Université Mohammed V
Faculté des Sciences de Rabat
Département de Physique

Année Universitaire: 2019-2020
Sciences de la Matière Physique 5
SMP5

Travaux Dirigés de Physique Quantique
Série 3
Oscillateur harmonique

Exercice 1: valeurs moyennes des grandeurs physiques d'un O.H

L'état à l'instant $t = 0$ d'un oscillateur harmonique linéaire est donné par

$$| \psi(0) >= \frac{1}{\sqrt{2}}(| \varphi_2 > + | \varphi_3 >)$$

où $| \varphi_n >$ sont les états propres de l'oscillateur.
Déterminer l'état du sysème à l'instant t et calculer à cet instant les valeurs moyennes de l'énergie, de la position et de l'impulsion, ainsi que leurs écarts quadratiques moyens.

Exercice 2: Oscillateur harmonique à deux états

On considère un oscillateur harmonique de masse m et de pulsation ω. A l'instant $t = 0$, l'état de cet oscillateur est donné par $| \psi(0) >= \sum_n c_n | \varphi_n >$.
1- Quelle est la probabilité P pour qu'une mesure de l'énergie de l'oscillateur, effectuée à un instant $t > 0$ quelconque, donne un résultat supérieur à $2\hbar\omega$? Lorsque $P = 0$, quels sont les coefficients non-nuls?
2- On suppose à partir de maintenant que seuls c_0 et c_1 sont non-nuls. Écrire en fonction de c_0 et c_1, la condition de normalisation de $| \psi(0) >$ et la valeur moyenne $< H >$ de l'énergie. On impose de plus $< H >= \hbar\omega$; calculer $| c_0 |^2$ et $| c_1 |^2$.
3- Le vecteur d'état normé n'étant défini qu'à un facteur de phase global près, on fixe ce facteur de phase en prenant c_0 réel et positif. On pose $c_1 =| c_1 | e^{i\theta_1}$. En plus de $< H >= \hbar\omega$, on suppose que $< X >= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. Calculer θ_1.
$| \psi(0) >$ étant ainsi déterminé, écrire $| \psi(t) >$ pour $t > 0$ et calculer la valeur de θ_1 à l'instant t. En déduire la valeur moyenne $< X > (t)$ de la position à l'instant t.

Exercice 3: Particule chargée placée dans un potentiel harmonique

On considère une particule de charge q placée dans un potentiel harmonique $V(x) = \frac{1}{2}m\omega x^2$ et soumise à un champ électrique $\vec{E} = E\vec{e_x}$ constant et dirigé suivant l'axe Ox.
1- Donner l'expression de l'Hamiltonien H de ce système.
2- Montrer que l'équation aux valeurs propres de H dans la représentation $| x >$ peut se ramener à celle d'un oscillateur non-chargé. En déduire les valeurs et les fonctions propres de H.
3- Déterminer les valeurs moyennes de X, P, X^2 et P^2.

4- A l'instant $t = 0$, l'état de la particule est donné par

$$| \psi(0) >= \frac{1}{\sqrt{2}}(| \varphi_0 > + e^{i\theta_0} | \varphi_2 >)$$

où $\theta_0 = \theta(t = 0)$.
Calculer les valeurs moyennes $< X > (0)$, $< P > (0)$, $< X^2 > (0)$ et $< P^2 > (0)$. En déduire les écarts quadratiques moyens $\Delta X(0)$ et $\Delta P(0)$. L'inégalité de Heisenberg est elle vérifiée ?
5- Calculer $| \psi(t) >$ et montrer que son expression est identique, à un facteur de phase global près, à celle de $| \psi(0) >$. En déduire sans calcul les valeurs moyennes $< X > (t)$, $< P > (t)$, $< X^2 > (t)$ et $< P^2 > (t)$.

Exercice 4: Oscillateur harmonique à deux dimensions

Partie A

Un oscillateur harmonique est formé d'une particule de masse m pouvant se déplacer dans l'espace à deux dimensions. Cette masse est soumise à une force centrale de rappel $\vec{F} = -k\vec{r}$, $\vec{r}$ étant le rayon vecteur indiquant la position de la particule.
1- Déterminer l'énergie potentielle de la particule.
2- Écrire l'opérateur hamiltonien H du système sous la forme d'une somme de deux opérateurs indépendants H_x et H_y. Leurs vecteurs propres seront notés par $| \varphi_{n_x} >$ et $| \varphi_{n_y} >$ respectivement. On notera par $| \varphi_{n_x n_y} >$ le produit tensoriel $| \varphi_{n_x} > \otimes | \varphi_{n_y} >$.
3- Déterminer les vecteurs propres de l'hamiltonien et les énergies correspondantes. En déduire, en représentation $| \vec{r} >$, les fonctions d'onde associées.
4- Calculer la dégénérescence des niveaux d'énergie.

Partie B

L'état du système à l'instant $t = 0$ est représenté par le vecteur

$$| \psi(0) >= \frac{1}{2} | \varphi_{00} > + | \varphi_{01} > + i | \varphi_{11} > - i | \varphi_{02} >$$

1- A l'instant $t = 0$, on mesure l'énergie de l'oscillateur; quels résultats peut-on trouver et avec quelles probabilités ?
2- Déterminer l'état de l'oscillateur à un instant $t > 0$.
3- A l'instant t on mesure H_x(énergie suivant Ox); quels résultats peut-on trouver et avec quelles probabilités ? Même question pour H_y.
4- Calculer la valeur moyenne $< Y > (t)$ de la position de l'oscillateur suivant Oy. En déduire la valeur moyenne de l'impulsion $< P_y > (t)$ suivant cet axe.
5- A l'instant t on mesure l'énergie de l'oscillateur et on trouve $3\hbar\omega$; quel est l'état de l'oscillateur immédiatement après cette mesure ?

Partie C

Pour un oscillateur harmonique dans l'espace à trois dimensions, quelles sont les valeurs propres de l'hamiltonien et quels sont leurs degrés de dégénérescence ?

Exercices supplémentaires

Exercice 1: Oscillateur harmonique en représentation de Heisenberg

On considère un oscillateur harmonique linéaire. En utilisant la relation

$$e^A B e^{-A} = B + \frac{1}{1!}[A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \frac{1}{3!}[A, [A, [A, B]]] + ...$$

déterminer, dans la représentation de Heisenberg, l'évolution au cours du temps des opérateurs a, a^+, X et P. Déterminer les valeurs moyennes de X, P, X^2 et P^2 dans un état propre de H, aux instants $t = 0$ et $t > 0$. Si à $t = 0$ le système est dans l'état $c_0 \mid \varphi_0 > +c_1 \mid \varphi_1 >$ où c_0 et c_1 sont des constantes réelles, déterminer les valeurs moyennes de X, P, X^2 et P^2 à $t = 0$ et à $t > 0$.

Exercice 2: Oscillateur harmonique bidimensionnel

On considère une particule de masse m qui se déplace dans l'espace à deux dimensions soumise à un potentiel $V(x, y) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) + 2axy$ avec $k > 0$ et $\mid a \mid < \frac{k}{2}$.

1- En faisant le changement de variable

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y) \qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y),$$

montrer que l'Hamiltonien du système se met sous la forme $H = H_1 + H_2$ avec

$$H_1 = \frac{P_1^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_1 x_1^2 \qquad H_2 = \frac{P_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_2 x_2^2$$

où P_1 et P_2 sont les composantes de l'opérateur impulsion suivant les directions x_1 respectivement x_2 et ω_1 et ω_2 sont des fréquences à déterminer.

2- Sachant que l'espace des ètats $\mathcal{E}$ sécrit sous forme d'un produit tensoriel $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ où $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont les sous espaces des états correspondant à la direction x_1 respectivement x_2, les états propres de H, $\mid \varphi_{np} >$, s'écrivent sous forme de produit tensoriel $\mid \varphi_n > \otimes \mid \varphi_p >$ où $\mid \varphi_n >$ et $\mid \varphi_p >$ sont les états propres de H_1 respectivement H_2.

Montrer que les états propres du système sont donnés par:

$$\mid \varphi_{np} >= \frac{1}{\sqrt{n!p!}}(a_1^+)^n(a_2^+)^p \mid \varphi_{00} >$$

Déterminer leurs énergies propres.

3- On suppose qu'à $t = 0$ le système est dans l'état:

$$\mid \psi(0) >= \frac{1}{\sqrt{5}} \mid \varphi_1(1)\varphi_1(2) > + \frac{3}{\sqrt{5}} \mid \varphi_1(1)\varphi_2(2) > + \frac{1}{\sqrt{5}} \mid \varphi_2(1)\varphi_1(2) >$$

3-1 Déterminer l'état du système à l'instant t.

3-2 Montrer que H_1 et H_2 sont des constantes du mouvement.

3-3 On mesure H_1 à l'instant t; quels résultats peut-on trouver et avec quelles probabilités ? Même question pour H_2.

3-4 Calculer $< H_1 >$, $< H_2 >$ et $< H_1H_2 >$. Comparer $< H_1 >< H_2 >$ et $< H_1H_2 >$. Comment peut-on expliquer le résultat obtenu ?

3-5 On mesure H_1 puis H_2. Déterminer les diff'erents résultats de la mesure et préciser leurs probabilités ainsi que les états du système après la mesure. Commenter les résultats obtenus.

4- Calculer la valeur moyenne $< X_1 > (t)$ et $< Y_1 > (t)$ de la position de l'oscillateur respectivement suivant Ox_1 et Oy_1. En déduire la valeur moyenne de l'impulsion $< P_x > (t)$ et $< Py > (t)$ de la particule suivant les directions respectives Ox et Oy.

5- A l'instant t on mesure l'énergie de l'oscillateur et on trouve $3\hbar\omega$; quel est l'état de l'oscillateur immédiatement après cette mesure?

Exercice 3: Les états cohérents de l'oscillateur harmonique

1- Donner les équations du mouvement couplées de la position $x(t)$ et de l'impulsion $p(t)$ d'un oscillateur harmonique classique.

2- En introduisant les variables sans dimension $\hat{x} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$ et $\hat{p} = \sqrt{\frac{1}{\hbar m\omega}}p$.

2-1 déterminer l'équation du mouvement du nombre complexe $z(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{x}(t)+i\hat{p}(t))$ et montrer que $z(t) = z_0 e^{-i\omega t}$ où $z_0 = z(t=0)$.

2-2 Exprimer l'énergie de l'oscillateur classique, H, en fonction de z_0.

3- Donner l'équation dévolution de la valeur moyenne de l'opérateur d'annihilation $< a > (t)$ d'un oscillateur harmonique quantique. En déduire l'expression de $< a > (t)$.

4- Afin de construire les états quasi-clasiques(états cohérents), on doit avoir à tout instant t $< X > (t) = x(t)$ et $< P > (t) = p(t)$; où X et P sont les opérateurs respectifs de position et d'impulsion.

4-1 Exprimer la valeur moyenne de l'opérateur d'annihilation $< a > (0)$ et la valeur moyenne de l'Hamiltonien $< H >$ en fonction de z_0. Sous quelle condition on a $< H >= H$?

4-2 Montrer que l'état du système à l'instant $t = 0$, $\mid \psi(0) >$, est vecteur propre de a avec la valeur propre z_0.

5- En désignant par $\mid z >$ le vecteur propre de a de valeur propre z et en utilisant le développement de $\mid z >$ dans la base $\{\mid \varphi_n >\}$: $\mid z >= \sum_n c_n \mid \varphi_n >$, montrer que:

$$\mid z >= e^{-\frac{|z|^2}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} \mid \varphi_n >,$$

où z est un nombre complexe et les $\mid \varphi_n >$ sont les états stationnaires.

5- Montrer que $\mid z >$ est normé.

6- Montrer que $\mid z >$ est vecteur propre de l'opérateur d'annihilation a; quelle est la valeur propre correspondante ?

7- Calculer

7-1 la valeur moyenne $< N >$ dans l'état $\mid z >$ de l'opérateur $N = a^+ a$,

7-2 son écart quadratique moyen ΔN.

7-3 Montrer qu'à lalimite $N \to +\infty$,ona $\frac{\Delta N}{<N>} \to 0$.

8- Supposons qu'à l'instant initial $t = 0$ on a $\mid \psi(0) >=\mid z >$.

8-1 Déterminer l'état $\mid \psi(t) >$ à l'instant t et montrer qu'il est, à un facteur de phase près, un état cohérent. Quel est le nombre complexe correspondant ?

8-2 Montrer que $\mid \psi(t) >$ est vecteur propre de a et déterminer sa valeur propre.

8-3 Calculer la valeur moyenne $< N > (t)$ et l'écart quadratique moyen $\Delta N(t)$ à l'instant t et montrer qu'ils ne dépendent pas du temps.

Exercice 4: Oscillateurs harmoniques couplés

On considère deux particules de même masse soumisent à des forces de rappel $F_1 = -m\omega^2(x_1 - a)^2$ et $F_2 = -m\omega^2(x_2 + a)^2$ et qui se déplacent le long d'un axe Ox. On suppose que les deux particules intéragissent via un potentiel de couplage $V(x_1, x_2) = \lambda m\omega^2(x_1 - x_2)^2$.

1- Donner l'hamiltonien du système.

2- On pose

$$X_G = \frac{X_1 + X_2}{2} \qquad X_R = X_1 - X_2$$

2-1- Montrer que l'hamiltonien se met sous la forme:

$$H = \frac{P_G^2}{2\mu_G} + \frac{\mu_G \omega_G^2}{2} X_G^2 + \frac{P_R^2}{2\mu_R} + \frac{\mu_R \omega_R^2}{2} X_R^2 - \mu_R \omega_R^2 \frac{a}{1+4\lambda} X_R$$

où P_G et P_R sont les opérateurs d'impulsion des particules fictives G et R et μ_G, μ_R, ω_G et ω_R sont des constantes à déterminer.
2-2- Montrer que l'hamiltonien H peut s'écrire sous la forme $H = H_G + H_R + C$, où H_G, H_R sont les hamiltoniens des particules fictives G et R et C est une constante à déterminer.
2-3- L'espace des états $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ peut se metre sous la forme d'un produit tensoriel entre les espaces d'état de deux particules fictives $\mathcal{E} = \mathcal{E}_G \otimes \mathcal{E}_R$ où $\mathcal{E}_G$ est l'espace des états associé à la particule G d'hamiltonien H_G et $\mathcal{E}_R$ est l'espace des états associé à la particule R d'hamiltonien H_R.
3- Soit $\mid \varphi_{np} >=\mid \varphi_n^G > \otimes \mid \varphi_p^R >$ où $\varphi_n^G >$ et $\varphi_p^R >$ sont les vecteurs propres respectifs de H_G et H_R.
3-1- Écrire les opérateurs de création et d'anihilation $a_G^\pm$ et $a_R^\pm$ des particules fictives.
3-2- Montrer que:

$$\varphi_n^G >= \frac{(a_G^+)^n}{\sqrt{n!}} \mid \varphi_0^G >, \qquad \varphi_p^R >= \frac{(a_R^+)^p}{\sqrt{p!}} \mid \varphi_0^R >$$

En déduire les états fondamentaux $\mid \varphi_{np} >$.
3-3- Déterminer les énergies propres de H_R et H_G, en déduire l'énergie totale du système E_{np}.
3-4- Déterminer le degré de dégénéréscence des énergies E_{np}. Justifiez votre réponse.
4- Calculer les valeurs moyennes $< X_G > (t)$ et $< X_R > (t)$. En déduire $< X_1 > (t)$ et $< X_2 > (t)$.
5- On suppose qu'à $t = 0$ le système se trouve dans son état fondamental $\mid \varphi_{00} >$.
5-1- Déterminer $< X_1 > (t)$ et $< X_2 > (t)$ à un instant ultérieur t.
5-2- On suppose maintenant qu'à $t = 0$ la particule 1 se trouve à l'état fondamental $\mid \varphi_0 >$ alors que la particule 2 posséde une vitesse initiale. Calculer en fonction de $< X_2 > (0)$, $< P_2 > (0)$ les valeurs moyennes $< X_1 > (t)$ et $< X_2 > (t)$. Que peut-on conclure?