Université Mohammed V
Faculté des Sciences de Rabat
Département de Physique

Année Universitaire: 2018-2019
Sciences de la Matière Physique 5
SMP5

Travaux Dirigés de Physique Quantique
Série 4
Moment cinétique

Exercice 1: Composantes du moment cinétique $J = 3/2$

On considère un système quantique de moment cinétique $J = \frac{3}{2}$. On se place dans la base des vecteurs propres de J_z . Déterminer les matrices représentant les opérateurs J_+ et J_- et en déduire les matrices représentant les observables J_x et J_y.

Exercice 2: Moment cinétique quadrupolaire

On considère un système de moment cinétique $\ell = 1$; une base de son espace des états est constituée par les trois vecteurs propres de L_z: $\mid 1>$, $\mid 0>$, $\mid -1>$, de valeurs propres respectives $+\hbar$, 0, $-\hbar$, et tels que : $L_\pm \mid m >= \hbar\sqrt{2} \mid m \pm 1 >$, $L_+ \mid 1 >= L_- \mid -1 >= 0$.
Ce système, qui possède un moment quadripolaire électrique, est plongé dans un gradient de champs électrique, de sorte que son hamiltonien s'écrit : $H = \frac{\omega_0}{\hbar}(L_u^2 - L_v^2)$ où L_u et L_v sont les composantes de $\vec{L}$ sur les deux directions Ou et Ov du plan xOz, à 45 de Ox et Oz; ω_0 est une constante réelle.

1- Ecrire la matrice représentant H dans la base $\{\mid 1>, \mid 0>, \mid -1>\}$. Quels sont les états stationnaires du système, et leurs énergies? (Ces états seront notés : $\mid E_1>$, $\mid E_2>$, $\mid E_3>$, rangés par ordre d'énergies décroissantes).

2- A l'instant $t = 0$, le système est dans l'état : $\mid \psi(0) >= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mid 1 > - \mid -1 >)$. Quel est le vecteur d'état $\mid \psi(t) >$ à l'instant t? A cet instant, on mesure L_z; quelles sont les probabilités des différents résultats possibles?

3- Calculer les valeurs moyennes $< L_x > (t)$, $< L_y > (t)$ et $< L_z > (t)$ à l'instant t. Quel est le mouvement effectué par le vecteur $< \vec{L} >$?

4- On effectue à l'instant t une mesure de L_z.
4-a- Existe-t-il des instants où un seul résultat est possible ?
4-b- On suppose que cette mesure a donné le résultat $\hbar$. Quel est l'état du système immédiatement après la mesure ? Indiquer, sans calcul, son évolution ultérieure.

Exercice 3: Moment orbital

On considère un système d'hamiltonien H et de moment orbital $\vec{L}$ dont l'espace des états ξ est engendré par la base $\{\mid k, \ell, m >\}$ où k est le nombre quantique associé à H et ℓ , m les nombres quantiques associés respectivement à L^2 et L_z.

1- Sachant que dans la représentation $\mid \vec{r} >$ la fonction d'onde du système est donnée par $\psi_{k,\ell,m}(r, \theta, \varphi) = f(r)Y_\ell^m(\theta, \varphi)$, déterminer les équations différentielles satisfaites par $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$. En déduire que:

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = F_\ell^m(\theta)Z_m(\varphi)$$

où $Z_m(\varphi)$ est une fonction à déterminer.

2- Quelles sont les valeurs que peut prendre ℓ et m. Justifiez votre réponse.

3- Calculer $Y_\ell^\ell(\theta,\varphi)$.
4- Montrer que:

$$(L_-)^m Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \hbar^m \sqrt{2\ell \times 2(2\ell-1) \times ... \times (\ell-m)(\ell+m+1)}\, Y_\ell^{\ell-m}(\theta,\varphi)$$

En dèduire que:

$$Y_\ell^m(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{(\ell+m)!}{(2\ell)!(\ell-m)!}} \left(\frac{L_-}{\hbar}\right)^{\ell-m} Y_\ell^\ell$$

On donne:

$$L_+ = \hbar e^{i\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + icotg\theta \frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \qquad L_- = \hbar e^{-i\varphi}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + icotg\theta \frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi} \qquad L^2 = -\hbar^2\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{1}{tg\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)$$

Exercice 4: Moment orbital

On considère un système de moment orbitale $\vec{L}$ et dont l'hamiltonien est $H = \frac{\omega}{\hbar} L_+ L_-$.
A l'instant $t=0$, le système est dans l'état décrit par la fonction d'onde

$$\psi(\theta,\varphi) = c(1 + \sin(\theta)\cos(\varphi))$$

1- Déterminer la constante c pour que l'état $\psi(\theta,\varphi)$ soit normé.
2- Développer cette fonction d'onde en fonction des harmoniques sphériques.
3- Déterminer la fonction d'onde $\psi(\theta,\varphi,t)$ à l'instant t.
4- Donner les résultats, avec les probabilités correspondantes, qu'on peut trouver lors d'une mesure de L_z. Trouver la fonction d'onde décrivant l'état de la particule juste après cette mesure.
On donne les harmoniques sphériques:

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad , \quad Y_1^{\pm1}(\theta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\varphi}$$