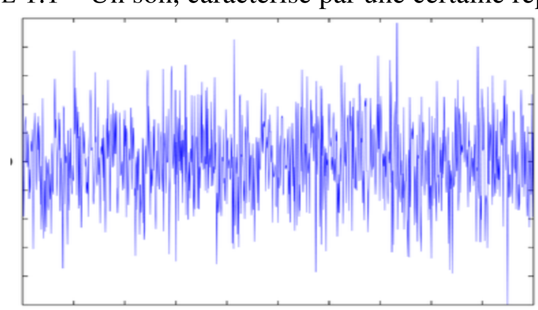


FIGURE 1.2 – Du bruit, rien n'est ordonné ou répétitif.

Ainsi, la réponse à notre question initiale se déduit aisément : il nous suffit de créer des déformations périodiques dans l'air. Cependant, la question s'avère être plus complexe car nous désirons obtenir un son spécifique. Par exemple, le son la 440Hz correspond en réalité à 440 déformations par seconde. Pourtant, il existe des milliers de la 440Hz différents, empreints de leur spécificité, et tout le monde peut, par exemple distinguer un son d'une fréquence de 440Hz issu d'un diapason de celui provenant d'un piano. Cette différence sonore que l'on perçoit découle de la dissimilitude du timbre des deux notes. L'illustration graphique de ces deux sons (amplitude-fréquence), témoigne de la dissemblance des deux notes en questions. Voici la même note jouée sur des instruments différents. Remarquez la forte corrélation entre les deux instruments jouant la même note. Ainsi

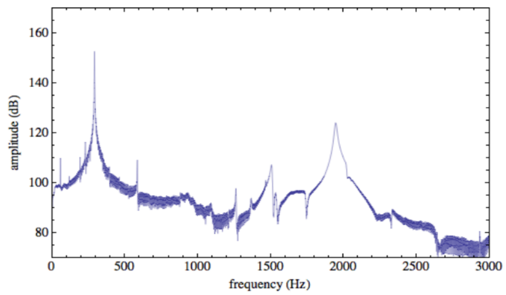


FIGURE 1.3 – Une note jouée sur un Piano.

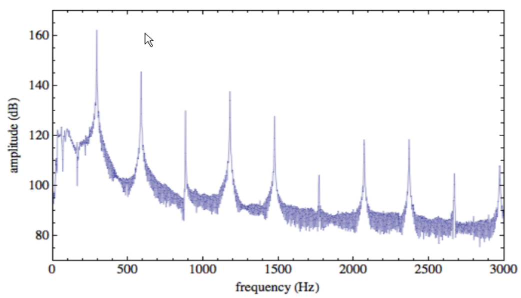


FIGURE 1.4 – Même note jouée sur une guitare.

émerge une nouvelle question, de loin plus intéressante : **comment peut-on produire un timbre particulier ?**

La réponse est en fait relativement simple, et facilement imaginable. Pour commencer, on peut se pencher sur les instruments de musique. Nous savons que lorsqu'on joue une note sur un instrument, on produit non seulement la note jouée, mais également ce qu'on appelle les **harmoniques** de la note. On dira que la note a une fréquence fondamentale f et que ses harmoniques possèdent des fréquences multiples de celle-ci, nf avec $n \in \mathbb{Z}$. Il va de soi que l'amplitude des harmoniques peut être nulle, ou non-nulle. On peut représenter la note sous un graphique (amplitude-fréquence). Comme ceux utilisés pour représenter les deux sons ci-dessus.

Nous pouvons facilement déduire que dans ce cas, les notes que l'on peut entendre correspondent bien à la superposition de l'onde fondamentale et ses harmoniques. La forme de l'onde, donc son timbre, concorde avec la somme des amplitudes de toutes les harmoniques de l'onde. Aussi la fréquence de deux sons peut-elle très bien être similaire, chacun possédant ses harmoniques spécifiques, la forme de l'onde diffèrera clairement.

Dans la figure 1.5 ci-dessus, le graphe de quatre sinusoïdes $\sin(x)$, $0.8\sin(2x)$, $0.4\sin(3x)$ et $0.2\sin(7x)$.

En bas (figure 1.6), la somme de ces quatre courbes.

La figure 1.7 montre l'approximation de la fonction qui représente un signal triangulaire périodique avec

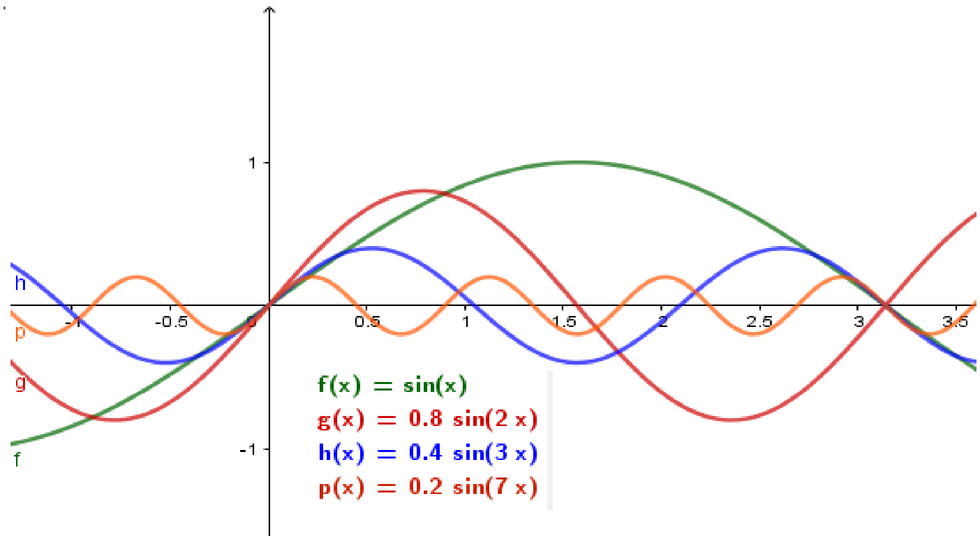


FIGURE 1.5 –

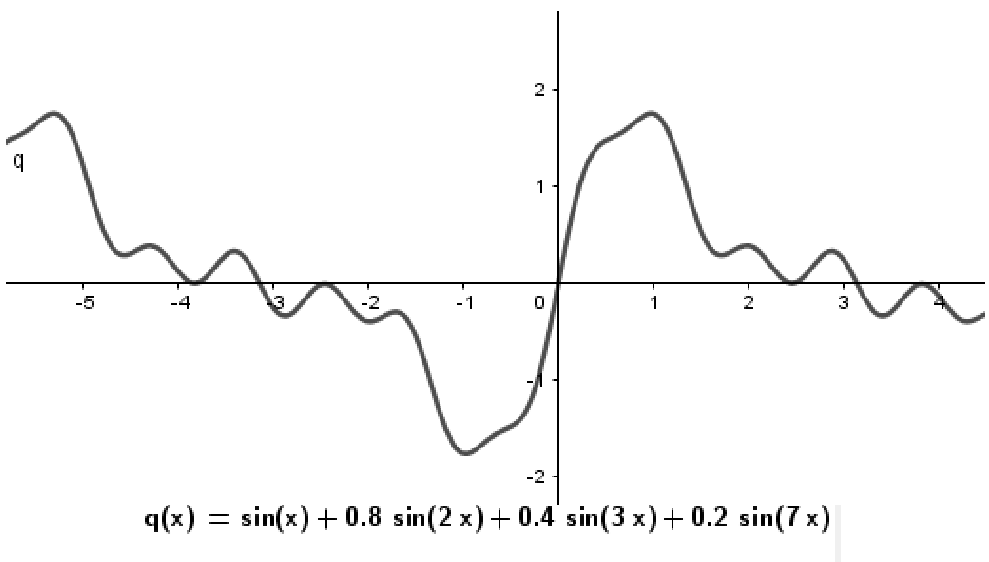


FIGURE 1.6 –

un nombre croissant des termes (de la série de Fourier).

Nous arrivons donc à la conclusion que nous pouvons créer toute une série de son à l'aide d'une addition d'onde fondamentale et des ses harmoniques. Mais inversement, peut-on décrire tout son comme la somme d'harmoniques ? Afin d'apporter une réponse, nous devons nous pencher sur les séries de Fourier.

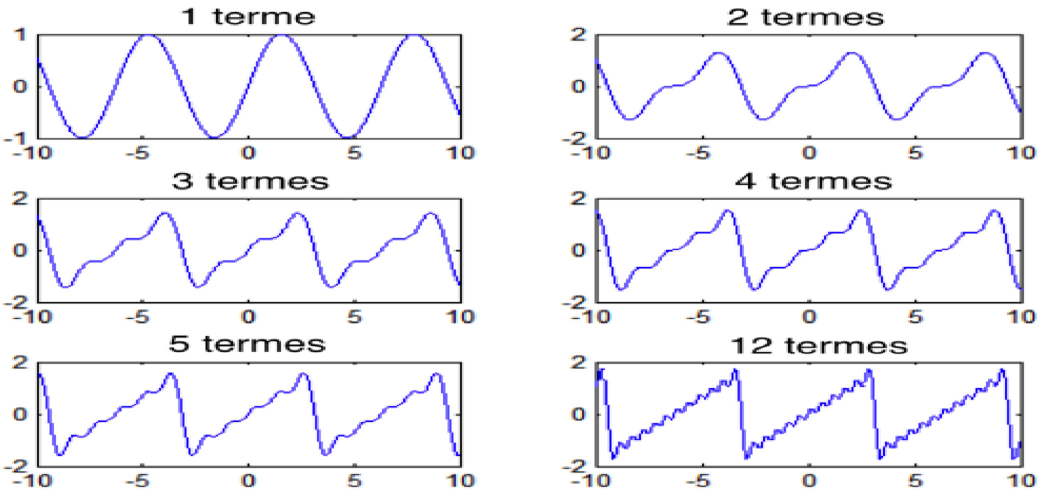


FIGURE 1.7 –

Joseph FOURIER : Né à Auxerre, le 21 mars 1768. Grand géomètre et physicien, il fut professeur à l'École polytechnique, secrétaire de l'Institut d'Égypte, préfet en 1802, baron de l'Empire ; il avait été admis à l'École normale à sa fondation. Élu membre de l'Académie des Sciences en 1817, son élection fut annulée par Louis XVIII et confirmée par un nouveau vote en 1818 : il en devint secrétaire perpétuel. Il écrivit des ouvrages scientifiques dont le plus important est la ***Théorie analytique de la chaleur*** en 1822. Il est connu pour avoir déterminé, par le calcul, la diffusion de la chaleur en utilisant la décomposition d'une fonction quelconque en une série trigonométrique convergente. De telles fonctions sont appelées séries de Fourier. La méthode de calcul permettant de façon réversible de passer d'une fonction à la série trigonométrique correspondante est la transformation de Fourier. Cette méthode très féconde est devenue incontournable en théorie du signal, imagerie numérique, compression de données, dans l'exploitation des systèmes 3G, 4G.

Il fut nommé à l'Académie française le 14 décembre 1826 en remplacement de Pierre-Édouard Lémontey, et reçu le 17 avril 1827 par Abel-François Villemain. Mort le 16 Mai 1830 à Paris.

FIGURE 1.8 – Fourier(1768-1830).

1.2 Vers les séries de Fourier

Joseph Fourier, qui travaillait sur la propagation de la chaleur sur des corps solides, a remarqué que la propagation de la chaleur sur un anneau ressemble à un mouvement harmonique.

En physique, nous donnons une expression plus générale à ce phénomène.

$$y(x,t) = A\sin(\frac{2\pi x}{\lambda} - \frac{2\pi t}{T} + \phi)$$

où y est le déplacement périodique de la vibration de l'objet , λ la période dans l'espace, T la période dans le temps et ϕ la phase, qui est constante.

En fait, lors d'une expérience simple, il a remarqué que la source de chaleur passe cycliquement, mais brusquement, d'une valeur extrême à une autre. Il a été ainsi amené à soupçonner le rôle très important des fonctions trigonométriques et admettre qu'elles pouvaient être les constituants élémentaires de tout si nous fixons la

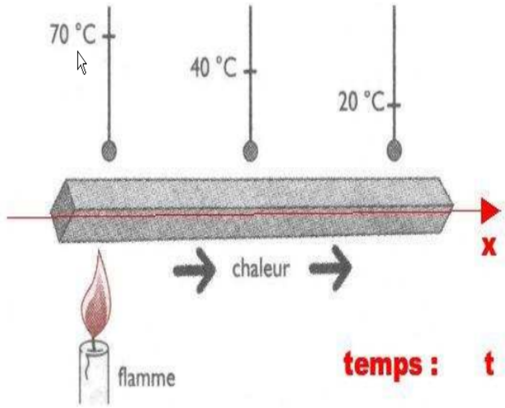


FIGURE 1.9 –

variable x. Nous avons ici une fonction $f(t)$ périodique de période T. L'idée de Fourier fut alors d'approximer le phénomène observé par une somme finie, constituée des harmoniques de la période fondamentale T.

L'approximation est

$$\sum_{k=1}^{n} A_k \sin(\frac{2\pi k}{T}t + \phi_k)$$

où n est un entier naturel, A_k et ϕ_k sont deux constantes qui varient en fonction de k. En développant le sinus, on trouve que

$$A_k \sin(\frac{2\pi k}{T}t + \phi_k) = a_k \cos(\frac{2\pi k}{T}t) + b_k \sin(\frac{2\pi k}{T}t)$$

où $a_k = A_k \sin(\phi_k)$ et $b_k = A_k \cos(\phi_k)$. Si on ajoute un terme constant a_0, on obtient

$$\boxed{a_0 + \sum_{k=1}^{n} \Big(a_k cos(\frac{2\pi k}{T}t) + b_k \sin(\frac{2\pi k}{T}t)\Big).}$$

2

Série de Fourier

2.1 Séries trigonométriques

Définition 2.1.1. *On appelle série trigonométrique, toute série de la forme :*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Big(a_n\cos(n\omega x)+b_n\sin(n\omega x)\Big), \tag{2.1}$$

avec $x\in\mathbb{R}$, $\omega>0$, $a_n,b_n\in\mathbb{R}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Remarque 2.1.2. *(a) Le terme générale $S_n=a_n\cos(n\omega x)+b_n\sin(n\omega x)$ de la série trigonométrique est périodique de période $T=\frac{2\pi}{n\omega}$.*

(b) Si la série (2.1) *converge vers* ***S(x)****, la fonction $S(x)$ est périodique de période $T=\frac{2\pi}{\omega}$*

Notons que pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a la majoration

$$|a_n\cos(n\omega x)+b_n\sin(n\omega x)|\leqslant|a_n|+|b_n|$$

et on déduit alors le résultat suivant.

Proposition 2.1.3. *Si les séries numériques $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|$ et $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|b_n|$ convergent, alors la série trigonométrique $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(a_n\cos(n\omega x)+b_n\sin(n\omega x))$ est absolument convergente pour tout $x\in\mathbb{R}$ et la fonction somme est continue sur $\mathbb{R}$.*

Exemple 2.1.4. *On considère la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\omega x)}{n^2}$. Donc, $a_n=\frac{1}{n^2}$ et $b_n=0$. On alors :*

$$|a_n\cos(n\omega x)+b_n\sin(n\omega x)|\leqslant|a_n|+|b_n|=\frac{1}{n^2}.$$

Or, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente car $\alpha=2>1$,donc, la série trigonométrique $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\omega x)}{n^2}$ est absolument convergente sur $\mathbb{R}$.

On admettra la proposition suivante.

Proposition 2.1.5. *Si les suites numériques $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ sont positives est décroissantes vers 0, alors la série trigonométrique $\sum_{k=0}^{\infty}(a_n\cos(n\omega x)+b_n\sin(n\omega x))$ est convergente pour tout $x\neq\frac{2k\pi}{\omega}$ $(k\in\mathbb{Z})$.*

2.2 Calcul des coefficients de la série trigonométrique. Cas réel

Mettons nous dans les conditions de convergence uniforme de la série trigonométrique (2.1) vers $S(x)$.

2.2.1 Calcul de a_0

Supposons que la série est intégrable terme à terme sur tout intervalle $\Delta=[\alpha,\alpha+T]$, on aura :

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\alpha+T}S(x)dx &= \int_{\alpha}^{\alpha+T}a_0dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\alpha}^{\alpha+T}\Big(a_n\cos(n\omega x)+b_n\sin(n\omega x)\Big)\\ &= \int_{\alpha}^{\alpha+T}a_0dx+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{\alpha}^{\alpha+T}\cos(n\omega x)dx+b_n\int_{\alpha}^{\alpha+T}\sin(n\omega xdx)\right]\end{aligned}$$

Sachant que $\omega=\frac{2\pi}{T}$, pour tout $n=1,2,\ldots$ on a :

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\alpha+T}\cos(n\omega x)dx &= \left[\frac{T}{2\pi n}\sin(n\frac{2\pi}{T}x)\right]_{\alpha}^{\alpha+T}\\ &= \frac{T}{2\pi n}\left[\sin(n\frac{2\pi}{T}(\alpha+T))-\sin(n\frac{2\pi}{T}\alpha)\right]\\ &= \frac{T}{2\pi n}\left[\sin(n\frac{2\pi}{T}\alpha)-\sin(n\frac{2\pi}{T}\alpha)\right]\\ &= 0\end{aligned}$$

De la même manière, on montre que

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T}\sin(n\omega x)dx=0,\ \text{pour tout } n=1,2,\ldots.$$

Puisque $\int_{\alpha}^{\alpha+T}a_0dx=Ta_0$ on en déduit que :

$$\boxed{a_0=\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}S(x)dx}$$

2.2.2 Calcul des autres coefficients.

On a

$$S(x)\cos(n\omega x)=a_0\cos(n\omega x)+\sum_{k=1}^{\infty}\Big[a_k\cos(k\omega x)\cos(n\omega x)+b_k\sin(k\omega x)\cos(n\omega x)\Big]$$

et

$$S(x)\sin(n\omega x) = a_0 \sin \omega x) + \sum_{k=1}^{\infty} \Big[a_k \cos(k\omega x)\sin(n\omega x) + b_k \sin(k\omega x)\sin(n\omega x)\Big].$$

La convergence uniforme nous permet d'avoir :

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\alpha+T} S(x)\cos(n\omega x)dx &= a_0\int_{\alpha}^{\alpha+T}\cos(n\omega x)dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{\alpha}^{\alpha+T}\cos(k\omega x)\cos(n\omega x)dx \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{\alpha}^{\alpha+T}\sin(k\omega x)\cos(n\omega x)dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{\alpha}^{\alpha+T} S(x)\sin(n\omega x)dx &= a_0\int_{\alpha}^{\alpha+T}\sin(n\omega x)dx + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \int_{\alpha}^{\alpha+T}\cos(k\omega x)\sin(n\omega x)dx \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} b_k \int_{\alpha}^{\alpha+T}\sin(k\omega x)\sin(n\omega x)dx.\end{aligned}$$

Pour obtenir les autres coefficients de la série, on calcule d'abord les intégrales auxiliaires suivantes, dans lesquelles n et k sont des entiers strictement positifs.

On a (À faire à titre d'exercice.)

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T}\cos(k\omega x)\cos(n\omega x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ \frac{T}{2} & \text{si } k = n \end{cases}$$

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T}\sin(k\omega x)\sin(n\omega x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ \frac{T}{2} & \text{si } k = n \end{cases}$$

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T}\cos(k\omega x)\sin(n\omega x)dx = 0.$$

On déduit alors les coefficients par les expressions suivantes :

$$\boxed{a_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} S(x)\cos(n\omega x)dx \text{ et } b_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} S(x)\sin(n\omega x)dx, \quad n = 1, 2, \ldots.}$$

Conclusion : $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} S(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} S(x)\cos(n\omega x)dx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} S(x)\sin(n\omega x)dx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

En particulier pour $\alpha = -\pi$, on a le résultat suivant.

Corollaire 2.2.1. *Si la fonction S est de période $T = 2\pi$ et donc $\omega = 1$, alors :*

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x)dx$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\cos(nx)dx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(x)\sin(nx)dx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

2.2.3 Développement d'une fonction en série de Fourier

Soit f une fonction périodique de période T, intégrable sur toute intervalle fermé de $\mathbb{R}$.

Définition 2.2.2. *On appelle* ***série de Fourier*** *associée à f, la série trigonométrique*

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x)),$$

où les coefficients sont donnés par :

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx$$
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\cos(n\omega x)dx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)\sin(n\omega x)dx, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Définition 2.2.3. • *Une fonction f de domaine de définition D_f est dite* ***paire*** *si pour tout $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et $f(-x) = f(x)$.*
• *f est dite* ***impaire*** *si pour tout $x \in D_f$, on a $-x \in D_f$ et $f(-x) = -f(x)$.*
La parité de la fonction f requiert la symétrie du domaine de définition D_f par rapport à l'origine.

Remarque 2.2.4. • *Si la fonction f est **paire**, on a :*

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos(n\omega x)dx, \quad n = 1, 2, \dots.$$

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots.$$

• *Si la fonction f est **impaire**, on a :*

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots.$$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin(n\omega x)dx, \quad n = 1, 2, \dots.$$

En particulier, si la fonction f est 2π-périodique, alors :

*i. Si f est **paire**, on a*

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad n = 1, 2, \dots.$$

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots.$$

*ii. Si f est **impaire**, alors :*

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots.$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad n = 1, 2, \dots.$$

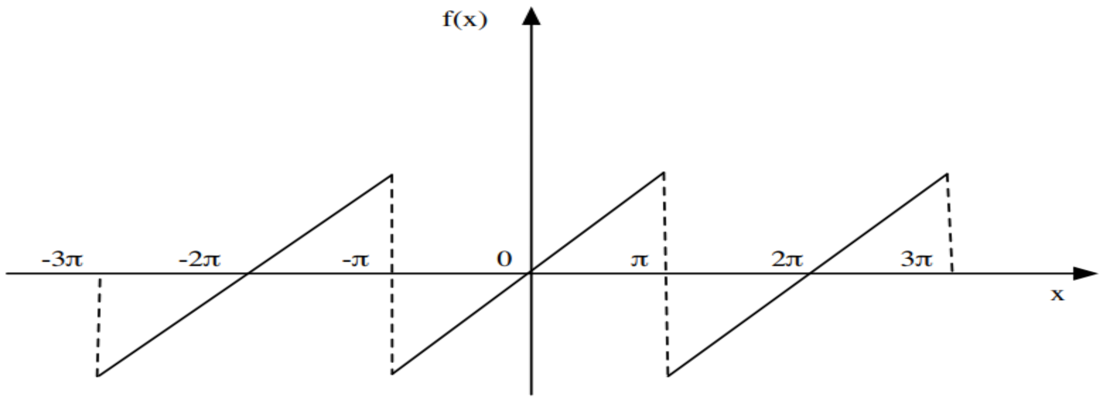
Cette remarque est très utile dont la mesure où le nombre de coefficients à calculer est divisé par 2.

Exemple 2.2.5. *Déterminer la série de Fourier associée à la fonction périodique $(T = 2\pi)$ définie par :*

$$f(x) = x \quad \textit{pour} \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

Solution *-Traçons le graphe de f.*

Cette fonction est monotone par morceaux et bornée.



Soit $a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$ *la série de Fourier associée à* f. *Comme* f *est impaire alors* $a_n = 0$ *pour tout* n *et les coefficients* b_n *sont donnés par*

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin(n\omega x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx, \quad \textit{car } T = 2\pi \textit{ et donc } \omega = 1.$$

Pour calculer b_n, *on fait une intégration par parties en prenant* $u(x) = x$ *et* $v'(x) = \sin(nx)$ *:*

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-x\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} -\frac{1}{n}\cos(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[-\pi\frac{1}{n}\cos(n\pi) - 0\right] + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\cos(nx)dx \\ &= -\frac{2}{n}\cos(n\pi) + \frac{2}{n\pi}\left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi} \end{aligned}$$

Comme $\cos(n\pi) = (-1)^n$ *et* $\sin(n\pi) = 0$, *on obtient*

$$b_n = (-1)^{n+1}\frac{2}{n}.$$

D'où la série de Fourier associée à f *est donnée par :*

$$S_f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_n\cos(n\omega x) + b_n\sin(n\omega x)\Big) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx).$$

2.3 Théorème fondamental

Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle I. Plusieurs types de convergence de (f_n) vers une fonction f peuvent être considérés, par exemple :

- **La convergence ponctuelle** (ou simple), (Lejeune Dirichlet, 1824) :

$$\lim_{n\to+\infty}(f_n(x) - f(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

- La convergence **uniforme** :

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Soient f une fonction périodique de période T et

$$S_f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

sa série de Fourier associée. Il n'est pas évident que S_f converge, et même si c'est le cas, il n'est pas évident que la somme soit f. En effet, d'après l'exemple 2.2.5, on voit que $S_f(x) \neq f(x)$ pour $x = -\pi$ et $x = \pi$.

Problème : *Étant donné une fonction périodique f, on se demande pour quelles conditions imposées à f on aura* :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))?$$

La réponse à cette question est donnée par le théorème de Dirichlet suivant.

Théorème 2.3.1 (de Dirichlet)**.** *Soit f une fonction périodique de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ vérifiant :*

i) f est continue sur tout intervalle $\Delta = [a, a+T]$ sauf éventuellement en un nombre fini de points en lesquels elle possède une limite à droite $f(x+0)$ et une limite à gauche $f(x-0)$;

ii) f est dérivable sur tout intervalle $\Delta =]a, a+T[$ sauf éventuellement en un nombre fini de points en lesquels elle possède une dérivée à droite et une dérivée à gauche.

Alors, la série de Fourier associée à f est telle que :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\Big) = f(x) \quad \text{en tout point de continuité de} f;$$

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\Big) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} \quad \text{en tout point de discontinuité de} f.$$

Remarque 2.3.2. *Si f est continue en tout point et satisfait les conditions du théorème de Dirichlet, alors*

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)) \quad \text{pour tout } x \in D_f.(D_f \text{ est le domaine de définition de} f).$$

2.4 Exemples

Exemple 2.4.1. *On reprend l'exemple précédent 2.2.5, soit f la fonction périodique $(T = 2\pi)$ définie par :*

$$f(x) = x \quad \text{pour} \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi.$$

La série de Fourier associée à f converge t-elle vers f ?

Solution. D'après l'exemple 2.2.5 précédent, la série associée à f est

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx).$$

Vérification des condition de Dirichlet :
-La fonction f est continue sur $]-\pi,\pi[$ et elle n'est pas continue en $-\pi$ et en π avec $\lim_{x\to-\pi^-} f(x) = \pi$ et $\lim_{x\to-\pi^+} f(x) = -\pi$ (nombre fini de points de discontinuité) ;
-La fonction f est dérivable sur $]-\pi,\pi[$ et elle n'est pas dérivable en $-\pi$ et en π, car f n'est pas continue en ces points (nombre fini de points de non dérivabilité).
Ainsi, les conditions de Dirichlet sont vérifiées et donc ;

$$f(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx) \quad \text{pour tout} \quad x \in]-\pi,\pi[.$$

Cette égalité a lieu partout sauf aux points de discontinuité. En de tels points, la somme de la série est égale à la moyenne arithmétique des limites de la fonction à gauche et à droite, c'est-à-dire 0.

Exemple 2.4.2. *On se donne une fonction périodique de période 2π définie comme suit*

$$f(x) = \begin{cases} -x, & si \quad -\pi \leqslant x \leqslant 0; \\ x, & si \quad 0 < x \leqslant \pi. \end{cases} \tag{2.2}$$

(La fonction f est définie par $f(x) = |x|$ dans $[-\pi,\pi]$).
Cette fonction est monotone par morceaux et bornée (Figure 2.1).

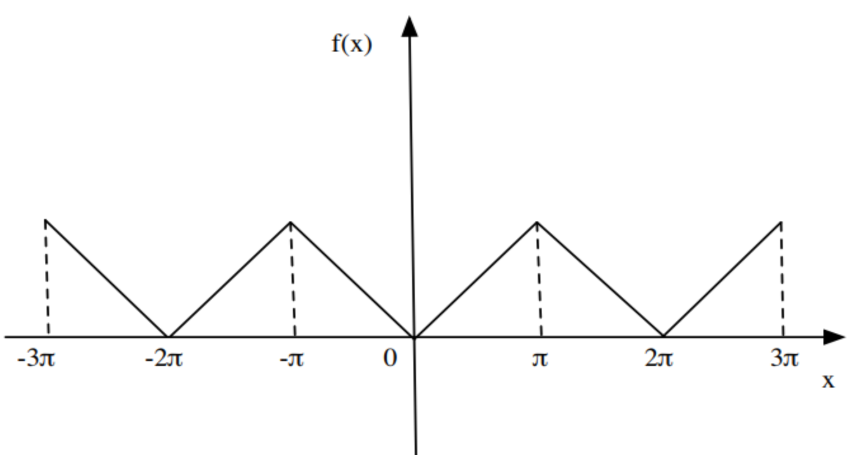


FIGURE 2.1 –

Elle admet donc un développement en série de Fourier.
f est périodique de période $T = 2\pi$, alors $\omega = 1$. Déterminons ses coefficients de Fourier.

Puisque la fonction f est paire, donc $b_n = 0$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$
De plus, on a

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} xdx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

Pour $n = 1, 2, \ldots$ on a

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos(n\omega x)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\left[\frac{x}{n}\sin(nx)dx\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx\right\} \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{0 + \left[\frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^{\pi}\right\} \\
&= \frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n - 1\right],
\end{aligned}$$

soit

$$a_n = \begin{cases} 0 & \textit{si } n \quad \textit{est pair} \\ -4/\pi n^2 & \textit{si } n \quad \textit{est impair.} \end{cases}$$

Le développement en série de Fourier est :

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\cos((2p+1)x)}{(2p+1)^2}. \tag{2.3}$$

L'égalité (2.3) *est exacte partout.*

Remarque. *En posant dans l'égalité* (2.3) *obtenue $x = 0$, on obtient*

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

D'autre part, comme

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{(2p+1)^2} + \sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

on a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exemple 2.4.3. *On considère la fonction périodique de période 2π définie comme suit :*

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x < 0 \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

f est une fonction créneau [1]*. Cette fonction est monotone par morceaux et bornée (figure 2.2). C'est une fonction impaire, donc, $a_0 = 0$ et $a_n = 0$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$*

1. Une fonction créneau est une fonction nulle partout sauf sur un intervalle sur lequel elle est constante.

De plus,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin(n\omega x)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi} 1\times\sin(nx)dx\right] \\
&= -\frac{2}{n\pi}\Big[\cos(nx)\Big]_0^{\pi} \\
&= -\frac{2}{n\pi}\big(\cos(n\pi)-\cos(0)\big) \\
&= -\frac{2}{n\pi}((-1)^n-1) \\
&= \begin{cases} 0, & n \text{ pair} \\ \frac{4}{n\pi}, & n \text{ impair.} \end{cases}
\end{aligned}$$

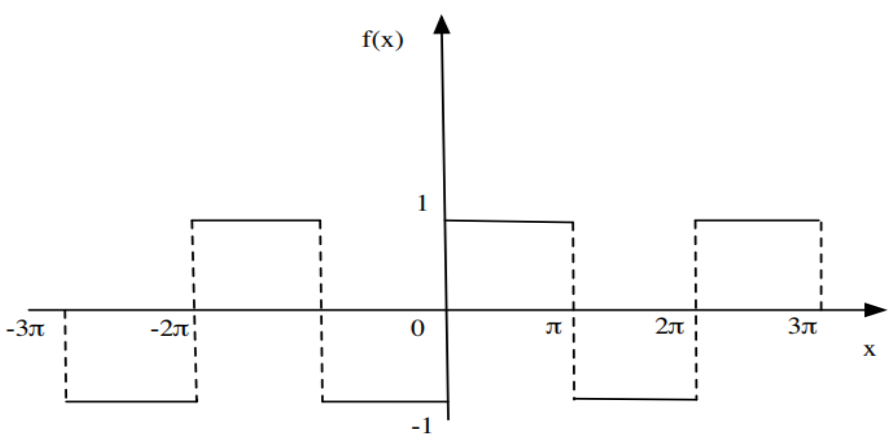


FIGURE 2.2 –

Il est facile de vérifier les conditions de Dirichlet. D'où
-si $x \neq 0$, alors la série de Fourier de la fonction considérée s'écrit donc :

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\left[\frac{\sin(x)}{1}+\frac{\sin(3x)}{3}+\frac{\sin(5x)}{5}+\cdots+\frac{\sin((2p+1)x)}{2p+1}+\cdots\right] \tag{2.4}$$

$$= \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\sin((2p+1)x)}{2p+1}. \tag{2.5}$$

Si $x = 0$, on a

$$s(0) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{1-1}{2} = 0.$$

L'égalité (2.4) *est exacte partout sauf aux points de discontinuité $x = 0$. En ces points, la somme de la série est égale à la moyenne arithmétique des limites de la fonction à gauche et à droite, c'est-à-dire à* 0.

Remarque. *Le développement précédent permet d'obtenir quelques formules de sommation. Ainsi, pour $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient :*

$$\boxed{\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}.}$$

2.5 Interprétation physique

Le théorème de Dirichlet montre que f est telle que

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

en tout point de continuité de f et donc f est décomposée en somme :
-d'un terme constant égale à la valeur moyenne de f sur une période,
- d'une infinité de termes sinusoidaux de périodes $T, T/2, \ldots, T/n, \ldots$
Le terme $u_1(x) = a_1 \cos(\omega x) + b_1 \sin(\omega x)$ est de période T, on l'appelle **fondamental**.
Le terme $u_n(x) = a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)$ de période T/n est appelé **l'harmonique de rang** n.
Posons $\omega_n = n\omega$. On a

$$\begin{aligned} u_n &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left[\frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \cos(\omega_n x) + \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}} \sin(\omega_n x) \right] \\ &= \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \left[\cos(\varphi_n) \cos(\omega_n x) + \sin\varphi_n \sin(\omega_n x). \right] \end{aligned}$$

Donc l'harmonique de rang n peut s'écrire sous la forme :

$$u_n = A_n \cos(\omega_n x - \varphi_n)$$

où

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \text{ et } \tan(\varphi_n) = \frac{b_n}{a_n}.$$

Définitions 2.5.1. *1. On dit que :*

*i. A_n est la **l'amplitude** de l'harmonique u_n.*

*ii. ω_n est la **pulsation** [a] de u_n.*

*iii. φ_n est la **phase** de u_n,*

*2. Le **spectre d'amplitude** de f est le diagramme en bâtons obtenu en représentant A_n en fonction de $\omega_n = \omega n$. De la même façon, on définit parfois le **spectre de phase** représentant φ_n en fonction de $\omega_n = n\omega$.*

[a]. En physique et en ingénierie, la pulsation ω est une caractéristique d'un phénomène périodique. Elle s'exprime en rad/s. Son utilisation, à la place de la fréquence, permet de simplifier les expressions mathématiques, notamment en analyse spectrale.

Remarque 2.5.2. *Le spectre d'amplitude et le spectre de phase caractérisent sans ambiguïté la fonction.*

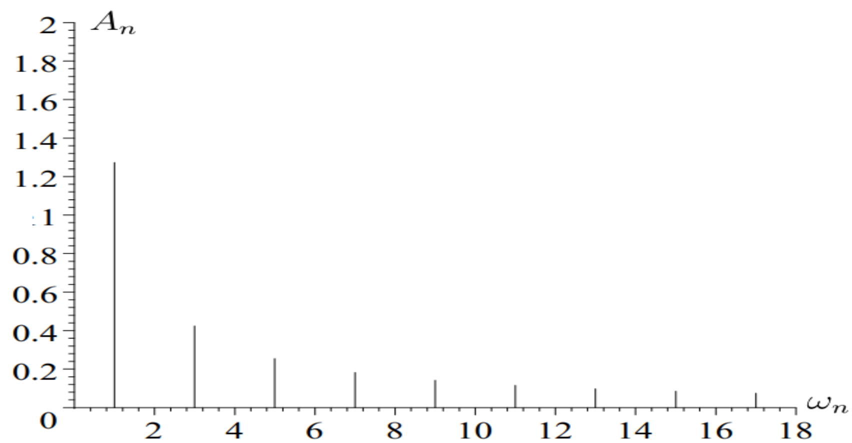
Exemple 2.5.3. *Dans l'exemple 2.4.3,* $(\omega = 1)$ *, pour chaque* $n = 1, 2, \ldots$ *on a*

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |b_n| = \begin{cases} 0, & n \text{ pair} \\ \frac{4}{n\pi}, & n \text{ impair.} \end{cases}$$

Donc on a les résultats suivants :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
A_n	$\frac{4}{\pi}$	0	$\frac{4}{3\pi}$	0	$\frac{4}{5\pi}$	0	$\frac{4}{7\pi}$	0	$\frac{4}{9\pi}$	0	$\frac{4}{11\pi}$	0	$\frac{4}{13\pi}$	...

Le spectre d'amplitude obtenu est comme ci-dessous :



2.6 Séries de Fourier complexes

Soit f une fonction périodique $(T = \frac{2\pi}{\omega})$ que l'on peut développer en série de Fourier :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right).$$

En tenant compte les formules d'Euler, on a

$$\cos(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2}, \ \sin(n\omega x) = \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2i} = -i\frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2},$$

on obtient,

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \frac{e^{in\omega x} + e^{-in\omega x}}{2} - ib_n \frac{e^{in\omega x} - e^{-in\omega x}}{2}) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{a_n - ib_n}{2} e^{in\omega x} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-in\omega x}).$$

Posons

$$c_0 = a_0, \ c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \ \text{ et } \ c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

On obtient

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n e^{in\omega x} + c_{-n} e^{-in\omega x}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x},$$

qui est la forme complexe de la série de Fourier.

Notons qu'on peut exprimer les coefficients c_n et c_{-n} par des intégrales. En effet, pour $n \neq 0$, on a

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{2}{T} \left\{ \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) \left[\cos(n\omega x) - i \sin(n\omega x)\right] dx \right\} \\ &= \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) e^{-in\omega x} dx \end{aligned}$$

De la même manière on a

$$c_{-n} = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) e^{in\omega x} dx.$$

On peut grouper les deux formules et l'expression de c_0 ci-dessus dans une même formule.

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x) e^{-in\omega x} dx \ \text{ pour } \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

En particulier, si f est 2π-périodique, alors $\omega = 1$ et donc l'expressions des coefficients dans ce cas est la suivante :

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \ \text{ pour } \ n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots \quad (\text{avec } \ \alpha = -\pi).$$

2.7 Égalité de Parseval

2.7.1 Égalité de Parseval -Théorème

Théorème 2.7.1. *Si f est une fonction réelle périodique de période T telle que*

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)),$$

alors

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(x)dx = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2), \tag{2.6}$$

*dite **égalité de Parseval**.*

En utilisant la forme complexe des séries de Fourier, on montre que l'égalité de Parseval s'écrit aussi :

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(x)dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \tag{2.7}$$

Pour une fonction à valeurs complexes, les formules (2.6) et (2.7) doivent être remplacées par :

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} |f(x)|^2 dx = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2). \tag{2.8}$$

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2. \tag{2.9}$$

2.7.2 Égalité de Parseval-Interprétation physique

Si f représente un signal périodique du temps,

$$E(f) = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(x)dx$$

représente le carré de la valeur efficace ou encore l'énergie du signal. La formule de Perseval peut donc s'interpréter en terme d'énergie :

$$E(f) = f_{moy}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} E(u_n).$$

En particulier, si $f_{moy} = 0$, l'énergie du signal est la somme des énergies des harmoniques.

2.8 Propriété des coefficients de Fourier

On considère les fonctions continues par morceaux sur le segment $]\alpha, \alpha + T[$, c'est-à-dire les fonctions dont les points de discontinuité de première espèce (c'est-à-dire avec une limite à droite et une limite à gauche) sont en nombre fini sur ce segment (ou qui y sont partout continues).

Théorème 2.8.1. *Si la fonction f est continue par morceaux sur le segment $]\alpha, \alpha + T[$, ses coefficients de Fourier tendent vers zéro lorsque $n \to +\infty$:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

En effet, si la fonction f est continue par morceaux sur le segment $]\alpha, \alpha+T[$, il en est de même pour f^2. Donc, l'intégrale $\int_\alpha^{\alpha+T} f^2(x)dx$ existe et est un nombre fini. L'égalité de Parseval (2.6) implique que la série $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$ converge, donc le terme général tend vers zéro : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2 + b_n^2 = 0$. Cette propriété s'étend à la forme complexe de la série de Fourier. On a

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} c_n = 0.}$$

3

Exercices

Exercice 1. *Calculer les coefficients de Fourier réels de la fonction f définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = cos^3(x)$.

Solution . On a

$$\begin{aligned}\cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 \\ &= \frac{1}{8}\left(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}\right). \\ &= \frac{1}{8}(2\cos(3x)+6\cos(x)) \\ &= \frac{3}{4}\cos(x)+\frac{1}{4}\cos(3x)\end{aligned}$$

Donc,

$$a_1 = \frac{3}{4} \text{ et } a_3 = \frac{1}{4},$$

et tous les autres coefficients de Fourier sont nuls.

Exercice 2.
1. *Calculer les coefficients de Fourier réels de la fonction f périodique de période* 2π *qui vaut* 1 *sur* $]0,\pi[$ *et* -1 *sur* $]-\pi,0[$.
2. *En déduire les sommes suivantes :*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} \; et \; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Solution . 1. La fonction f est périodique de période $T = 2\pi$. De plus, comme elle est impaire, tous les coefficients $a_n,\ n = 0, 1, \ldots$ sont nuls.
D'autre part, on a

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\sin(n\omega x)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)dx = -\frac{2}{n\pi}\Big[\cos(nx)\Big]_0^{\pi} = \frac{2}{n\pi}\Big[1-(-1)^n\Big].$$

Donc les $b_{2k}=0$, pour $k=1,2,\ldots$ et

$$b_{2k+1}=\frac{4}{(2k+1)\pi},\ \text{pour } k=0,2,\ldots.$$

D'où la série de Fourier associée à f est

$$\boxed{S_f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.}$$

La fonction f satisfait les hypothèses du théorème de Dirichlet, et la série S_f converge en tout x vers

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\notin\pi\mathbb{Z}\\ 0 & \text{si } x\in\pi\mathbb{Z}\end{cases}$$

(Les points de discontinuité de f sont de la forme $k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.)

2. En $\pi/2$, on a,

$$f(\pi/2)=1=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1},$$

d'où

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}.}$$

D'autre part, d'après l'égalité de Parseval, on a

$$\frac{1}{2}.\frac{16}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)^2dx=1,$$

d'où

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.}$$

Exercice 3. *Soit f la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x)=x^2$ si $|x|\leqslant\pi$.*

1. *Déterminer la série de Fourier de f.*
2. *Calculer $\int_{-\pi}^{\pi}x^4dx$. En déduire la valeur de $\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.*
3. *Montrer que $x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(nx)}{n^2}$. En déduire $\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ et $\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.*

Solution .

1. La fonction f est 2π-périodique ($\omega = 1$), en plus, il est facile de voir qu'elle est paire, de sorte que les coefficients b_n sont tous nuls, et que

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

D'autre part, pour $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos(nx)dx \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2\cos(nx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\left[x^2\frac{\sin(nx)}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x\frac{\sin(nx)}{n}\mathrm{d}x\right\} \\
&= -\frac{4}{\pi}\left\{\left[x\left(-\frac{\cos(nx)}{n^2}\right)\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n^2}\mathrm{d}x\right\} \\
&= \frac{4}{n^2\pi}\Big[(-1)^n\pi\Big] - \frac{4}{\pi n^3}\Big[\sin(nx)\Big]_0^{\pi} \\
&= 4\frac{(-1)^n}{n^2}.
\end{aligned}.$$

Donc la série de Fourier associée à f est

$$\boxed{S_f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(nx)}{n^2}.}$$

2. On a

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \Big[\frac{1}{5}x^5\Big]_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^5}{5}.$$

La fonction f est périodique de période $T = 2\pi$. D'après l'égalité de Parseval, on a

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(x)dx = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2),$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}.$$

Comme $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{\pi^4}{5}$, on en déduit que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.}$$

2. Puisque la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, le théorème de Dirichlet montre que la série S_f converge vers f en tout point $\mathbb{R}$, donc $f(x) = S_f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. D'où

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos(nx)}{n^2}.$$

D'après la question précédente, on a

$$\pi^2 = f(\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{et} \quad 0 = f(0) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

On en déduit que

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.}$$

Exercice 4. *Soit f une fonction 2π-périodique et continue par morceaux à valeurs réelles. Calculer en fonction des coefficients de Fourier réels de f, ceux des fonctions g et h définies par*

$$g(x) = f(x)\cos(x) \ \textit{ et } \ h(x) = f(x)\sin(x).$$

Solution . Si $n = 0$, alors on a

$$a_0(g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos x dx = a_1(f) \quad \text{et} \quad a_0(h) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin x dx = b_1(f).$$

Si $n = 1$, on obtient

$$a_1(h) = b_1(g) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos x \sin x dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(2x)dx = \frac{1}{2}b_2(f).$$

Si $n \geqslant 1$, on a successivement

$$\begin{aligned} a_n(g) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\cos(nx)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)(\cos(n+1)x + \cos(n-1)x)dx \\ &= \frac{1}{2}\left(a_{n+1}(f) + a_{n-1}(f)\right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_n(h) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\sin(nx)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)(\cos(n-1)x - \cos(n+1)x)dx \\ &= \frac{1}{2}\left(a_{n-1}(f) - a_{n+1}(f)\right). \end{aligned}$$

pour $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned} b_n(g) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos x\sin(nx)dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)(\sin(n+1)x + \sin(n-1)x)dx \\ &= \frac{1}{2}\left(b_{n+1}(f) + b_{n-1}(f)\right), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
a_n(h) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin x\cos(nx)dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)(\sin(n+1)x-\sin(n-1)x)dx \\
&= \frac{1}{2}\left(b_{n+1}(f)-b_{n-1}(f)\right).
\end{aligned}$$

Exercice 5. *1. Trouver les coefficients de Fourier réels des fonctions 2π-périodiques définies par*

$$f(x) = |\sin x| \textit{ et } g(x) = \sup(\sin x, 0).$$

2. En déduire les sommes suivantes :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1} \quad , \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2-1)^2}$$

Solution . 1. Puisque f est paire, alors, $b_n = 0$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$
D'autre part, on a

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(x)dx = -\frac{1}{\pi}\Big[\cos(x)\Big]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

Si $n \geqslant 1$, alors

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\cos(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\sin(n+1)x-\sin(n-1)x)dx \quad \Big(2\sin(b)\cos(a) = \sin(a+b)-\sin(a-b)\Big) \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1}+\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi} \\
&= -\frac{2}{\pi}\frac{1+(-1)^n}{n^2-1}.
\end{aligned}$$

On remarque que, $a_{2k+1} = 0$ pour tout $k = 0, 1, \ldots$ et que

$$a_{2k} = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{4k^2-1}.$$

D'où

$$\boxed{S_f(x) = \frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos(2kx).}$$

Concernant g, on remarque que

$$\frac{1}{2}\big(f(x)+\sin(x)\big) = \frac{1}{2}\big(|\sin(x)|+\sin(x)\big) = g(x).$$

Donc la série de Fourier S_g associée à g est

$$\boxed{S_g(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos(2kx).}$$

2. La série converge $S_f(x)$ pour tout x vers $f(x)$ car la fonction f est continue. En particulier,

$$f(0) = 0 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1},$$

donc,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}.}$$

D'autre part, on a

$$f(\pi/2) = 1 = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}(-1)^k,$$

d'où

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.}$$

Par l'égalité de Parseval, on a

$$a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f^2(x)dx$$

c'est-à-dire :

$$\frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{16}{\pi^2\left(4k^2-1\right)^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin^2(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1-\cos(2x)}{2}dx = \frac{1}{2},$$

d'où

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(4n^2-1\right)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.}$$

Exercice 6. *Soit P un polynôme pair de degré 4 vérifiant les conditions :*

$$P'(\pi) = 0, P'''(\pi) = 1, \int_0^{\pi} P(x)dx = 0.$$

1. *Déterminer les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique f, continue par morceaux qui coïncide avec P sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.*
2. *En déduire les sommes suivantes :*

$$S_1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \quad , \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4} \quad , \quad S_3 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^8}.$$

Solution . 1. Puisque f est paire, on a $b_n = 0$ pour tout $n = 1, 2, \ldots$
De plus, la troisième condition sur P implique que $a_0 = 0$. Pour $n \geqslant 1$, on a

$$a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} P(x)\cos(nx)dx.$$

En effectuant une intégration par parties plusieurs fois, et puisque $P^{(5)} = 0$, on obtient pour $n = 1, 2, \ldots$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left[P(x)\frac{\sin(nx)}{n} + P'(x)\frac{\cos(nx)}{n^2} - P''(x)\frac{\sin(nx)}{n^3} - P'''(x)\frac{\cos(nx)}{n^4} + P^{(4)}(x)\frac{\sin(nx)}{n^5}\right]_0^{\pi}.$$

Comme P est pair, les nombres $P'(0)$ et $P'''(0)$ sont nuls. Compte tenu des conditions posées sur P, on en déduit que

$$\boxed{a_n = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}.}$$

2. Comme f est continue sur $[-\pi, \pi]$ et possède des dérivées à gauche et à droite en tout point, elle est somme en tout point de sa série de Fourier, et donc, si x appartient à $[-\pi, \pi]$, on a

$$P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4}\cos(nx).$$

En particulier, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = -\frac{\pi}{2}P(\pi) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4} = -\frac{\pi}{2}P(0).$$

Il reste à déterminer le polynôme P.
Puisque $P'(\pi)$, $P'(-\pi)$, $P'(0)$ sont nuls et que P' est de degré 3, on a nécessairement

$$P'(x) = \lambda x\left(x^2 - \pi^2\right).$$

Donc,

$$P''(x) = 3\lambda x^2 - \lambda\pi^2 \quad \text{et} \quad P'''(x) = 6\lambda x.$$

Comme $P'''(\pi) = 1$, on déduit que

$$\lambda = \frac{1}{6\pi}.$$

Donc,

$$P(x) = \frac{1}{6\pi}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{\pi^2 x^2}{2}\right) + C.$$

On a alors :

$$0 = \int_0^{\pi} P(x)dx = \left[\frac{1}{6\pi}\left(\frac{x^5}{20} - \frac{\pi^2 x^3}{6}\right) + Cx\right]_0^{\pi} = \frac{1}{6\pi}\left(-\frac{7\pi^5}{60}\right) + \pi C.$$

D'où

$$C = \frac{7\pi^3}{360},$$

et donc
$$P(x) = \frac{1}{6\pi}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{\pi^2 x^2}{2} + \frac{7\pi^4}{60}\right).$$
On trouve donc
$$P(\pi) = -\frac{\pi^3}{45} \quad \text{et} \quad P(0) = \frac{7\pi^3}{360},$$
d'où
$$\boxed{S_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad \text{et} \quad S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} = -\frac{7\pi^4}{720}.}$$
On ce qui concerne S_3, on utilise l'égalité de Parseval,
$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 n^8} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} P(x)^2 dx.$$
On obtient donc,
$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{1}{36\pi^2}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{\pi^2 x^2}{2} + \frac{7\pi^4}{60}\right)^2 dx \\ &= \frac{1}{72\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{x^8}{16} - \frac{\pi^2 x^6}{4} + \frac{37\pi^4 x^4}{120} - \frac{7\pi^6 x^2}{60} + \frac{49\pi^8}{3600}\right) dx \\ &= \frac{\pi^8}{72}\left(\frac{1}{144} - \frac{1}{28} + \frac{37}{600} - \frac{7}{180} + \frac{49}{3600}\right) \\ &= \frac{\pi^8}{9450}. \end{aligned}.$$
$$\boxed{S_3 = \frac{\pi^8}{9450}.}$$

Exercice 7. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π-périodique continûment différentiable, et soit α un réel non nul. On considère l'équation différentielle*
$$x'(t) + \alpha x(t) = f(t).$$

1. *Trouver une solution 2π-périodique de cette équation en écrivant $x(t)$ et $f(t)$ sous la forme de séries de Fourier trigonométrique.*
2. *Appliquer ce résultat au cas où et $\alpha = 1$ et*
$$f(t) = \begin{cases} (t - \frac{\pi}{2})^2 & \text{si } t \in [0, \pi[\\ -\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{2} & \text{si } t \in [\pi, 2\pi[\end{cases}$$

Solution . 1. On écrit :
$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt) \quad \text{et} \quad x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos nt + B_n \sin nt),$$

puis en dérivant terme à terme,

$$x'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(nB_n \cos nt - nA_n \sin nt\right).$$

On a alors

$$x'(t) + \alpha x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(nB_n + \alpha A_n)\cos nt + (\alpha B_n - nA_n)\sin nt\right].$$

En identifiant les coefficients, on obtient :

$$\begin{cases} a_0 = \alpha A_0 \\ a_n = nB_n + \alpha A_n \\ b_n = \alpha B_n - nA_n \end{cases},$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} A_0 = \dfrac{a_0}{\alpha} \\ A_n = \dfrac{\alpha a_n - nb_n}{n^2 + \alpha^2} \\ B_n = \dfrac{na_n + \alpha b_n}{n^2 + \alpha^2}. \end{cases}$$

2. La fonction f proposée est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$. Calculons ses coefficients de Fourier. On a :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2 \mathrm{d}t + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\left[-\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{2}\right]\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{3}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^3\right]_0^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{3}\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)^3 + \frac{\pi^2}{2}t\right]_{\pi}^{2\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi}.0 + \frac{1}{2\pi}\left[0 + \frac{\pi^3}{2}\right] \\ &= \frac{\pi^2}{4}. \end{aligned}$$

Pour $n \geqslant 1$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\pi}^{2\pi}\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)^2\cos(nt)\mathrm{d}t &= \int_{\pi}^{2\pi}\left(t-\pi-\frac{\pi}{2}\right)^2\cos(nt)\mathrm{d}t \\ &= (-1)^n\int_0^{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2\cos(nt)\mathrm{d}t, \Big(\text{ changement de variable } u = t-\pi\Big) \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2\cos(nt)\mathrm{d}t + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\left[-\left(t-\frac{3\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi^2}{2}\right]\cos(nt)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1-(-1)^n}{\pi}\int_0^{\pi}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2\cos(nt)\mathrm{d}t + \frac{\pi}{2}\int_{\pi}^{2\pi}\cos(nt)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1-(-1)^n}{\pi}I_1 + \frac{\pi}{2}I_2, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\pi \left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2 \cos(nt)\mathrm{d}t \\
&= \left[\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^2 \frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi (2t-\pi)\frac{\sin(nt)}{n}\mathrm{d}t \\
&= \left[(2t-\pi)\frac{\cos(nt)}{n^2}\right]_0^\pi - 2\int_0^\pi \frac{\cos(nt)}{n^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{n^2}\Big((-1)^n+1\Big).
\end{aligned}$$

Donc,

$$\frac{1-(-1)^n}{\pi} I_1 = 0.$$

D'autre part, on a

$$I_2 = \int_\pi^{2\pi} \cos(nt)\mathrm{d}t = \left[\frac{\sin(nt)}{n}\right]_\pi^{2\pi} = 0.$$

D'où

$$a_n(f) = 0 \text{ pour tout } n \geqslant 1.$$

Remarque. *Puisque f est 2π-périodique, la fonction g définie sur $[0, 2\pi[$ par*

$$g(t) = f(t) - a_0 = f(t) - \frac{\pi^2}{4},$$

est impaire, donc $a_n(g) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$. D'où $a_n(f) = 0$ pour tout $n \geqslant 1$.

Par la même méthode de calcul des a_n , on démontre que

$$b_n(f) = \frac{-4\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n^3}.$$

Donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{cases} b_{2k} = 0, \\ b_{2k-1} = \dfrac{-8}{\pi(2k-1)^3}. \end{cases}$$

On obtient

$$\boxed{A_0 = \frac{\pi^2}{4},}$$

et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\boxed{A_{2k} = B_{2k} = 0,}$$

alors que

$$\boxed{\begin{aligned} A_{2k-1} &= \frac{8}{\pi(2k-1)^2\left((2k-1)^2+1\right)} \\ \text{et} \quad B_{2k-1} &= \frac{-8}{\pi(2k-1)^3\left((2k-1)^2+1\right)}. \end{aligned}}$$

Finalement, il est facile de voir que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (nB_n \cos nt - nA_n \sin nt)$$

est uniformément convergente, et que par conséquent la série

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nt + B_n \sin nt)$$

qui est aussi uniformément convergente, a pour somme une fonction $x(t)$ continûment dérivable sur $\mathbb{R}$, qui est solution de l'équation différentielle donnée.

Exercice 8. 1. *Vérifier que pour tout* $a, x \in \mathbb{R}$ *on a :*

- $2\cos(x) - 2a = (1 - ae^{-ix})e^{ix} + (1 - ae^{ix})e^{-ix}$.
- $1 - 2a\cos(x) + a^2 = (1 - ae^{ix})(1 - ae^{-ix})$.

2. *Déduire la décomposition en éléments simples suivante :*

$$\frac{2\cos x - 2a}{1 - 2a\cos x + a^2} = \frac{e^{ix}}{1 - ae^{ix}} + \frac{e^{-ix}}{1 - ae^{-ix}},$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $|a| \neq 1$.

3. *Soit* f *la fonction définie sur* $D = \{a \in \mathbb{R} : \ |a| \neq 1\} \times \mathbb{R}$ *par*

$$f(a, x) = \ln(1 - 2a\cos x + a^2).$$

   i. *Pour* x *fixé, trouver le développement en série entière de la dérivée partielle de* f *par rapport à* a.

   ii. *En déduire la série de Fourier de la fonction qui à* x *associe* $f(a, x)$ *pour* a *fixé distinct de* 1 *et* -1.

Solution . 1. • D'après la relation

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

on a,

$$\begin{aligned} 2\cos(x) - 2a &= e^{ix} - a + e^{-ix} - a \\ &= (1 - ae^{-ix})e^{ix} + (1 - ae^{ix})e^{-ix}. \end{aligned}$$

• Il suffit de développer $(1 - ae^{ix})(1 - ae^{-ix})$.

2. D'après ce qui précède, on a

$$\begin{aligned} \frac{2\cos x - 2a}{1 - 2a\cos x + a^2} &= \frac{(1 - ae^{-ix})e^{ix} + (1 - ae^{ix})e^{-ix}}{(1 - ae^{ix})(1 - ae^{-ix})} \\ &= \frac{(1 - ae^{-ix})e^{ix}}{(1 - ae^{ix})(1 - ae^{-ix})} + \frac{(1 - ae^{ix})e^{-ix}}{(1 - ae^{ix})(1 - ae^{-ix})} \\ &= \frac{e^{ix}}{1 - ae^{ix}} + \frac{e^{-ix}}{1 - ae^{-ix}}. \end{aligned}$$

3. i. Pour x fixé, on remarque que f est bien définie sur D et si on dérive par rapport à a, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,x) = \frac{-2\cos x + 2a}{1 - 2a\cos x + a^2} = -\frac{2\cos x - 2a}{1 - 2a\cos x + a^2}.$$

D'après la question (2), on a la décomposition en éléments simples suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a,x) = -\left(\frac{e^{ix}}{1 - ae^{ix}} + \frac{e^{-ix}}{1 - ae^{-ix}}\right).$$

On rappelle que la somme de termes successifs d'une suite géométrique de terme initial 1 et de raison $q \neq 1$ est donnée par la formule

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Et si $|q| < 1$, alors la suite (S_n) converge vers

$$S = \frac{1}{1 - q}.$$

Donc, si $|a| < 1$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial a}(a,x) &= -\left(e^{ix}\sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{inx} + e^{-ix}\sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-inx}\right)\\
&= -\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{i(n+1)x} + \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-i(n+1)x}\right)\\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} a^n \left(e^{i(n+1)x} + e^{-i(n+1)x}\right)\\
&= -2\sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos((n+1)x)\\
&= -2\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}\cos(nx).
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial a}(a,x) = -2\sum_{n=1}^{\infty} a^{n-1}\cos(nx).}$$

ii. En intégrant la série précédente, et puisque $f(0,x) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
f(a,x) = f(a,x) - f(0,x) &= \int_0^a \frac{\partial f(t,x)}{\partial t} dt\\
&= -2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^a t^{n-1}\cos(nx) dt\\
&= -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n}\cos(nx).
\end{aligned}$$

Mais comme

$$\left|\frac{a^n}{n}\cos(nx)\right| \leqslant \frac{|a|^n}{n},$$

et la convergence de cette série est normal si $|a| < 1$, on obtient dans ce cas la série de Fourier de la fonction qui à x associe $f(x, a)$ pour a fixé.
Si maintenant $|a| > 1$, alors $\frac{1}{|a|} < 1$. En plus, on a

$$\begin{aligned} f(a, x) &= \ln(1 - 2a\cos(x) + a^2) \\ &= \ln(a^2(\frac{1}{a^2} - 2\frac{1}{a}\cos(x) + 1)) \\ &= 2\ln|a| + \ln(\frac{1}{a^2} - 2\frac{1}{a}\cos(x) + 1) \\ &= 2\ln|a| + f(1/a, x) \\ &= 2\ln|a| - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{-n}}{n}\cos(nx). \end{aligned}$$

Exercice 9. *Soit a un nombre réel non nul. Calculer les coefficients de Fourier réels des fonctions 2π-périodiques et continues par morceaux définies ci-dessous.*

$$f_a(x) = e^{ax} \textit{ sur } [0, 2\pi[,$$

$$g_a(x) = e^{ax} \textit{ sur } [0, \pi[\textit{ et paire },$$

$$h_a(x) = e^{ax} \textit{ sur }]0, \pi[\textit{ et impaire }.$$

Solution . On a

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f_a(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ax}dx = \frac{e^{2\pi a} - 1}{2\pi a}$$

Pour $n \geqslant 1$, il est plus facile de calculer les intégrales en passant par les nombres complexes.

$$\begin{aligned} a_n(f_a) + ib_n(f_a) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{ax}(\cos(nx) + i\sin(nx))dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} e^{ax}e^{inx}dx \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{e^{(a+in)x}}{a + in}\right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{e^{2a\pi} - 1}{a + in} \\ &= \frac{1}{\pi}\frac{e^{2a\pi} - 1}{a^2 + n^2}(a - in). \end{aligned}$$

Alors,

$$a_n(f_a) = \frac{a}{\pi}\frac{e^{2a\pi} - 1}{a^2 + n^2} \quad \text{et} \quad b_n(f_a) = -\frac{n}{\pi}\frac{e^{2a\pi} - 1}{a^2 + n^2}.$$

D'où la série de Fourier associée f_a est

$$\boxed{S_{f_a}(x) = \frac{e^{2a\pi} - 1}{\pi}\left(\frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a\cos(nx) - n\sin(nx)}{a^2 + n^2}\right).}$$

De même, puisque g_a est paire, on a

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} g_a(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{ax}dx = \frac{e^{a\pi}-1}{\pi a},$$

et pour n$\geqslant$ 1, on a

$$\begin{aligned} a_n(g_a) + ib_n(g_a) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{ax}(\cos(nx) + i\sin(nx))dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} e^{ax}e^{inx}dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{e^{(a+in)x}}{a+in}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n e^{a\pi}-1}{a+in} \\ &= \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n e^{a\pi}-1}{a^2+n^2}(a-in). \end{aligned}$$

$$\boxed{a_n(g_a) + ib_n(g_a) = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n e^{a\pi}-1}{a^2+n^2}(a-in). \qquad (3.1)}$$

Comme la fonction g_a est paire, on a $b_n(g_a) = 0$, et

$$a_n(g_a) = \frac{2a}{\pi}\frac{(-1)^n e^{a\pi}-1}{a^2+n^2}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{S_{g_a}(x) = \frac{2a}{\pi}\left(\frac{e^{a\pi}-1}{2a^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n e^{a\pi}-1}{a^2+n^2}\cos(nx)\right).}$$

Puisque h_a est impaire, on a $a_n(h_a) = 0$ pour tout $n = 0, 1, \ldots$ et d'après l'égalité (3.1), on a

$$b_n(h_a) = -\frac{2n}{\pi}\frac{(-1)^n e^{a\pi}-1}{a^2+n^2} \quad \text{pour tout } n = 1, 2, \ldots.$$

D'où

$$\boxed{S_{h_a}(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\left((-1)^n e^{a\pi}-1\right)}{a^2+n^2}\sin(nx).}$$

Exercice 10. *Soient a un réel tel que $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ et f une fonction 2π-périodique continue par morceaux à valeurs réelles définie sur $[-\pi, \pi]$, par*

$$f(x) = \cos(ax).$$

1. *Déterminer les coefficients de Fourier réels de f.*
2. *En déduire que si t n'est pas multiple de π, on a*

$$\operatorname{cotan} t = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}.$$

Solution . $1:$ La fonction f est continue et admet en tout point une dérivée à gauche et à droite. Elle sera donc la somme de sa série de Fourier.

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) \Big).$$

Les coefficients b_n sont nuls car la fonction f est paire. D'autre part, on a

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} f(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(ax)dx = \frac{\sin(a\pi)}{a\pi},$$

et si $n > 0$, on a

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(ax)\cos(nx)dx \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\cos(a+n)x + \cos(a-n)x)dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(a+n)x}{a+n} + \frac{\sin(a-n)x}{a-n} \right]_0^{\pi} \ \Big((a+n)(a-n) \neq 0 \text{ car } a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \Big) \\
&= \frac{(-1)^n \sin(a\pi)}{\pi} \left(\frac{1}{a+n} + \frac{1}{a-n} \right) \\
&= \frac{2a(-1)^n \sin(a\pi)}{\pi\,(a^2 - n^2)}.
\end{aligned}$$

Alors, pour tout réel x, on a

$$\boxed{f(x) = \frac{\sin(a\pi)}{a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a(-1)^n \sin(a\pi)}{\pi\,(a^2-n^2)} \cos(nx).}$$

2. Pour $x = \pi$, on a

$$f(\pi) = \cos(a\pi) = \frac{\sin(a\pi)}{a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a \sin(a\pi)}{\pi\,(a^2-n^2)}. \tag{3.2}$$

Supposons t n'est pas un multiple de π, donc $a = \frac{t}{\pi} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$. Puisque $t = a\pi$, en divisant les deux côtés de l'égalité (3.2) par $\sin(a\pi)$, on obtient

$$\boxed{\operatorname{cotan} t = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2t}{t^2 - n^2\pi^2}.}$$

Exercice 11. *Soit f une fonction 2π-périodique continue par morceaux. Pour tout entier p, on pose*

$$f_p(x) = f(px).$$

1. *Déterminer les coefficients de Fourier complexes $c_n(f_p)$ de f_p en fonction de ceux de f lorsque p divise n.*
2. *Lorsque p ne divise pas n, montrer que $c_n(f_p)$ est nul,*
   - *(i) en utilisant l'égalité de Parseval ;*
   - *(ii) par un calcul direct.*

Solution . 1. Par un changement de variable $u = px$

$$c_n(f_p) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(px)e^{-inx}dx = \frac{1}{2p\pi}\int_0^{2p\pi} f(u)e^{-inu/p}du.$$

Si p divise n, alors la fonction $n \mapsto f(u)e^{-inu/p}$ est 2π périodique, et donc

$$\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(u)e^{-inu/p}du = \int_0^{2\pi} f(u)e^{-inu/p}du \text{ pour tout } k = 0, 1, \ldots$$

D'où

$$\begin{aligned}
c_n(f_p) &= \frac{1}{2p\pi}\int_0^{2p\pi} f(u)e^{-inu/p}du \\
&= \frac{1}{2p\pi}\left[\sum_{k=0}^{p-1}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} f(u)e^{-inu/p}du\right] \\
&= \frac{1}{2p\pi}\left[p\int_0^{2\pi} f(u)e^{-inu/p}du\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(u)e^{-inu/p}du \\
&= c_{n/p}(f).
\end{aligned}$$

2. (i) D'après la formule de Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f_p)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(px)|^2 dx.$$

Par le changement de variable $u = px$, on a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f_p)|^2 = \frac{1}{2p\pi}\int_0^{2p\pi} |f(u)|^2 du.$$

La périodicité de f implique que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f_p)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(u)|^2 du,$$

et enfin, de nouveau d'après la formule de Parseval appliquée à f, on a

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f_p)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2.$$

Mais,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f_p)|^2 = \sum_{n=kp} |c_n(f_p)|^2 + \sum_{n\neq kp} |c_n(f_p)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 + \sum_{n\neq kp} |c_n(f_p)|^2.$$

Il en résulte que

$$\sum_{n\neq kp} |c_n(f_p)|^2 = 0.$$

Donc, $c_n(f_p)$ est nul lorsque p ne divise pas n.

(ii) En effectuant le changement de variable $u = t + 2\pi$, on obtient

$$c_n(f_p) = \frac{1}{2p\pi}\int_0^{2p\pi} f(u)e^{-inu/p}du = \frac{e^{-2in\pi/p}}{2p\pi}\int_{-2\pi}^{2(p-1)\pi} f(t)e^{-int/p}dt = e^{-2in\pi/p}c_n(f_p),$$

car la fonction qui à t associe $f(t)e^{-int/p}$ est $2p\pi$-périodique. Si p ne divise pas n, alors $\frac{n}{p} \notin \mathbb{N}$ et donc $e^{-2in\pi/p}$ est différent de 1. D'où $c_n\left(f_p\right)$ est nul.

Exercice 12. *Soit $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R non nul et à coefficients réels. Soit r tel que $0 < r < R$.*

1. *Trouver les coefficients de Fourier complexes de la fonction f_r définie par*

$$f_r(x) = S(re^{ix}).$$

2. *Trouver les coefficients réels de* $\operatorname{Re} f_r$ *et* $\operatorname{Im} f_r$.

3. *Application : Soit r dans $[0, 1[$. Trouver les coefficients de Fourier réels de la fonction g_r définie par*

$$g_r(x) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos x + r^2}.$$

Solution . 1. On a

$$f_r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n e^{inx},$$

et cette série converge uniformément en x puisque la série entière converge uniformément sur le disque de centre 0 et de rayon r. Donc, on peut permuter intégrale et série, ce qui donne

$$c_n\left(f_r\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k r^k e^{ikx} e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{2\pi} \alpha_k r^k e^{i(k-n)x} dx.$$

Puisque

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)} = \begin{cases} 2\pi & \text{si } k = n \\ 0 & \text{si } k \neq n \end{cases},$$

on a

$$c_n\left(f_r\right) = \begin{cases} \alpha_n r^n & \text{si } n \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } n < 0 \end{cases}.$$

2. De même, pour

$$\operatorname{Re} f_r(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n \cos nx,$$

on obtient

$$a_n\left(\operatorname{Re} f_r\right) = \begin{cases} \alpha_n r^n & \text{si } n > 0 \\ \alpha_0 & \text{si } n = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad b_n\left(\operatorname{Re} f_r\right) = 0\ .$$

D'autre part, pour

$$\operatorname{Im} f_r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n r^n \sin nx,$$

on obtient

$$b_n\left(\operatorname{Im} f_r\right) = \alpha_n r^n \quad \text{et} \quad a_n\left(\operatorname{Im} f_r\right) = 0.$$

3. Application : Pour $r \in [0,1[$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{1+re^{ix}}{1-re^{ix}} &= \frac{1+r\cos(x)+ir\sin(x)}{1-r\cos(x)-ir\sin(x)} \\
&= \frac{(1+r\cos(x)+ir\sin(x))(1-r\cos(x)+ir\sin(x))}{(1-r\cos(x)-ir\sin(x))(1-r\cos(x)+ir\sin(x))} \\
&= \frac{(1+ir\sin(x))^2-r^2\cos^2(x)}{(1-r\cos(x))^2+r^2\sin^2(x)} \\
&= \frac{1-r^2+i2r\sin(x)}{1-2r\cos(x)+r^2}.
\end{aligned}$$

Donc

$$g_r(x) = \operatorname{Re}\frac{1+re^{ix}}{1-re^{ix}} = \operatorname{Re}\left(S\left(re^{ix}\right)\right)$$

où

$$S(z) = \frac{1+z}{1-z} = 1 + \frac{2z}{1-z} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

est une série entière de rayon 1. Donc $a_0\left(g_r\right) = 1$ et si $n > 0$, on a

$$a_n\left(g_r\right) = 2r^n \quad \text{et} \quad b_n\left(g_r\right) = 0,$$

(car $\alpha_0 = 1$ et $\alpha_n = 2$ pour $n > 0$.)

4

Le phénomène de Gibbs

4.1 Rappels

4.1.1 Séries alternées

Définition

On appelle **série alternée** une série de la forme $\sum(-1)^n u_n$ avec $u_n \geqslant 0$.

Théorème des séries alternées

Soit (u_n) une **suite réelle décroissante, positive et qui tend vers** 0. Si

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k,$$

alors la série $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u_k$ converge. De plus,

i. Les suites extraites paires et impaires (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes de même limite

$$S = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k u_k.$$

ii. Le reste $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k u_k$ est du signe de son premier terme et lui est inférieur en valeur absolue, soit

$$\mathrm{signe}\,(R_n) = (-1)^{n+1} \quad \text{et} \quad |R_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k\right| \leqslant u_{n+1}.$$

L'étude de séries alternées est fréquente dans les sujets de concours. Pour étudier une série alternée $\sum(-1)^n u_n$, le premier réflexe à avoir est de tester si la série converge absolument.

Proposition

Si $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum(-1)^n u_n$ est absolument convergente, donc convergente.

4.1.2 La transformation d'Abel

La transformation d'Abel est une transformation que l'on effectue sur certaines séries, en particulier trigonométriques, en vue de prouver leur convergence. C'est l'analogue de l'intégration par parties pour les intégrales impropres, et elle s'emploie pour les séries de terme général du type $\frac{\sin(t)}{n}$, $\frac{e^{in\theta}}{n}$ par exemple. Elle consiste en la procédure suivante. Si $u_k = a_k b_k$, on pose $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, ce qui donne aussi $a_k = A_k - A_{k-1}$. La transformation d'Abel consiste alors à écrire :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1})\, b_k = a_0 b_0 - A_0 b_1 + A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k\,(b_k - b_{k+1})\,.$$

Théorème

Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres complexes vérifiant les propriétés suivantes :

i. La suite (A_n) définie par $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ est bornée.

ii. La série $\sum_{k=0}^{+\infty} |b_k - b_{k+1}|$ est convergente.

iii. La suite (b_n) tend vers 0.

Alors la suite $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ est convergente.

4.1.3 Théorème de la convergence dominée pour les fonctions Riemann-intégrables

Théorème

Soit $a < b$ et soit (f_n) une suite de fonctions intégrables au sens de Riemann (R-intégrables) sur $[a, b]$, convergeant simplement vers une fonction f :

$$\forall x \in]a, b[\quad \lim f_n(x) = f(x).$$

On suppose que la convergence est dominée (ou plutôt, «bornée») :

$$\exists \mathrm{C} \quad \forall n \geqslant 1 \ \forall x \in]a, b[\quad |f_n(x)| \leqslant \mathrm{C}\ .$$

Alors, $\lim \int_a^b f_n(x)dx$ existe et, si f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$, alors

$$\lim \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Corollaire (Convergence dominée)

Si les f_n et f sont R-intégrables sur tous les $[a+\eta, b]$, $\eta > 0$, et si

$$\forall x \in]a, b\,[,\ \lim f_n(x) = f(x) \quad \text{et} \quad \forall n \geqslant 1\ \forall x \in]\,a, b\,[,\quad |f_n(x)| \leqslant g(x)$$

avec g est $R-$intégrable sur tous les $[a+\eta, b]$ et telle que l'intégrale généralisée $\int_a^b g(x)dx$ existe, alors les intégrales (de Riemann) généralisées $\int_a^b f_n(x)dx$ et $\int_a^b f(x)dx$ existent et

$$\lim \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Même énoncé avec des intégrales du type

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{A \to +\infty} \int_a^A f(x)dx.$$

4.1.4 Séries entières

Définition

• On appelle **série entière** une série du type

$$\sum a_n z^n,$$

où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels ou complexes, et z désigne une variable complexe.
• La **somme** est la fonction qui à tout complexe z tel que $\sum a_n z^n$, converge, associe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Les deux exemples de base de séries entières sont la série géométrique et la série exponentielle.
Série géométrique :

$$\forall z, |z| < 1, \quad \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n = 1 + z + \cdots + z^n + \cdots$$

Série exponentielle :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

Si r est un réel positif, on note D_r le disque ouvert de centre 0 et de rayon r.

$$D_r = \{z \in \mathbb{C}, |z| < r\}.$$

Théorème

Soit r un réel strictement positif. S'il existe M tel que pour tout n, on a $|a_n|r^n < M$, alors pour tout $z \in D_r$, la série entière $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Définitions (Rayon et disque de convergence d'une série entière.)

• On appelle **rayon de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$ le réel R défini par :

$$R = \sup\left\{r \geqslant 0, \left(|a_n|\, r^n\right) \text{ est bornée }\right\}.$$

• Le disque D_R est appelé **disque de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$.

Exemple : Pour tout réel α, la série

$$\sum n^\alpha z^n$$

a pour rayon de convergence $R = 1$. En effet, $n^\alpha r^r$ tend vers 0 pour $r < 1$, et vers $+\infty$ pour $r > 1$. La série entière $\sum n^\alpha z^n$ converge pour $|z| < 1$, diverge pour $|z| > 1$.
Considérons maintenant un nombre complexe z de module 1 : $z = e^{i\theta}$.

- Si $\alpha \geqslant 1$, la série $\sum n^\alpha e^{in\theta}$ diverge.
- Si $\alpha < -1$, la série $\sum n^\alpha e^{in\theta}$ est absolument convergente.

4.2 Problème

Extrait du concours commun polytechnique, session 2010, Filière MP

1.
   (a) Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, \pi]$.

   (b) On pose

   $$I = \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{t}.$$

   Rappeler le développement en série entière en 0 de la fonction sinus et déterminer, une suite $(u_k)_{k\geqslant 0}$ vérifiant

   $$I = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k u_k.$$

2. (a) Démontrer que la suite $\left(\frac{\pi^n}{n\,!}\right)_{n\geqslant 0}$ converge et que la suite $\left(\frac{\pi^n}{n.n\,!}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

   (b) Si $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k u_k$, majorer $|R_n|$, en utilisant la question (a).

   (c) En déduire, en précisant la valeur de n utilisée, une valeur approchée du réel $\frac{2}{\pi}I$ à 10^{-2} près.

3. Soit f la fonction impaire et 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

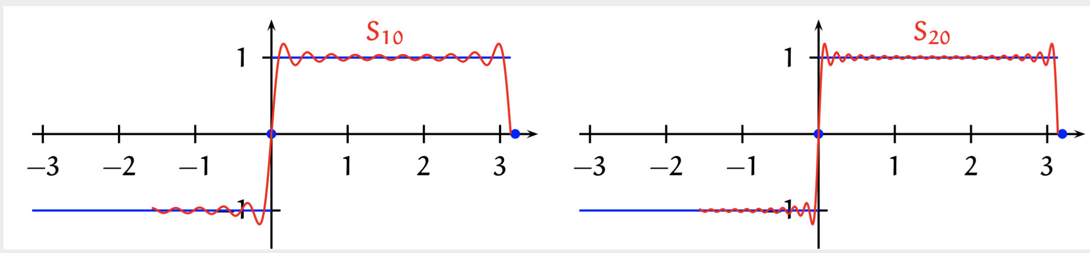
$$f(t) = 1 \text{ pour } t \in]0, \pi[\text{ et } f(0) = f(\pi) = 0.$$

On pose pour tout entier naturel n non nul et t réel,

$$S_n(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin[(2k+1)t]}{2k+1}.$$

(a) Démontrer, à l'aide d'une série de Fourier, que la suite de fonctions $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement vers la fonction f sur $\mathbb{R}$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

(b) Ci-dessous, dans chaque graphique, on trace sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$ la courbe de la fonction f et l'allure de la fonction S_n, avec $n = 10$ puis $n = 20$.



Que constate-t-on sur les courbes des fonctions S_n lorsque t se rapproche de 0 par valeurs supérieures ou par valeurs inférieures ?
Cette particularité est appelée **phénomène de Gibbs.**

4. Pour un entier naturel non nul n et un réel t , on pose

$$T_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \sin[(2k+1)t].$$

(a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$,

$$T_n(t) = \frac{\sin^2(nt)}{\sin(t)}.$$

Dans la suite de cette question, on considère deux nombres a et b tels que $a < b$ et $[a, b] \subset]0, \frac{\pi}{2}[$.

(b) Justifier qu'il existe une constante M telle que pour tout entier naturel non nul n et tout $t \in [a, b]$, on a $T_n(t) \leqslant M$.

(c) Démontrer que l'on peut trouver une suite réelle (ω_n) convergeant vers 0 et telle que pour tout entier naturel n non nul et tout $t \in [a, b]$, $|f(t) - S_n(t)|| \leqslant \omega_n$.
En commençant par observer que $\sin[(2k+1)t] = T_{k+1}(t) - T_k(t)$, on pourra chercher à majorer, pour tout couple (n, p) d'entiers naturels non nuls et tout $t \in [a, b]$, l'expression $|S_{n+p}(t) - S_n(t)|$.
Que peut-on en déduire concernant la série de Fourier de la fonction ?

5. (a) Calculer $S'_n(t)$ pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et déterminer la plus petite valeur α_n qui annule $S'_n(t)$ sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

(b) Démontrer que, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et n entier naturel non nul,

$$S_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin(2nt)}{\sin t}\,\mathrm{d}t \text{ puis que } S_n(\alpha_n) = \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi \frac{\sin u}{\sin \frac{u}{2n}}\mathrm{d}u.$$

(c) Démontrer que la suite $\Big(S_n(\alpha_n)\Big)_{n\geqslant 1}$ converge et préciser sa limite.

On pourra utiliser sans démonstration : pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin\theta \geqslant \frac{2\theta}{\pi}$.

6. Démontrer que la suite $\Big(\sup\limits_{x\in]0,\frac{\pi}{2}[} |S_n(t) - f(t)|\Big)_n$ ne converge pas vers 0.

Solution. 1 : (a) La fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est continue sur $]0,\pi]$ et $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{\sin t}{t} = 1$. Donc, la fonction f est prolongeable par continuité en 0. Par conséquent, cette fonction est intégrable sur $]0,\pi]$. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(0) = 1$ et pour $t \neq 0, g(t) = \frac{\sin t}{t}$.

(b) On sait que pour tout réel t, on a

$$\sin(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

donc, pour tout réel $t \neq 0$, on a

$$g(t) = \frac{\sin t}{t} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!},$$

ce qui reste vrai pour $t = 0$. Donc, la fonction g est développable en série entière sur $\mathbb{R}$. On sait alors que pour tout réel $r > 0$, la série entière de somme g converge uniformément vers la fonction g sur le segment $[-r, r]$. En particulier, la série de fonctions de terme général $t \mapsto (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!}$, $k \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers g sur $[0,\pi]$ et d'autre part chacune de ces fonctions est continue sur ce segment. D'après le théorème d'intégration terme à terme sur un segment, on peut écrire

$$\begin{aligned} I = \int_0^\pi g(t)dt &= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \int_0^\pi \frac{t^{2k}}{(2k+1)!}dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)\times(2k+1)!}. \end{aligned}$$

2. (a) On peut démontrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi^n}{n!} = 0$ par plusieurs méthodes. Par exemple, vu que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\pi^k}{k!} \longrightarrow e^\pi, \text{ quand } n \to +\infty$$

on a , $\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi^n}{n!} = 0$.

On peut aussi suivre la méthode suivante : Pour $n > 4$, on voit facilement que

$$\begin{aligned} 0 < \frac{\pi^n}{n!} &= \frac{\pi^n}{4!\times 5\times 6\times\ldots\times n} \\ &\leqslant \frac{\pi^n}{4!\times 4^{n-4}} \\ &= \Big(\frac{\pi}{4}\Big)^n.\frac{4^4}{4!} \end{aligned}$$

Puisque $\pi < 4$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\pi}{4}\right)^n = 0$ et donc $\lim_{n\to+\infty}\frac{\pi^n}{n!} = 0$.
(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $v_n = \frac{\pi^n}{n\times n!} > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} - 1 = \frac{\frac{\pi^{n+1}}{(n+1)\times(n+1)!}}{\frac{\pi^n}{n\times n!}} - 1 = \frac{n\pi}{(n+1)^2} - 1 = \frac{-n^2+(\pi-2)n-1}{(n+1)^2} < \frac{-n^2+2n-1}{(n+1)^2} = -\frac{(n-1)^2}{(n+1)^2} \leqslant 0.$$

Donc, $v_{n+1} < v_n$ et la suite $\left(\frac{\pi^n}{n\times n!}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.
(b) Soit

$$u_k = \frac{\pi^{2k+1}}{(2k+1)\times(2k+1)!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

D'après la question précédente, $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de limite nulle ou encore la suite $((-1)^k u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est alternée en signe et la valeur absolue du son terme général tend vers 0 en décroissant. D'après le théorème des séries alternées, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|R_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k u_k\right| \leqslant \left|(-1)^{n+1}u_{n+1}\right| = \frac{\pi^{2n+3}}{(2n+3)\times(2n+3)!}.$$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\left|\frac{2}{\pi}\mathrm{I} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k\right| = \frac{2}{\pi}|R_n| \leqslant \frac{2\pi^{2n+2}}{(2n+3)\times(2n+3)!}.$$

Pour $n = 4$, on a

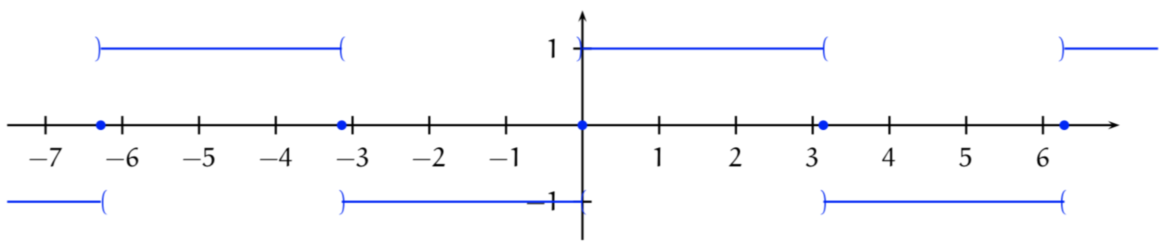
$$\frac{2\pi^{2n+2}}{(2n+3)\times(2n+3)!} = 0,0004\ldots < \frac{10^{-2}}{2},$$

et donc une valeur approchée à $\frac{10^{-2}}{2}$ près de $\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{4}(-1)^k u_k$ est une valeur approchée à 10^{-2} près de $\frac{2}{\pi}I$.
La machine fournit

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{4}(-1)^k u_k = 2\sum_{k=0}^{4}(-1)^k\frac{\pi^{2k}}{(2k+1)\times(2k+1)!} = 2\left(1 - \frac{\pi^2}{3\times 3!} + \frac{\pi^4}{5\times 5!} - \frac{\pi^6}{7\times 7!} + \frac{\pi^8}{9\times 9!}\right) = 1,179\ldots$$

$$\boxed{\frac{2}{\pi}\mathrm{I} \approx 1,8 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}}$$

3. (a) Cette fonction est celle définie en 0 et π est étudiée dans l'exercice 2.
La fonction f est 2π-périodique, de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f(x) = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$, en tout réel x. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier associée à f converge simplement vers f sur $\mathbb{R}$.



De plus, puisque f est impaire, alors $a_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin(nt)\mathrm{dt} = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(nt)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2\,(1-(-1)^n)}{n\pi}.$$

Par suite, pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a $b_{2k} = 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$b_{2k+1}(f) = \frac{4}{(2k+1)\pi}.$$

Donc, la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction f sur $\mathbb{R}$.
La suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$ car chaque fonction S_n est continue sur $\mathbb{R}$ mais la fonction f ne l'est pas.
(b) On constate que les courbes représentatives des fonctions S_n, pour n grand, sont presque verticales au voisinage de $t = 0$ ce qui indique un saut pour la fonction limite.

4. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned}
\sin t \times T_n(t) &= \sum_{k=0}^{n-1}(\sin t)(\sin((2k+1)t)) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(\cos(2kt) - \cos((2k+2)t)) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(\cos(2kt) - \cos(2(k+1)t)) \\
&= \frac{1}{2}(\cos(0) - \cos(2nt))(\text{ somme télescopique}) \\
&= \frac{1}{2}(1 - \cos(2nt)) \\
&= \sin^2(nt).
\end{aligned}$$

Puisque $\sin(t) \neq 0$, $T_n(t) = \frac{\sin^2(nt)}{\sin(t)}$. D'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z},\ \ T_n(t) = \frac{\sin^2(nt)}{\sin(t)}}$$

(b) Il est clair que la fonction $t \mapsto \sin(t)$ est croissante sur $[a, b] \subset]0, \pi/2[$, donc pour tout $t \in [a, b]$, on a $0 < \sin(a) \leqslant \sin(t)$. D'où, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall t \in [a, b]$,

$$T_n(t) = \frac{\sin^2(nt)}{\sin(t)} \leqslant \frac{1}{\sin(t)} \leqslant \frac{1}{\sin(a)}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ \forall t \in [a, b],\ T_n(t) \leqslant \frac{1}{\sin(a)}.}$$

$\Big($On prend $M = \frac{1}{\sin(a)}\Big)$.
Remarque : On peut démontrer, pour t fixé, que la suite $(S_n(t))_n$ converge en utilisant la transformation d'Abel, avec $A_n = T_{n+1}(t)$, $a_n = \sin((2+1)t)$ et $b_n = \frac{1}{2n+1}$.

(c) Soient $n \geqslant 1$, $p \geqslant 2$ et $t \in [a,b]$. Vu que $T_{k+1}(t) - T_k(t) = \sin((2k+1)t)$, une transformation d'Abel fournit :

$$\begin{aligned}
|S_{n+p}(t) - S_n(t)| &= \frac{4}{\pi}\left|\sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{2k+1}\left(T_{k+1}(t) - T_k(t)\right)\right| \\
&= \frac{4}{\pi}\left|\sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{2k+1} T_{k+1}(t) - \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{2k+1} T_k(t)\right| \\
&= \frac{4}{\pi}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2k-1} T_k(t) - \sum_{k=n}^{n+p-1} \frac{1}{2k+1} T_k(t)\right| \\
&= \frac{4}{\pi}\left|\frac{1}{2(n+p)-1} T_{n+p}(t) + \sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right) T_k(t) - \frac{1}{2n+1} T_n(t)\right| \\
&\leqslant \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2(n+p)-1}\left|T_{n+p}(t)\right| + \sum_{k=n+1}^{n+p}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)\left|T_k(t)\right| + \frac{1}{2n+1}\left|T_n(t)\right|\right) \\
&\leqslant \frac{4}{\pi\sin(\mathrm{a})}\left(\frac{1}{2(\mathrm{n}+\mathrm{p})-1} + \sum_{\mathrm{k}=\mathrm{n}+1}^{\mathrm{n}+\mathrm{p}-1}\left(\frac{1}{2\mathrm{k}-1} - \frac{1}{2\mathrm{k}+1}\right) + \frac{1}{2\mathrm{n}+1}\right) \\
&= \frac{4}{\pi\sin(a)}\left(\frac{1}{2(\mathrm{n}+p)-1} + \left(\frac{1}{2\mathrm{n}+1} - \frac{1}{2(\mathrm{n}+p)-1}\right) + \frac{1}{2\mathrm{n}+1}\right) \text{ (somme télescopique)} \\
&= \frac{8}{\pi\sin(a)(2\mathrm{n}+1)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \geqslant 1$, $\forall p \geqslant 2$ et $\forall t \in [a,b]$, $|S_{n+p}(t) - S_n(t)| \leqslant \frac{8}{\pi\sin(a)(2\mathrm{n}+1)}$. Quand p tend vers $+\infty$ à n fixé et t fixé, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [a,b], |f(t) - S_n(t)| \leqslant \frac{8}{\pi\sin(a)(2n+1)}.}$$

Donc la suite $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ cherchée est de terme général

$$\omega_n = \frac{8}{\pi\sin(a)(2n+1)}.$$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sup_{t\in[a,b]} |f(t) - S_n(t)| \leqslant \frac{8}{\pi\sin(a)(2n+1)}$. D'où

$$\lim_{n\to+\infty} \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - S_n(t)| = 0.$$

Donc,

la série de Fourier associée à f converge uniformément vers f sur tout segment $[a,b]$ contenu dans $]0,\pi/2[$.

5. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in]0,\pi/2]$, on a

$$S_n'(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} \cos((2k+1)t).$$

Par suite, pour tout réel $t \in]0, \pi/2]$,

$$\begin{aligned}\sin(t) \times S_n'(t) &= \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} \sin(t)\cos((2k+1)t)\\ &= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}(\sin(2k+2)t) - \sin(2kt))\\ &= \frac{2\sin(2nt)}{\pi},\end{aligned}$$

et donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [a,b], S_n'(t) = \frac{2\sin(2nt)}{\pi\sin(t)}.}$$

Pour $t \in]0, \pi/2]$,

$$S_n'(t) = 0 \Leftrightarrow \sin(2nt) = 0 \Leftrightarrow 2nt \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow t \in \frac{\pi}{2n}\mathbb{Z} \Leftrightarrow t \in \left\{\frac{\pi}{2n}, \frac{2\pi}{2n}, \dots, \frac{(n-1)\pi}{2n}, \frac{\pi}{2}\right\}.$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \ \alpha_n = \frac{\pi}{2n}.}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction S_n' est continue sur $]0, \pi/2]$ et pour tout $t \in]0, \pi/2]$, on a

$$S_n'(t) = \frac{2\sin(2nt)}{\pi\sin(t)}.$$

Soit $x \in [0, \pi/2]$, alors

$$S_n(x) = \int_0^x S_n'(t)dt = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)}dt.$$

Par le changement de variable $u = 2nt$, puisque $t = \frac{u}{2n}$ et $dt = \frac{du}{2n}$, on a

$$\begin{aligned}S_n(\alpha_n) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \frac{\sin(2nt)}{\sin(t)}dt\\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sin\left(\frac{u}{2n}\right)}\frac{du}{2n}\\ &= \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sin\left(\frac{u}{2n}\right)}du.\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n(\alpha_n) = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(u)}{\sin\left(\frac{u}{2n}\right)}du.}$$

(c) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in]0, \pi]$. Posons $f_n(u) = \frac{\sin(u)}{n\pi\sin(\frac{u}{2n})}$. Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la fonction f_n est continue sur $]0, \pi]$. En plus, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} f_n(u) &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(u)}{n\pi\sin(\frac{u}{2n})}. \\
&= \frac{2}{\pi}\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(u))}{u\left(\frac{\sin(\frac{u}{2n})}{\frac{u}{2n}}\right)} \\
&= \frac{2\sin(u)}{\pi u}.
\end{aligned}$$

Donc, la suite (f_n) converge simplement vers la fonction $u \mapsto \frac{2\sin(u)}{\pi u}$ qui est continue sur $]0, \pi]$. Maintenant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in]0, \pi]$, puisque $\frac{u}{2n} \in]0, \pi/2]$, en utilisant l'inégalité

$$\sin\left(\frac{u}{2n}\right) \geqslant \frac{2\frac{u}{2n}}{\pi} = \frac{u}{n\pi},$$

on en déduit que

$$|f_n(u)| = \frac{\sin(u)}{n\pi\sin\left(\frac{u}{2n}\right)} \leqslant \frac{\sin(u)}{n\pi\frac{u}{n\pi}} = \frac{\sin(u)}{u} = g(u).$$

D'après la question (1), la fonction g est continue et intégrable sur $]0, \pi]$, donc d'après le théorème de convergence dominée, la suite $(S_n(\alpha_n))$ définie par $S_n(\alpha_n) = \int_0^\pi f_n(t)dt$ converge et

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(\alpha_n) = \int_0^\pi \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(u)}{n\pi\sin\left(\frac{u}{2n}\right)}du = \int_0^\pi \frac{2\sin(u)}{\pi u}du = \frac{2I}{\pi}.$$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n(\alpha_n) = \frac{2I}{\pi}.}$$

$(6.\ )$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sup_{x\in]0,\frac{\pi}{2}[} |S_n(x) - f(x)| \geqslant |S_n(\alpha_n) - f(\alpha_n)| = |S_n(\alpha_n) - 1|.$$

D'autre part, on a $\lim_{n\to+\infty} |S_n(\alpha_n) - 1| = \left|\frac{2I}{\pi} - 1\right| \neq 0$ d'après la question $2.\ c)$, donc $\sup_{x\in]0,\frac{\pi}{2}[} |S_n(x) - f(x)|$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

4.3 Description du phénomène de Gibbs

Le phénomène de Gibbs est, en quelque sorte, un « défaut d'approximation » pour une fonction continue de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Pour une telle fonction f, le théorème de Dirichlet assure que la série de Fourier de f converge simplement vers la fonction f sur l'intervalle où f est de $\mathcal{C}^1$ par morceaux. En tout point x de continuité, la somme de la série de Fourier est $f(x)$.
L'énonce du théorème de Dirichlet ne doit pas faire penser que le comportement de la série de Fourier dans un voisinage d'une discontinuité d'une fonction soit *régulière*. En fait, à chaque fois qu'on approche la discontinuité d'une fonction, des *oscillations* [1], dite de Gibbs, apparaissent. Même en augmentant la quantité

1. Une oscillation est un mouvement ou une fluctuation périodique autour d'une position d'équilibre stable.

de coefficients de Fourier les oscillations persistent. Si une fonction f est de Dirichlet, alors les oscillations à gauche et à droite de la discontinuité en x_0 se compensent et leur moyenne $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ coïncide avec la valeur de f dans la discontinuité. L'écart entre la valeur de la fonction f et la valeur du polynôme trigonométrique S_n dans un voisinage proche comme l'on veut d'une discontinuité reste proche du 18% même quand $n \longrightarrow +\infty$.

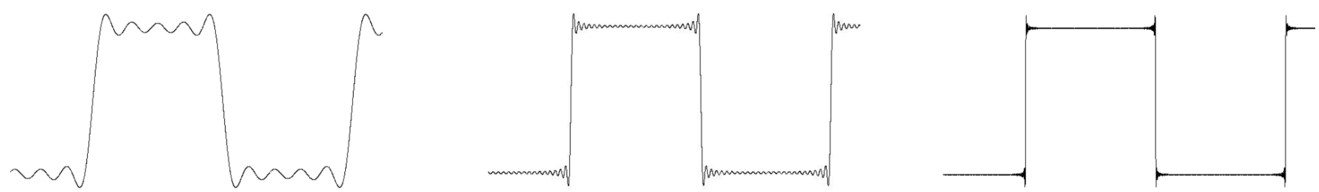


FIGURE 4.1 – Approximation du créneau aux ordres $n = 10; n = 50$ puis $n = 250$.

Bibliographie

[1] H. G. ter Morsche, J. C. van den Berg, E. M. van de Vrie , *Fourier and Laplace Transforms* Cambridge University Press, 7 août 2003 doi :10.1017/CBO9780511806834.005

[2] Klubprépa , `www.klubprepa.fr`