Université Mohammed V
Faculté des Sciences de Rabat
Département de Physique

Année Universitaire: 2019-2020
Sciences de la Matière Physique 5
SMP5

Travaux Dirigés de Physique Quantique
Série 1
Postulats de la mécanique quantique

Exercice 1: Principe d'incertitude de Heisenberg

Soit A et B deux observables quelconques.
La valeur moyenne et l'écart quadratique moyen d'un opérateur A sont définis respectivement par $< A >=< \varphi \mid A \mid \varphi >$, $(\Delta A)^2 =< A^2 > - < A >^2$.
1- Calculer la norme du vecteur d'état $\mid \psi >= A \mid \varphi > +i\lambda B \mid \varphi >$. Montrer que

$$< A^2 > . < B^2 > \geq \frac{1}{4} |< [A, B] >|^2$$

2- En posant $A' = A- < A >$ et $B' = B- < B >$ montrer l'inégalité

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |< [A, B] >|$$

En dèduire le principe d'incertitude de Heisenberg pour les observables $R(X, Y, Z)$ et $P(P_x, P_y, P_z)$.
3- Soit $H = \frac{P^2}{2m} + V(X)$ l'opérateur hamiltonien d'un système physique à une dimension où $V(X)$ est l'énergie potentielle.Calculer en fonction de P, X, et $V(X)$ les commutateurs $[H, P]$, $[H, X]$ et $[H, XP]$.

Exercice 2: Observables avec des spectres continus et représentation $\{\mid x >\}$

Soit dans un problème à une dimension, une particule dont la fonction donde est:

$$\psi(x) = N \frac{e^{\frac{i}{\hbar} p_0 x}}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

où a et p_0 sont des constantes réelles, et N un coefficient de normalisation.
1- Déterminer N pour que $\psi(x)$ soit normée.
2- On mesure la position de la particule; quelle est la probabilité pour que le résultat soit compris entre $-\frac{a}{\sqrt{3}}$ et $\frac{a}{\sqrt{3}}$?
3- Calculer la valeur moyenne de l'impulsion d'une particule ayant $\psi(x)$ comme fonction d'onde.

Exercice 3: Particule dans un puit de potentiel infini

I- On considère une particule de masse m en mouvement sur une droite $x'Ox$ soumise à un potentiel infini $V(x)$ défini par

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ \infty & \text{si } x > a, x < 0 \end{cases} \tag{1}$$

et dont l'état est repésenté par le ket $\mid \varphi >$.
1- Ecrire l'équation de Schrödinger à l'état stationnaire de la particule en représentation $\mid x >$.

2- Résoudre cette équation et déterminer les états propres $\mid \varphi_n >$ ainsi que les énergies E_n correspondants.
On suppose que l'état de la particule à l'instant $t = 0$ est:

$$\mid \psi(0) >= a_1 \mid \varphi_1 > +a_2 \mid \varphi_2 > +a_3 \mid \varphi_3 > +a_4 \mid \varphi_4 >$$

3- Quelle est la probabilité, lorsque l'on mesure l'énergie de la particule dans l'état $\mid \psi(0) >$, de trouver une valeur inférieure à $\frac{3\pi^2\hbar^2}{ma^2}$
4- Quels sont la valeur moyenne et l'écart quadratique moyen de l'énergie de la particule dans l'état $\mid \psi(0) >$?
5- Calculer le vecteur d'état $\mid \psi(t) >$ à l'instant t. Les résultats trouvés en **3** et **4** à l'instant $t = 0$ restent-ils exacts à un instant t quelconques ?
6- Lors d'une mesure de l'énergie, on trouve le résultat $\frac{8\pi^2\hbar^2}{ma^2}$. Après la mesure, quel est l'état du système ? Que trouve t-on si on mesure à nouveau l'énergie ?

Exercice 4: Mesure d'observables

A- L'évolution du vecteur d'état d'un système quantique est régie par l'équation de Scrödinguer:

$$i\hbar \frac{d \mid \psi(t) >}{dt} = H \mid \psi(t) >$$

où le Hamiltonian ne dépend pas du temps et possède une base d'états propres $\{\mid \phi_n >\}$, i.e $H \mid \phi_n >= E_n \mid \phi_n >$, où l'on suppose que les énergies propres sont non dégénérées.
1- On décompose le vecteur d'état dans cette base: $\mid \psi(t) >= \sum_n c_n(t) \mid \phi_n >$.
Trouver l'équation différentielle que doit vérifier chaque coefficient $c_n(t)$ et la résoudre. En déduire l'expression de $\mid \psi(t) >$ en fonction de $\mid \psi(0) >$.
B-On considère un système physique dont l'espace des états, qui est à trois dimensions, est rapporté à la base orthonormée formée par les trois kets $\mid u_1 >, \mid u_2 >, \mid u_3 >$. Dans la base de ces trois vecteurs, l'opérateur hamiltonien H du système et deux observables A et B s'écrivent:

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où , ω, a et b sont des constantes réelles positives.
Le système physique est à l'instant $t = 0$ dans l'état:

$$\mid \psi(0) >= \frac{1}{\sqrt{2}} \mid u_1 > +\frac{1}{2} \mid u_2 > +\frac{1}{2} \mid u_3 >$$

Vérifier que ce vecteur est normé.
1- On mesure, à l'instant $t = 0$, l'énergie du système. Quelles valeurs peut-on trouver, et avec quelles probabilités? Calculer, pour le système dans l'état $\mid \psi(0) >$, la valeur moyenne $< H >$ et l'écart quadratique moyen ΔH.
2- Au lieu de mesurer H à l'instant $t = 0$, on mesure A; quelles valeurs peut-on trouver, et avec quelles probabilités? Quel est le vecteur d'état immédiatement après la mesure?
3- Calculer le vecteur d'état du système à l'instant t.
4- Calculer les valeurs moyennes $< A > (t)$ et $< B > (t)$ à l'instant t. Quelles remarques peut-on faire?
5- Quels résultats obtient-on si l'on mesure à l'instant t l'observable A? Même question pour B; interprétation?

Exercice 5 Particule soumise à une force constante
Dans un problème à une dimension, on considère une particule d'enérgie potentielle $V(X) = -fX$, où f est une constante positive.
1- Ecrire le théorème d'Ehrenfest pour les valeurs moyennes de la position X et de l'impulsion P de la particule. Intégrer ces équations; comparer avec le mouvement classique.
2- Montrer que l'écart quadratique moyen ΔP ne varie pas au cour du temps.
3- Ecrire l'équation de Shrödinguer en représentation $\{| \ p >\}$. En déduire une relation entre $\frac{\partial}{\partial t} |< p \mid \psi(t) >|^2$ et $\frac{\partial}{\partial p} |< p \mid \psi(t) >|^2$. Intégrer l'équation ainsi obtenue; interprétation physique.

Exercice 6 Mesures partielles portées sur des sous systèmes
Considérons un système physique de deux particules (1) et (2), de même masse m, n'interagissant pas entre elles et placées toutes les deux dans un puit de potentiel infini de largeur a. On désigne par $H(1)$ et $H(2)$ les hamiltoniens de chacune des deux particules, et par $\mid \varphi_n(1) >$ et $\mid \varphi_q(2) >$ les états propres correspondants de la première et de la seconde particule, d'énergies $E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}n^2$ et $E_q = \frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}q^2$. Dans l'espace des états du système global, on considère la base des états $\mid \varphi_n\varphi_q >$ définis par: $\mid \varphi_n\varphi_q > = \mid \varphi_n(1) > \otimes \mid \varphi_q(2) >$.
1- Quels sont les états propres et les valeurs propres de l'opérateur $H = H(1) + H(2)$, hamiltonien total du système? Donner le degré de dégénérescence des deux niveaux d'énergie les plus basses.
2- On suppose que le système est, à l'instant $t = 0$, dans l'état:

$$\mid \psi(0) = \frac{1}{\sqrt{6}} \mid \varphi_1\varphi_1 > + \frac{1}{\sqrt{3}} \mid \varphi_1\varphi_2 > + \frac{1}{\sqrt{6}} \mid \varphi_2\varphi_1 > + \frac{1}{\sqrt{3}} \mid \varphi_2\varphi_2 >$$

2-1 Quel est l'état du système à l'instant t?
2-2 On mesure l'énergie total H. Quels résultats peut-on trouver, et avec quelles probabilités?
2-3 Même questions si, au lieu de mesurer H, on mesure $H(1)$.
3- Montrer que $\mid \psi(0) >$ est un état produit tensoriel. Lorsque le système est dans cet état, 3-1 Calculer les valeurs moyennes suivantes $< H(1) >$, $< H(2) >$ et $< H(1)H(2) >$. Comparer $< H(1) >< H(2) >$ et $< H(1)H(2) >$; comment expliquer le résultat obtenu?
3-2 Montrer que les résultats précdents restent valables lorsque l'état du système est l'état $\mid \psi(t) >$, calculé en 2-.
4- On suppose maintenant que l'état $\mid \psi(0) >$ est donné par:

$$\mid \psi(0) = \frac{1}{\sqrt{5}} \mid \varphi_1\varphi_1 > + \frac{3}{\sqrt{5}} \mid \varphi_1\varphi_2 > + \frac{1}{\sqrt{5}} \mid \varphi_2\varphi_1 >$$

Montrer que $\mid \psi(0) >$ ne peut pas être mis sous la forme d'un produit tensoriel. Que deviennent alors les réponses aux diverses questions posées en 3-.
5-
5-1 On mesure $H(1)$ et on trouve E_2. Quel est l'état juste après la mesure? Peut-on alors dire quelle est l'énergie de la particule (2) sans effectuer une mesure de son énergie? Et si on trouve E_1 pour $H(1)$, qu'en est-il?
5-2 Le système étant dans l'état $\mid \psi(0) >$ défini dans la question 4, on mesure d'abord $H(1)$, puis $H(2)$; faire l'inventaire des différents résultats de mesure et préciser leurs probabilités.
5-3 Reprendre la question 5-2- quand des mesures sont effectuées dans l'autre ordre càd $H(2)$ puis $H(1)$. Commenter.

Exercices supplémentaires

Exercice 1: particule dans un puit de potentiel infini à deux dimension
On considère une particule de masse m dans un puit de potentiel infini de dimension $d = 2$. Son

Hamiltonien est : $H = H_x + H_y$ avec

$$H_x = \frac{P_x^2}{2m} + V(X) \qquad H_y = \frac{P_y^2}{2m} + V(Y)$$

où $V(R)$(R=X,Y) est le potentiel défini par l'équation (1) de l'exercice **3**.
1- Parmi les ensembles suivants, $\{H_x\}, \{H\}, \{H_x, H_y\}, \{H, H_x\}$, lesquels forment un ECOC? Justifiez votre réponse.
2- On suppose que l'état de la particule est décrit par la fonction d'onde

$$\psi(x,y) = \begin{cases} N cos\frac{\pi x}{a} cos\frac{\pi y}{a} cos\frac{2\pi x}{a} cos\frac{2\pi y}{a} & \text{si } 0 \leq x \leq a \text{ et } 0 \leq y \leq a \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

où N, est une constante.
2-1 Quelle est la valeur moyenne $< H >$ de l'énergie de la particule? Si on mesure l'énergie H, quels résultats peut-on trouver et avec quelles probabilités?
2-2 On mesure l'observable H_x, quels résultats peut-on trouver et avec quelles probabilité? Si cette mesure a donné le résultat $\frac{\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$,quels résultats donnera ensuite une mesure de H_y, et avec quelles probabilités?
2-3 Au lieu d'efféctuer les mesures précédentes, on effectue maintenant une mesure de H_x et P_y, quelles probabilités a t-on de trouver $E_x = \frac{9\pi^2\hbar^2}{2ma^2}$ et $p_0 \leq p_y \leq p_0 + dp$?

Exercice 2: Mesure de l'impulsion d'une particule

La fonction d'onde d'une particule libre en mouvement sur un axe $x'Ox$ est donné à l'instant $t = 0$ par:

$$\psi(x,0) = N \int_{-\infty}^{+\infty} dk e^{-|k|/k_0} e^{ikx}$$

où $k_0 > 0$ et N sont des constantes.
1- Quelle est la probabilité $\mathcal{P}(p_1, 0)$ pour qu'une meure de l'impulsion, effectuée à l'instant $t = 0$, donne un résultat compris entre $-p_1$ et $+p_1$? Etudier sommairement la fonction $\mathcal{P}(p_1, 0)$.
2- Que devient cette probabilité $\mathcal{P}(p_1, 0)$ si la mesure est éffectuée à l'instant t ? Interprétation ?
3- Quelle est la forme du paquet d'onde à l'instant $t = 0$? Calculer à cet instant le produit $\Delta X.\Delta P$; conclusion ? Décrire qualitativement l'évolution ultérieure du paquet d'onde.

Exercice 3: Etalement d'un paquet d'onde

On considére une particule libre en mouvement sur l'axe $x'Ox$.
1- Montrer, en appliquant le théorème d'Ehrenfest, que $< X >$ est une fonction linéaire du temps, la valeur moyenne $< P >$ restant constante.
2- Ecrire les équations d'évolution des valeurs moyennes $< X^2 >$ et $< XP + PX >$. Intégrer ces équations.
3- En déduire qu'avec un choix convenable de l'origine des temps, l'écart quadratique moyen ΔX est donné par:

$$(\Delta X)^2 = \frac{1}{m^2}(\Delta P)_0^2 t^2 + (\Delta X)_0^2$$

où $(\Delta X)_0$ et $(\Delta P)_0$ sont les écarts quadratiques moyens à l'instant initial. Comment varie en fonction du temps la largeur du paquet d'onde ? Intérprétation physique.