Université Mohammed V
Faculté des Sciences de Rabat
Département de Physique

Année Universitaire: 2019-2020
Sciences de la Matière Physique 5
SMP5

Travaux Dirigés de Physique Quantique
Série 2
Moment cinétique de spin

Exercice 1: Mesures d'un moment de spin sous champ magnétique

On considère une particule de $S = \frac{1}{2}$ de moment magnétique $\vec{M} = \gamma\vec{S}$. L'espace des états de spin est engendré par les vecteurs de base $\mid + >$ et $\mid - >$, vecteurs propres de S_z correspondant aux valeurs propres $+\frac{\hbar}{2}$ et $-\frac{\hbar}{2}$. A l'instant $t = 0$, l'état du système est $\mid \psi(t = 0) >=\mid + >$.
1- Quels sont les résultats possibles d'une mesure de S_x à $t = 0$ et quelles sont leurs probabilités?
2- Au lieu de mesurer S_x à $t = 0$, on laisse évoluer le système sous l'influence d'un champ magnétique parallèle à Oy et de module B_0. Calculer, dans la base $\{\mid + >, \mid - >\}$, l'état du système à l'instant t.
3- A cet instant t, on mesure les observables S_x , S_y, S_z. Quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités? Quelle relation doit exister entre B_0 et t pour que le résultat de l'une des mesures soit certain. Donner une interprétation physique de cette condition?

Exercice 2: Spin d'un atome plongé dans un champ magnétique variable

On considère une particule de spin $S = \frac{1}{2}$, de moment magnétique de spin $\vec{M} = \gamma\vec{S}$ (γ est le rapport gyromagnétique). Cette particule est plongée dans un champ magnétique constant $\vec{B}_0$ porté par l'axe Oz, et un champ $\vec{B}_1(t)$ perpendiculaire à $\vec{B}_0$, de module constant et tournant autour de $\vec{B}_0$ à la vitesse angulaire constante ω. On pose $\omega_0 = -\gamma B_0$ et $\omega_1 = -\gamma B_1$.
1- Donner l'expression de l'hamiltonien du système ainsi que la matrice qui le représente dans la base $(\mid + >, \mid - >)$ des vecteurs propres de S_z.
2- L'état du système à un instant t peut se mettre sous la forme

$$\mid \psi(t) >= a_+(t) \mid + > +a_-(t) \mid - > .$$

Ecrire l'équation de Schrödinger et en déduire les équations d'évolution des fonctions $a_+(t)$ et $a_-(t)$.
3- a) En effectuant le changement de fonctions $b_+(t) = a_+(t)e^{i\omega t/2}$ et $b_-(t) = a_-(t)e^{-i\omega t/2}$, montrer que le système des équations d'évolution des fonctions $b_+(t)$ et $b_-(t)$ est équivalent à une équation de Schrödinger $i\hbar\frac{d|\psi(t)>}{dt} = \tilde{H} \mid \psi(t) >$ d'un système conservatif. On pose $\Delta\omega = \omega - \omega_0$.
b) Résoudre cette équation et déduire l'expression de $\mid \psi(t) >$.
4 L'état de spin de l'atome à l'instant $t = 0$ est $\mid \psi(0) >=\mid + >$. Quelle est la probabilité de trouver à l'instant t ce spin dans l'état $\mid - >$? Représenter graphiquement cette probabilité dans les deux cas suivants : $\mid \Delta\omega \mid >>\mid \omega_1 \mid$ (loin de la résonnance) et $\mid \Delta\omega \mid <<\mid \omega_1 \mid$ (près de la résonnance) ; discuter en particulier le cas de résonnance exacte : $\mid \Delta\omega \mid= 0$.

Exercice 3: Système à deux spins

On considère le système constitué par deux spins $\frac{1}{2}$, $\vec{S}_1$ et $\vec{S}_2$. L'espace des états de ce système est le produit tensoriel $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ des espaces des états $\mathcal{E}_1$ de $\vec{S}_1$ et $\mathcal{E}_2$ de $\vec{S}_2$. Une base de cet espace est formée par les quatres vecteurs propres communs à S_{1z} et S_{2z}:$\{\mid ++>, \mid +->, \mid -+>, \mid -->\}$. Le système est à l'instant $t = 0$ dans l'état :

$$\mid \psi(0) >= \frac{1}{2} \mid ++> + \frac{1}{2} \mid +-> + \frac{1}{\sqrt{2}} \mid --> .$$

1- A l'instant $t = 0$, on mesure S_{1z}; Quelle probabilité a-t-on de trouver $-\frac{\hbar}{2}$? Quel est le vecteur d'état après cette mesure ? Si l'on mesure ensuite S_{1x}, quels résultats peut-on trouver et avec quelles probabilités ? Même question si la mesure de S_{1z} a donné $+\frac{\hbar}{2}$.

2- Le système étant dans l'état $\mid \psi(0) >$ écrit plus haut, on mesure simultanément S_{1z} et S_{2z}; quelle probabilité a-t-on de trouver des résultats opposés ? identiques ?

3- Au lieu d'effectuer les mesures précédentes, on laisse évoluer le système sous l'influence de l'hamiltonien: $H = \omega_1 S_{1z} + \omega_2 S_{2z}$. Quel est le vecteur d'état $\mid \psi(t) >$ à l'instant t ? Calculer à l'instant t les valeurs moyennes $< \vec{S}_1(t) >$ et $< \vec{S}_2(t) >$. Interprétation physique.

4. Montrer que les longueurs des vecteurs $< \vec{S}_1 >$ et $< \vec{S}_2 >$ sont inférieures à $\frac{\hbar}{2}$; quelle devrait être la forme de $\mid \psi(0) >$ pour que ces longueurs soient toutes deux égales à $\frac{\hbar}{2}$.