

Exercices supplémentaires

Exercice I: Particule de spin $\frac{1}{2}$ dans un puit de potentiel infini (Examen 2018/2019)

On considère une particule de masse m , de spin $s = \frac{1}{2}$ et de moment magnétique $\vec{M} = \gamma \vec{S}$ se déplaçant sur l'axe Ox dans un puit de potentiel infini de largeur a . Cette particule est soumise à un champ magnétique constant suivant $\vec{e}_x$: $\vec{B} = B\vec{e}_x$.

L'hamiltonien de cette particule est $H = H_0 + \omega S_x$ où H_0 représente l'énergie cinétique de la particule et ωS_x son énergie d'interaction avec le champ magnétique.

On donne les valeurs et vecteurs propres de H_0 dans l'espace $\mathcal{E}_x$ du mouvement orbital:

$$H_0 | \varphi_n \rangle = E_n | \varphi_n \rangle \quad \text{où} \quad E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2 \quad \text{avec} \quad n = 1, 2, \dots, \infty$$

L'espace des états de cette particule est $\mathcal{E} = \mathcal{E}_x \otimes \mathcal{E}_s$ où $\mathcal{E}_s$ est l'espace des états de spin engendré par la base $\{| + \rangle, | - \rangle\}$ des vecteurs propres de S_z correspondants aux valeurs propres $\frac{\hbar}{2}$ et $-\frac{\hbar}{2}$ respectivement. Une base de $\mathcal{E}_x$ est formée des vecteurs propres $|\varphi_n\rangle$ de H_0 .

1- Donner l'expression de ω en fonction de B .

2- Soient

$$S_x = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad S_y = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

les matrices représentant les composantes S_x et S_y de $\vec{S}$ dans la base $\{| + \rangle, | - \rangle\}$ de $\mathcal{E}_s$. Calculer, dans $\mathcal{E}_s$, les valeurs propres de S_x et S_y ainsi que les vecteurs propres correspondants. On note par $| + \rangle_x$ et $| - \rangle_x$ les vecteurs propres de S_x et par $| + \rangle_y$ et $| - \rangle_y$ les vecteurs propres de S_y .

3- Dans $\mathcal{E}$ on choisit la base $\{|\varphi_n\rangle | + \rangle, |\varphi_n\rangle | - \rangle\}$ où $n = 1, 2, 3, \dots$. Quelles sont, dans $\mathcal{E}$, les valeurs propres de S_x et S_y . Quels sont leurs degrés de dégénérescence ? Donner sans calculs les vecteurs propres de S_x et S_y correspondant à leurs différentes valeurs propres.

4- Quels sont les vecteurs propres de H et quelles sont les valeurs propres correspondantes ?

5- À $t = 0$, l'état de la particule est décrit par le vecteur

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} [(|\varphi_1\rangle | + \rangle + |\varphi_2\rangle | + \rangle + |\varphi_1\rangle | - \rangle)]$$

5-1 Vérifier que $|\psi(0)\rangle$ est normé.

5-2 Calculer $|\psi(t)\rangle$ pour $t > 0$. On pose $\omega_n = \frac{E_n}{\hbar}$.

6- À l'instant t , on mesure S_z ,

6-1 Quels sont les résultats possibles et quelles sont les probabilités correspondantes.

6-2 Calculer les valeurs moyennes $\langle S_x \rangle(t)$, $\langle S_y \rangle(t)$ et $\langle S_z \rangle(t)$.

6-3 Décrire le mouvement du vecteur $\langle \vec{S} \rangle(t)$. Donner une interprétation physique de ce mouvement.

7- À l'instant t , on fait une mesure de S_z et on trouve la valeur $-\frac{\hbar}{2}$. On effectue, juste après, une mesure de l'énergie de la particule. Quels résultats peut-on trouver et avec quelles probabilités ?

Exercice II: Electron dans un champ magnétique. Niveaux de Landau

Un électron se déplaçant sur le plan xOy est soumis à un champ magnétique $\vec{B}$ constant dirigé suivant l'axe Oz . L'Hamiltonien de ce système est donné par $H = \frac{1}{2m}(\vec{P} + e\vec{A})^2$, où $\vec{A}$ est le potentiel vecteur associé au champ $\vec{B}$.

1- Vérifier qu'un choix possible de $\vec{A}$ est $A_x = 0, A_y = Bx, A_z = 0$.

2- Donner l'expression de H pour ce choix de $\vec{A}$.

3- On définit les opérateurs

$$Q = \frac{1}{m\omega}(P_y + eBx) \quad P = P_x$$

où $\omega = \frac{eB}{m}$.

4- Calculer le commutateur de Q et P .

5- Donner l'expression de H en fonction de Q et P ; en déduire les niveaux d'énergie. Ces niveaux portent le nom de niveaux de Landau.