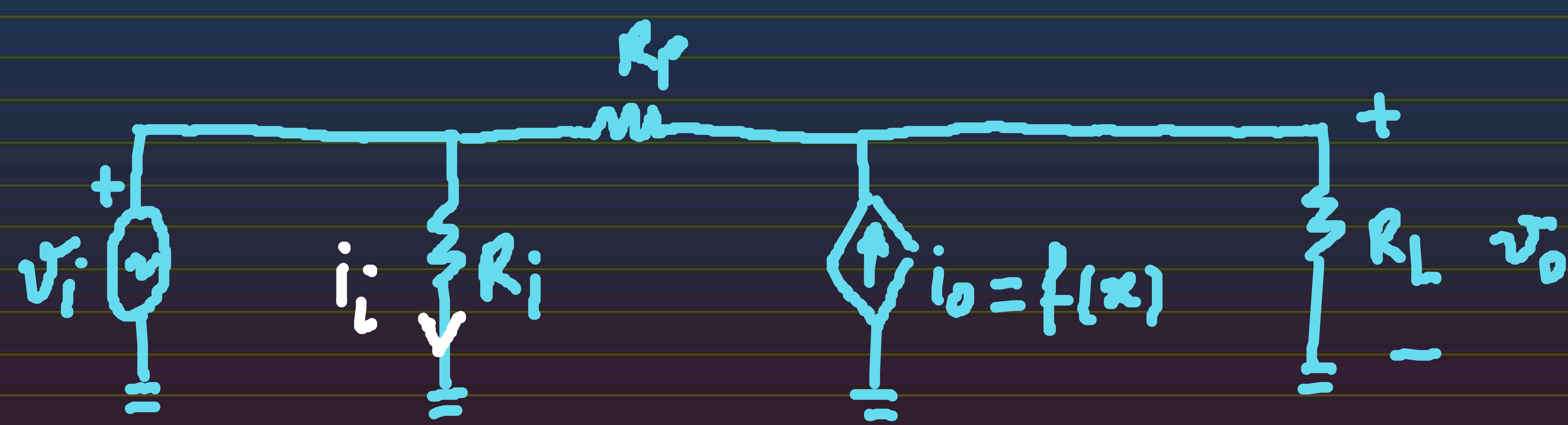
Correction série 1 : SMP4 / 2018/2019

Sections A/B

Ex 1 :

On considère le circuit de la figure 1 :



1/ $f(x) = -g_m v_i = i_o$

La loi des nœuds nous permet d'écrire :

$$\frac{v_i - V_o}{R_f} + i_o = \frac{V_o}{R_L}$$

$$v_i\left(\frac{1}{R_p}-g_m\right)=\frac{v_o}{R_L /\!/ R_p} \quad , \quad R_L /\!/ R_L=\left(\frac{1}{R_L}+\frac{1}{R_p}\right)^{-1}.$$

D'où :

$$v_o = R_L /\!/ R_p\left(\frac{1}{R_p}-g_m\right).\, v_i$$

2°/ $f(x) = -\beta i_i = i_o$

La loi des noeuds entraîne :

$$\frac{v_i - v_o}{R_p}+i_o=\frac{v_o}{R_L}$$

or. $i_o=-\beta i_i=-\beta\frac{v_i}{R_i}$

Soit : $v_i\left(\frac{1}{R_p}-\frac{\beta}{R_i}\right)=\frac{v_o}{R_p /\!/ R_L}$, $v_o = R_p /\!/ R_L\left(\frac{1}{R_p}-\frac{\beta}{R_i}\right).\, v_i.$

A. MAAOUNI

Ex 2 : Selon le principe de superposition, le circuit de la fig. 2 peut être obtenu par la superposition des deux circuits linéaires suivants :

C.O. circuit ouvert.

Fig 2.a:

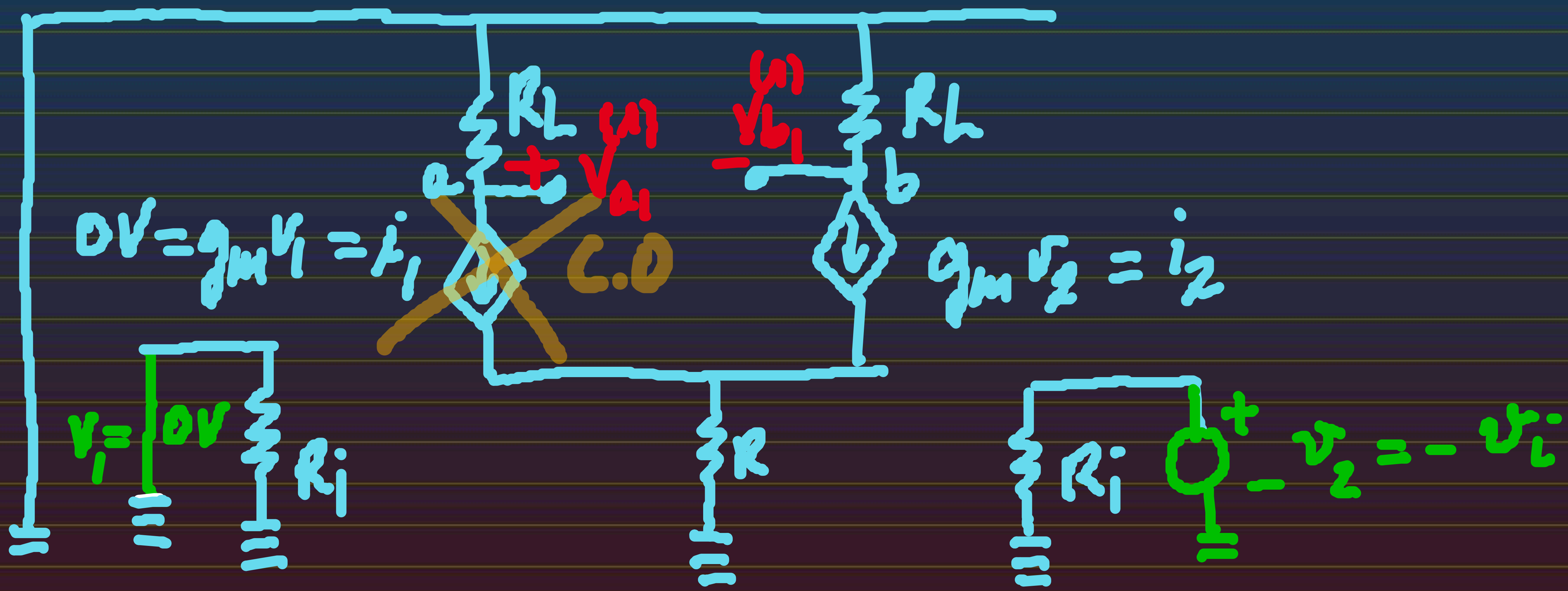
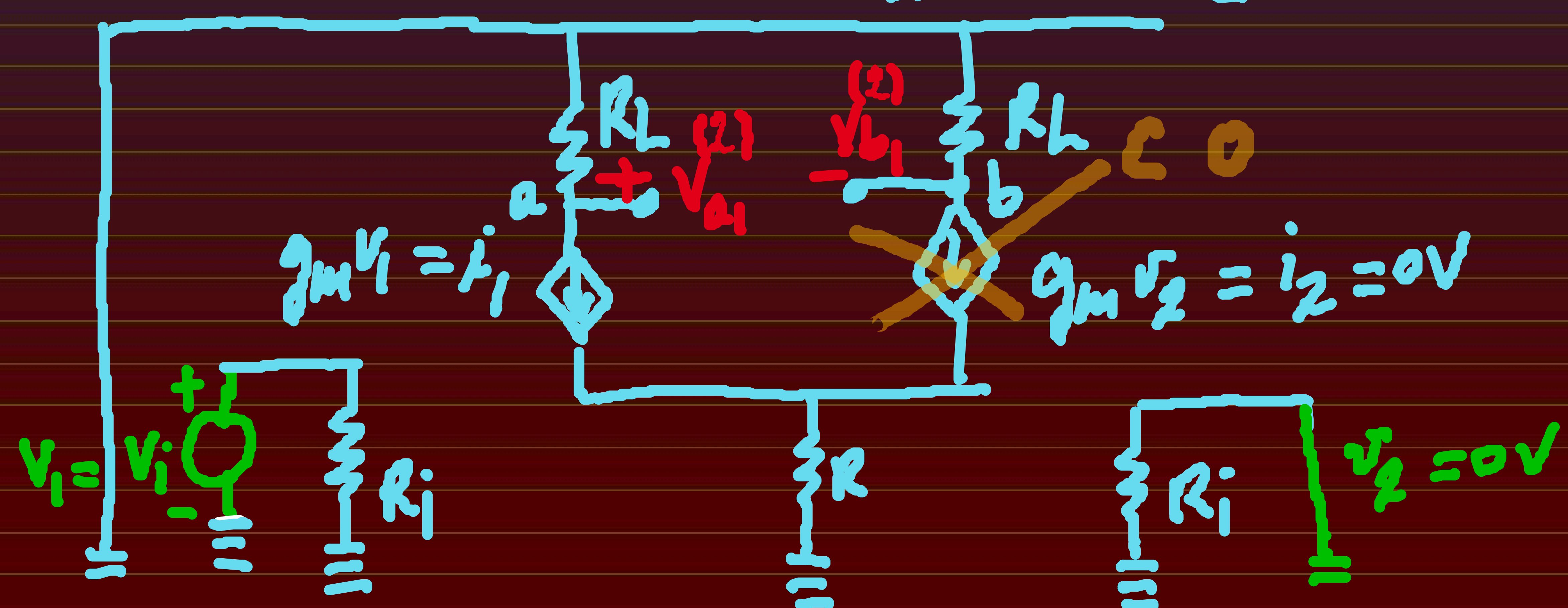


Fig 2.b :



A. MAAOUNI

Fig 2.a : $i_1 = 0A.$

Il n'y a donc pas de chute de tension aux bornes de R_L.

Il s'ensuit que :

$$v_{a_1}^{(1)} = 0V.$$

D'autre part :

$$v_{b_1}^{(1)} = -R_L i_2 = -R_L g_m v_2 = +R_L g_m v_i$$

La tension $v_o^{(1)}$ est :

$$v_o^{(1)} = v_{a_1}^{(1)} - v_{b_1}^{(1)} = -R_L g_m v_i$$

Fig. 2.b : Le courant $i_2 = 0A.$

On en déduit que :

$$v_{b_1}^{(2)} = 0V$$

De plus :

$$v_{a_1}^{(2)} = -g_m v_1 \cdot R_L = -g_m R_L v_i.$$

La tension aux bornes de a et b vaut :

$$v_o^{(2)} = v_{a_1}^{(2)} - v_{b_1}^{(2)}$$

$$= -g_m R_L . v_i .$$

Selon le principe de superposition ; la tension aux bornes de a et b du circuit de la fig. 2 est donc :

$$v_o = v_o^{(1)} + v_o^{(2)}$$

$$= -2 g_m R_L v_i .$$

A. MAAOUNI

Ex3. Compte tenu du Théorème de Thévenin, le circuit de la fig. 3 peut être mis sous la forme équivalente suivante :

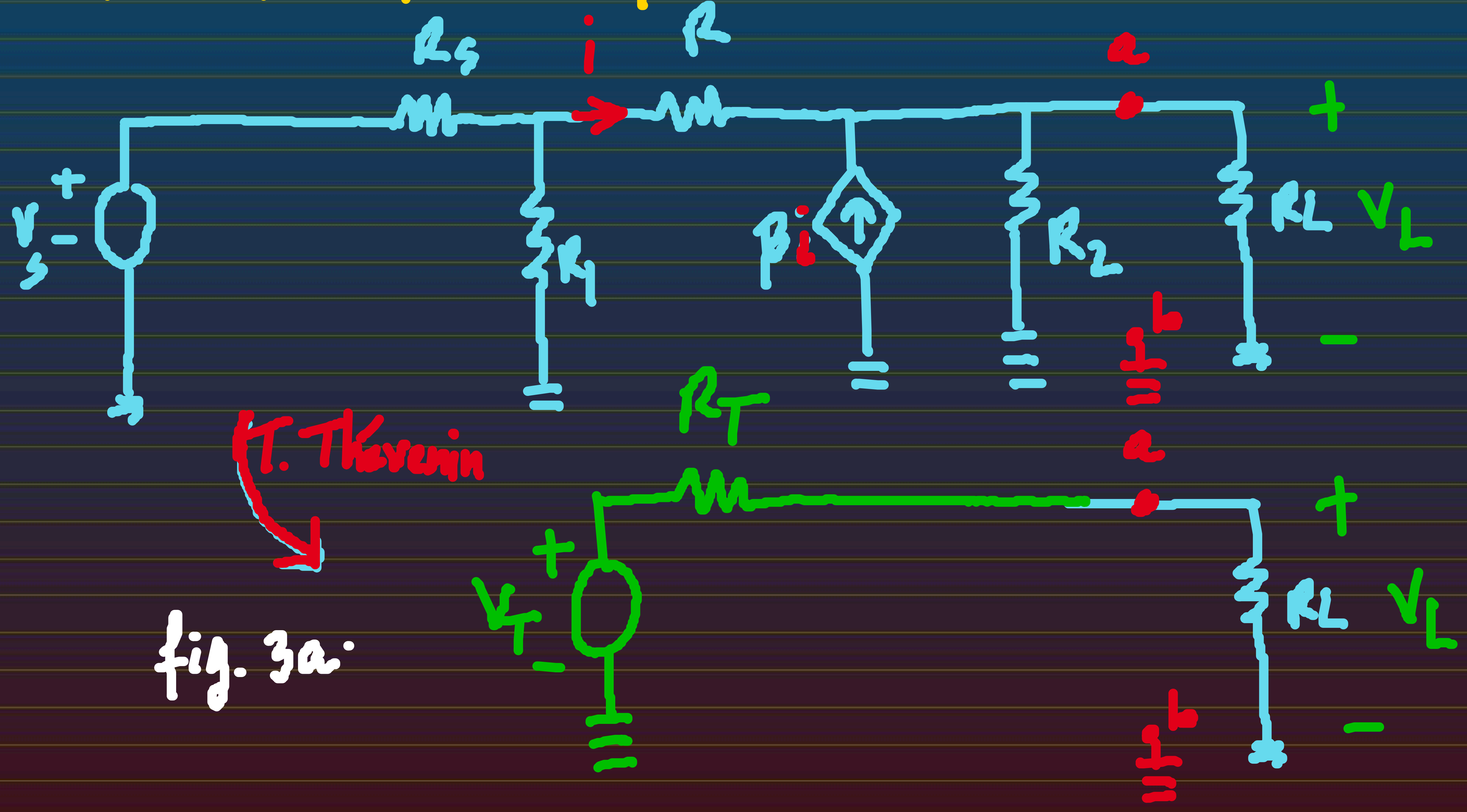


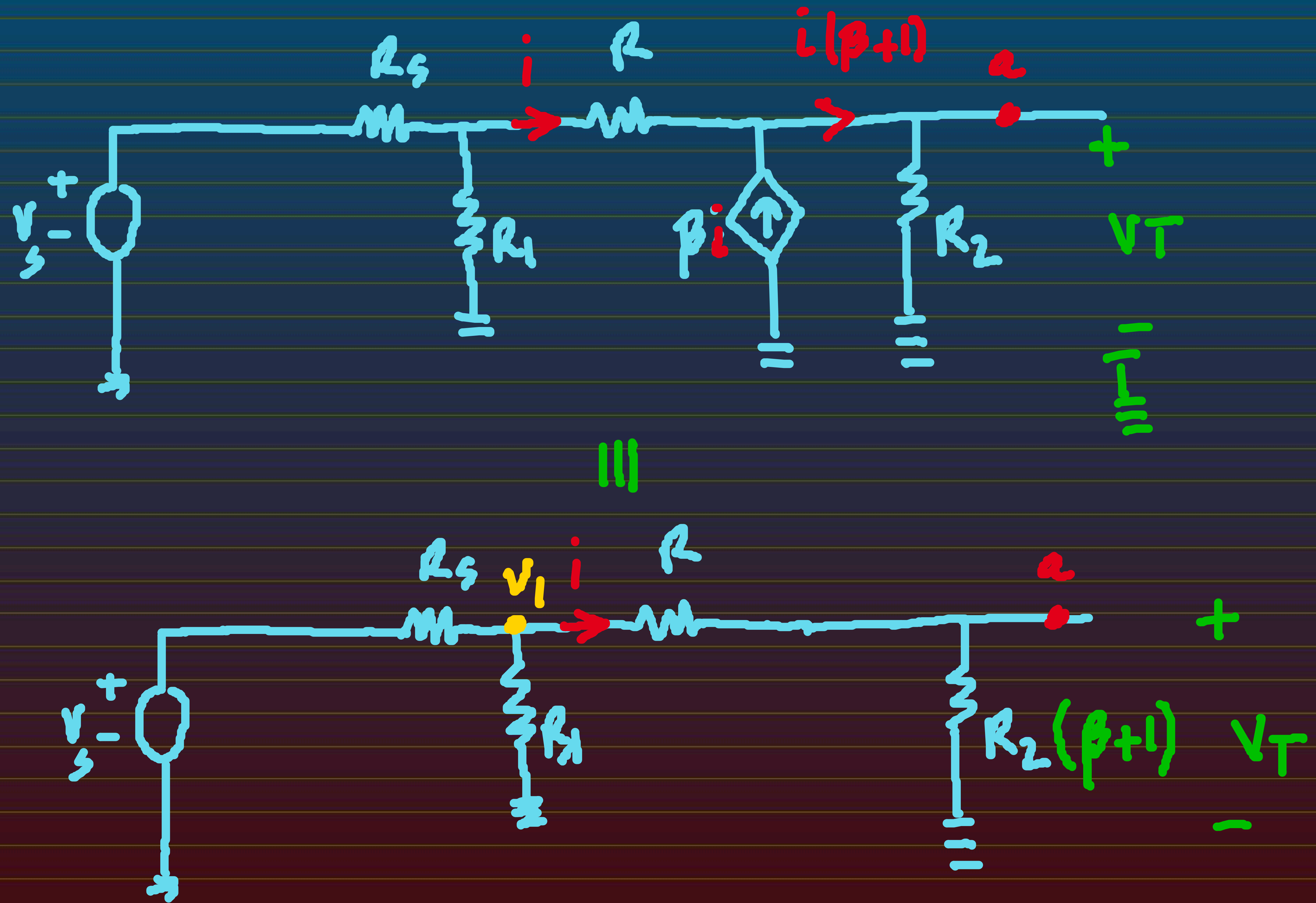
fig. 3a :

V_T : La tension en circuit ouvert (RL débranchée).

R_T : Résistance vue par les bornes (a,b) avec sources indépendantes éteintes.

A. MAAOUNI

– Détermination de V_T :



La loi 'Diviseur de tension (LDT)' entraîne :

$$V_T = \frac{R_2(\beta+1)}{R + R_2(\beta+1)} V_1 = \frac{R_2(\beta+1)}{R + (\beta+1)R_2} \cdot \frac{R_1 \parallel \left(R + R_2(\beta+1)\right)}{\left(R_2(\beta+1)+R\right) \parallel R_1 + R_S} v_S$$

$$V_T = \frac{R_2(\beta+1) \cdot R_1}{R_1\left(R_2(\beta+1)+R\right) + R_s\left(R_1 + R + R_2(\beta+1)\right)} \, v_s$$

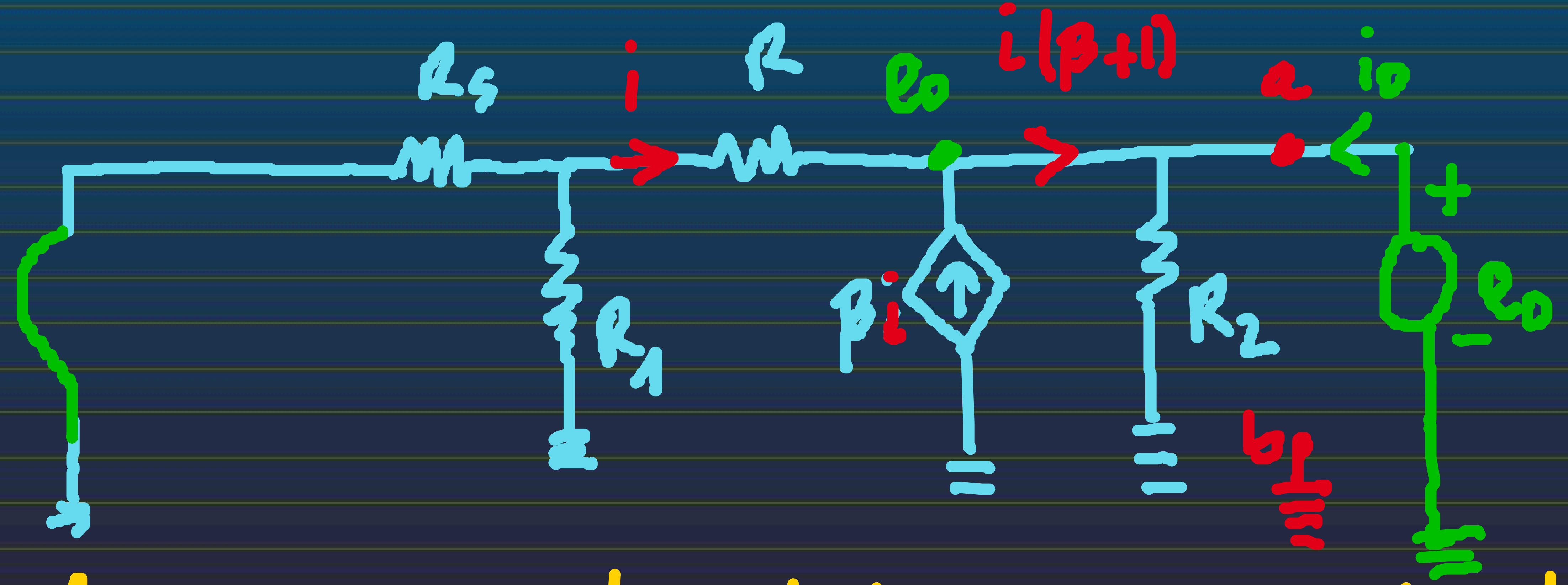
$$= \frac{R_2(\beta+1) \, R_1}{(R_1+R_s) \, R_2(\beta+1) + R(R_1+R_s) + R_1 R_s} \, v_s$$

$$= \frac{R_1}{R_1+R_s} \quad \frac{R_2}{R_2 + \dfrac{R + R_1 \| R_s}{(\beta+1)}} \cdot v_s$$

$$= \frac{R_1}{R_1+R_s} \cdot \frac{(\beta+1)}{R + R_1 \| R_s} \cdot \quad R_2 \| \left(\frac{R + R_1 \| R_s}{\beta+1} \right) v_s .$$

Détermination de R_T

schéma :



on débranche R_L, on éteind la source indépendante et on alimente la sortie (a, b) par un générateur e_0 qui débite le courant i_0.

La résistance R_T est définie par:

$$R_T = \frac{e_0}{i_0}.$$

On a :

$$i_0 = \frac{e_0}{R_2} - (\beta+1)i \quad \text{et} \quad i = \frac{-e_0}{R_1/\!/R_S + R}.$$

A. MAAOUNI

Il s'ensuit que :

$$i_o = \frac{e_o}{R_2} + (\beta+1)\frac{e_o}{R_S \| R_1 + R}$$

$$\frac{1}{R_T} = \frac{i_o}{e_o} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{\frac{R_1 \| R_S + R}{\beta+1}}$$

soit :

$$R_T = R_2 \| \left(\frac{R_1 \| R_S + R}{\beta+1}\right).$$

- Tension V_L :

L'application de la LDT au circuit de la fig. 3.a, se traduit par :

$$V_L = \frac{R_L}{R_L + R_T} \cdot V_T \cdot = R_L \| R_T \cdot \frac{R_1}{R_S + R_1} \frac{(\beta+1)}{R + R_1 \| R_S} v_s$$

A. MAAOUNI

Application du théorème de Norton:

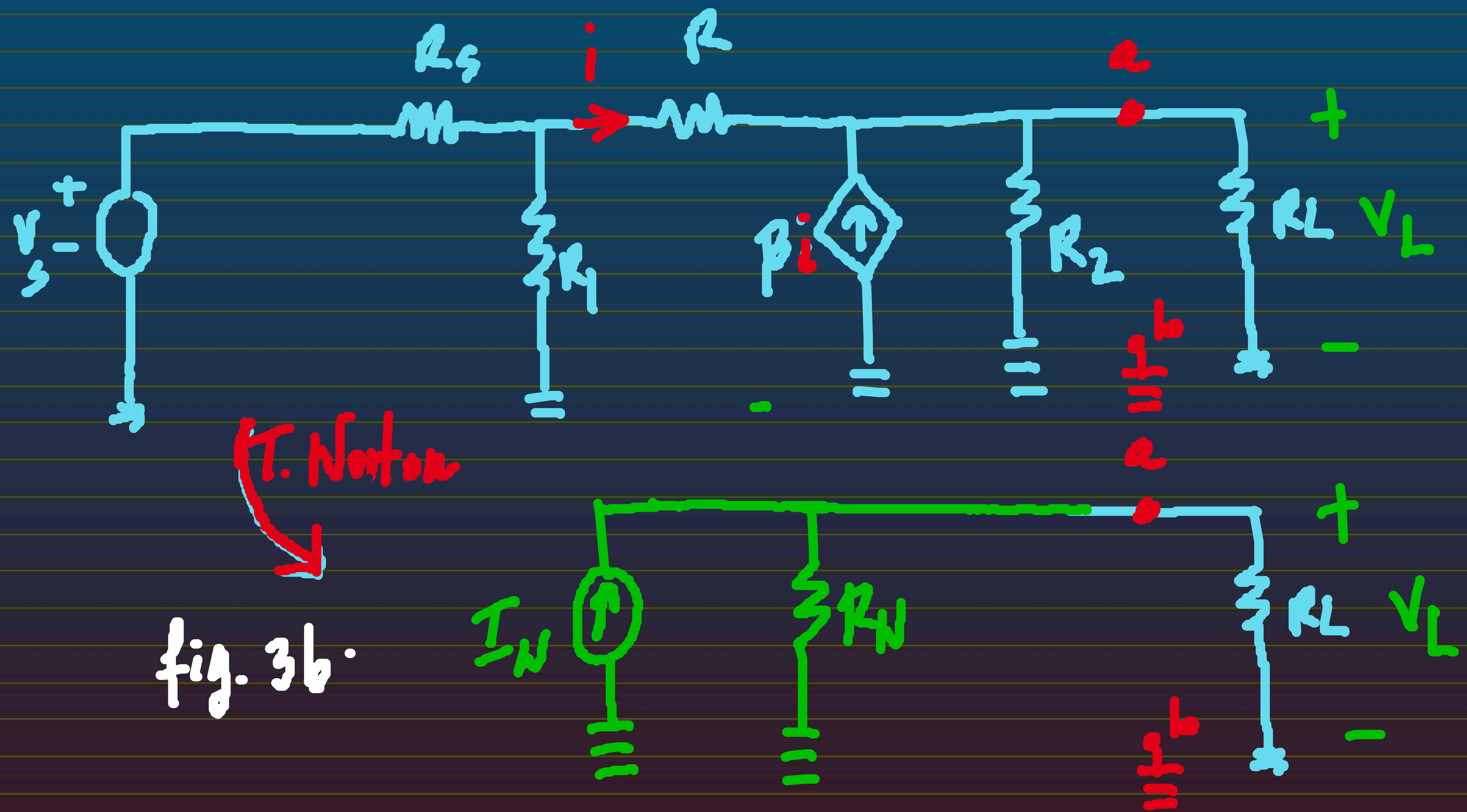


fig. 3b.

I_N : Courant de court-circuit entre a et b.

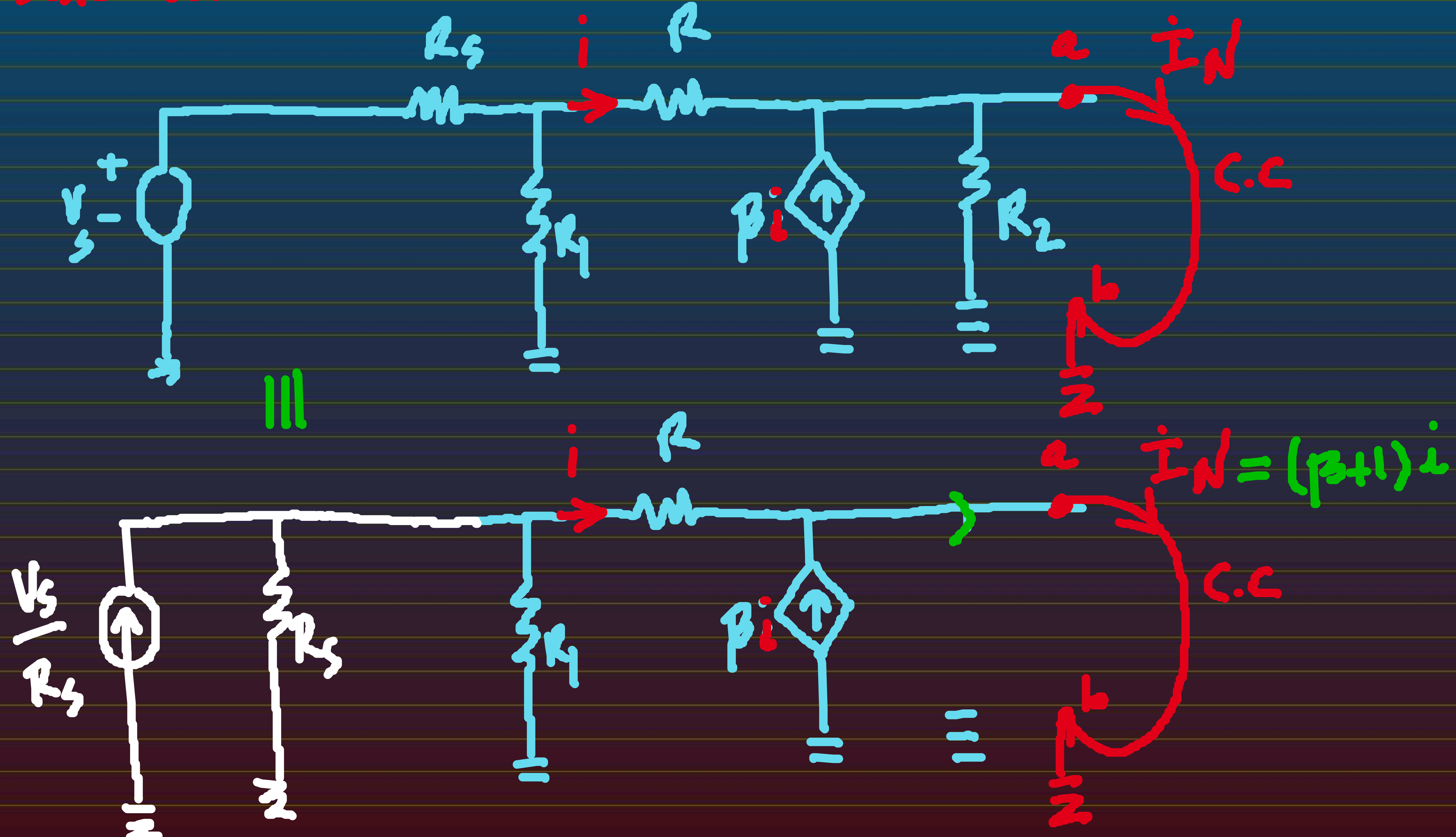
R_N : Résistance vue par la bornes (a,b) avec source indépendante nulle.

[C'est exactement la résistance R_T].

A. MAAOUNI

- Détermination de I_N :

schéma:



La loi 'diviseur de courant' (LDC) nous permet d'écrire :

$$i = \frac{R_S \| R_1 \| R}{R} \cdot \frac{V_S}{R_S}$$

A. MAAOUNI

On en déduit que :

$$I_N = (\beta+1)\,\frac{R_S \| R_1 \| R}{R}\cdot\frac{v_S}{R_S}$$

La LDC appliquée au circuit de la fig.36 se traduit par :

$$v_L = (R_N \| R_L) I_N = (R_T \| R_L)(\beta+1)\,\frac{R_S \| R_1 \| R}{R}\cdot\frac{v_S}{R_S}.$$

où

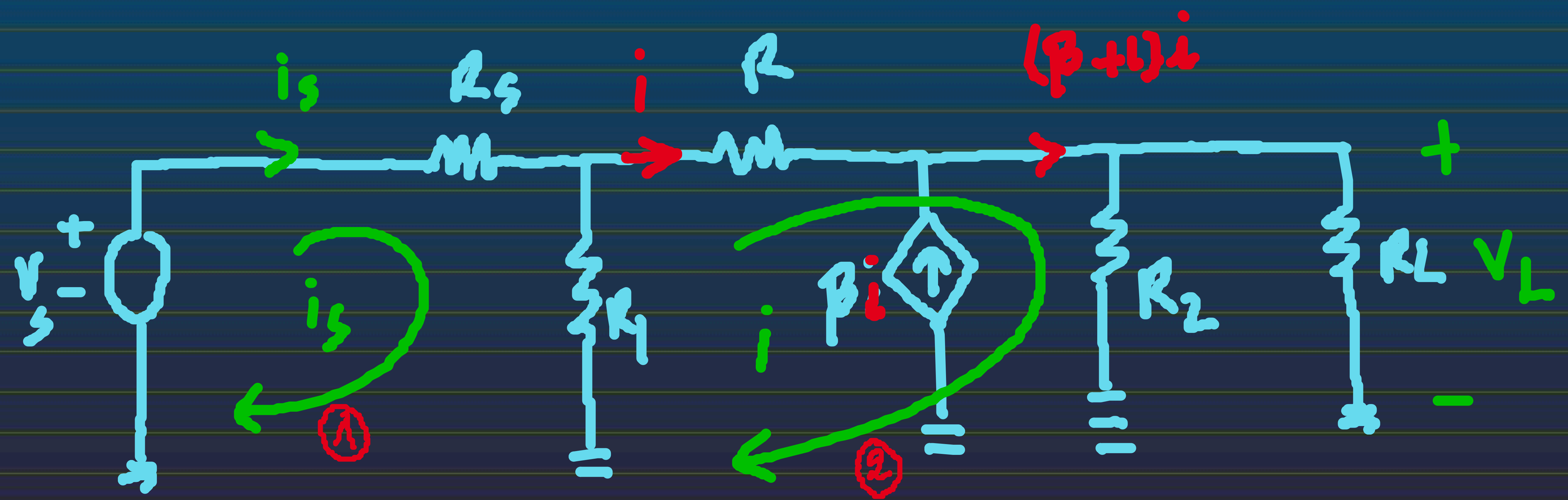
$$R_T = \overbrace{R_E \| \left(\frac{R_1 \| R_S + R}{\beta+1}\right)}$$

$$v_L = R_L \| R_T \cdot \frac{\beta+1}{R_S \| R_1 + R}\cdot\frac{R_1}{R_1+R_S}\cdot v_S$$

Note : Le résultat ci-dessus coïncide avec celui de la diapo. 10.

Ex 4 :

1/ _ Méthode des mailles :



maille 1 :

$$-v_s + R_s i_s + R_1 (i_s - i) = 0$$

maille 2 :

$$-R_1(i_s - i) + Ri + i(R_2 \| R_L)(\beta+1) = 0$$

Le système ci-dessus peut être réécrit sous forme matricielle suivante:

$$\begin{pmatrix} R_s + R_1 & -R_1 \\ -R_1 & R_1 + R + (R_2 \| R_L)(\beta+1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_s \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_s \\ 0 \end{pmatrix}$$

A. MAAOUNI

On a :

$$\Delta = (R_S+R_1)\left(R_1+R+(R_2 \parallel R_L)(\beta+1)\right)-R_1^2$$

$$= (R_S+R_1)\left(R+(R_2 \parallel R)(\beta+1)\right)+R_S R_1$$

$$\Delta_i = R_1 v_S$$

$$i = \frac{R_1}{R_S R_1+(R_S+R_1)\left(R+(R_2 \parallel R_L)(\beta+1)\right)} v_S$$

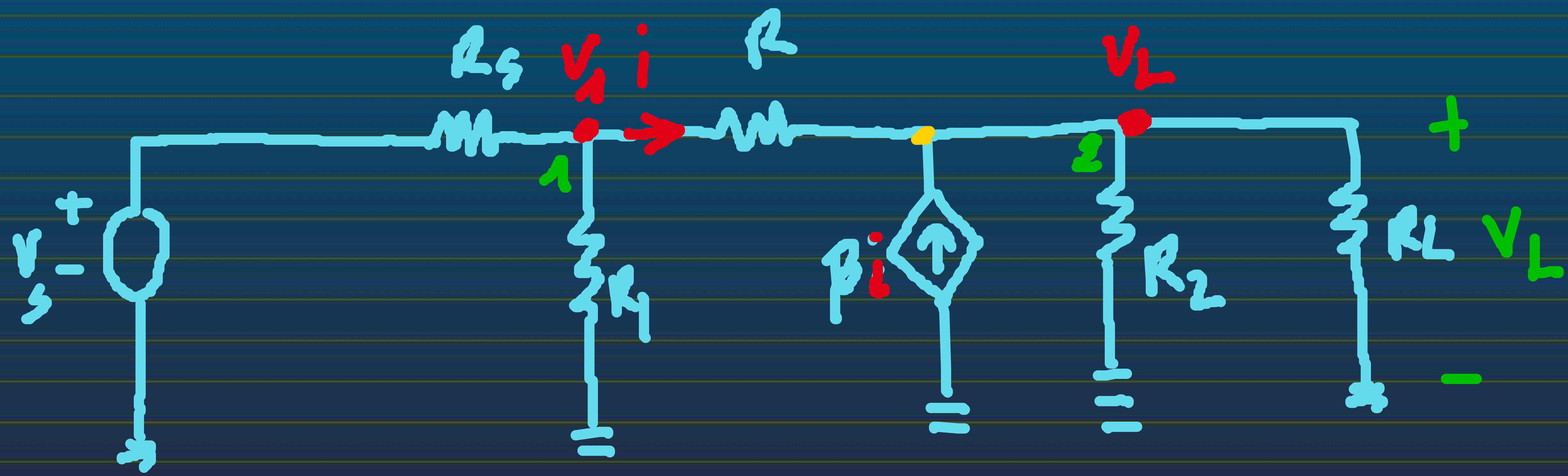
$$= \frac{R_1}{R_1+R_S} \frac{1}{R_S \parallel R_1 + R + (R_2 \parallel R_L)(\beta+1)} v_S$$

La tension v_L vaut :

$$v_L = (\beta+1) R_2 \parallel R_L \cdot i = \frac{R_1}{R_1+R_S} \frac{R_2 \parallel R_L \cdot \frac{(R_S \parallel R_1+R)}{\beta+1}}{\frac{R_S \parallel R_1+R}{\beta+1}+R_2 \parallel R_L} \frac{(\beta+1)}{R_S \parallel R_1+R} v_S$$

$$v_L = \frac{R_1}{R_1+R_S} \cdot R_L \parallel R_T \cdot \frac{(\beta+1)}{R_S \parallel R_1+R} v_S$$ (même résultat que Diap.10).

2 _ Méthode des Noeuds :



Noeud 1 :

Loi des Noeuds :

Noeud 2 :

Loi des Noeuds :

$$\begin{cases} \dfrac{-V_S+V_1}{R_S} + \dfrac{0+V_1}{R_1} + \dfrac{-V_L+V_1}{R} = 0 \\[2ex] \dfrac{V_L-V_1}{R} + \dfrac{V_L}{R_2} + \dfrac{V_L}{R_L} = \beta i \, ; \end{cases} \qquad i = \dfrac{V_1-V_L}{R}.$$

La réécriture du système d'équations ci-dessus donne :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_S \| R_1} + \frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \\ -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} + \frac{1}{R_2 \| R_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{V_S}{R_S} \\ \beta \left(\frac{V_1 - V_L}{R} \right) \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{R_S \| R_1} + \frac{1}{R} & -\frac{1}{R} \\ -\frac{(\beta+1)}{R} & \frac{\beta+1}{R} + \frac{1}{R_2 \| R_L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{V_S}{R_S} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Delta = \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{R_2 \| R_L} + \frac{1}{R_S \| R_1} \left(\frac{\beta+1}{R} + \frac{1}{R_2 \| R_L} \right)$$

$$\Delta V_L = \frac{\beta+1}{R R_S} \cdot V_S$$

$$v_L = \frac{\Delta v_L}{\Delta} = \frac{(\beta+1)/(R_S R)}{\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{R_2\|R_L} + \frac{1}{R_S\|R_1}\left(\frac{\beta+1}{R}+\frac{1}{R_2\|R_L}\right)}\, v_S$$

$$= \frac{(\beta+1)/(R_S\cdot R)}{\frac{1}{R_2\|R_L}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_S\|R_1}\right)+\frac{(\beta+1)}{R_S\|R_1\cdot R}}\, v_S.$$

$$= (\beta+1)\,\frac{R_S\|R_1}{R_S}\cdot\frac{(R_2\|R_L)}{R+R_1\|R_S+(\beta+1)\,R_2\|R_L}\cdot v_S$$

$$= (\beta+1)\,\frac{R_1}{R_1+R_S}\cdot\frac{1}{R+R_1\|R_S}\;\frac{R_2\|R_L\cdot\frac{R+R_1\|R_S}{\beta+1}}{\frac{R+R_1\|R_S}{\beta+1}+R_2\|R_L}\, v_S$$

Ainsi on retrouve le résultat de la diapo. 10 :

$$v_L = (\beta+1)\,\frac{R_1}{R_1+R_S}\cdot\frac{1}{R+R_1\|R_S}\cdot R_L\,\|\,R_T\cdot v_S.$$

A. MAAOUNI

3 _ Théorème de Miller :

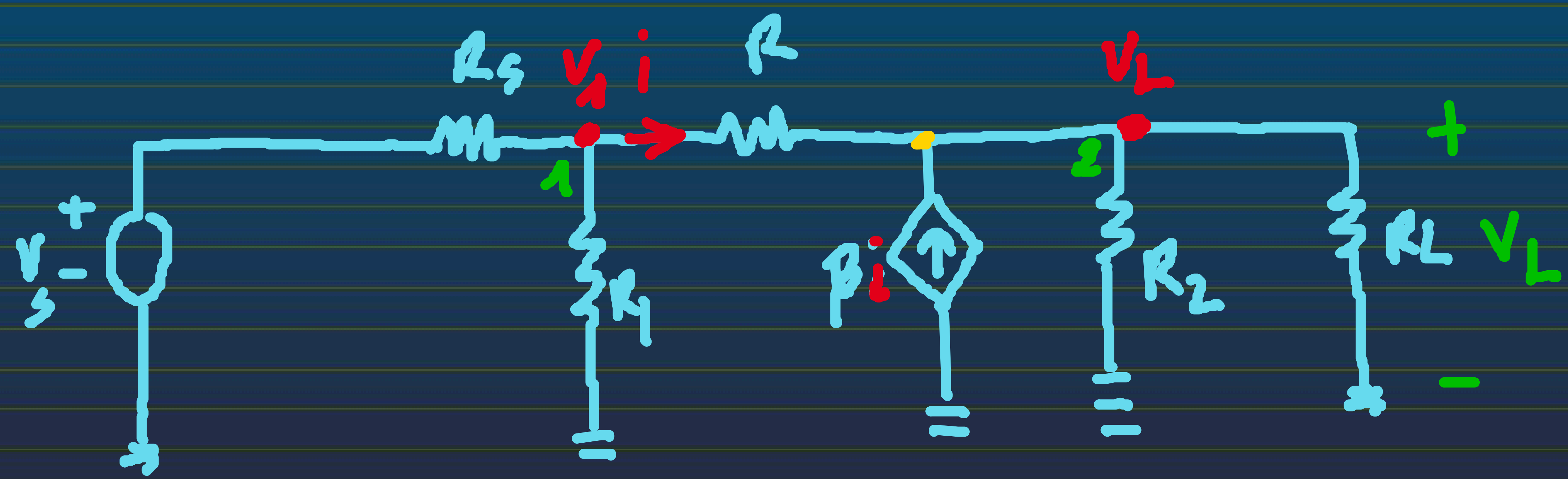
Soient deux nœuds (1) et (2) d'un réseau électrique connectés par une impédance Z. On désigne par V_1 et V_2 les potentiels respectifs des nœuds (1) et (2).

Selon le Théorème de Miller, on a l'équivalence suivante :

Démo fig.a : $i = \frac{V_1 - V_2}{Z} = V_1\left(\frac{1-A}{Z}\right)$ d'où $V_1 = \frac{Z}{1-A}\cdot i$.

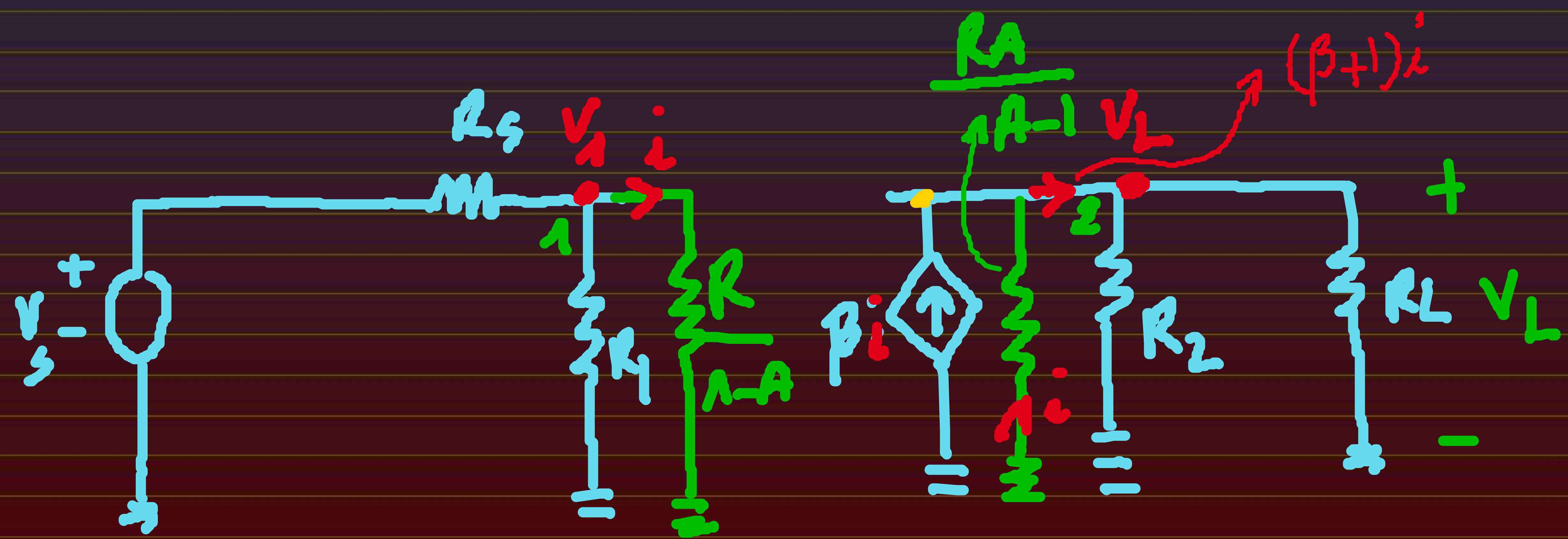
$i = (V_1 - V_2)/Z = -V_2\left(\frac{1 - 1/A}{Z}\right) = -V_2/\left(\frac{AZ}{A-1}\right)$ soit $V_2 = -\frac{ZA}{A-1} i$.

Application: Considérons le circuit de la figure 3, ci-dessous:



posons :

$A = \frac{V_L}{V_1}$. Selon le Théorème de Miller, le circuit ci-dessous devient:



$V_L = (R_L \| R_2)(\beta+1)\, i$;

$$i = \frac{V_1}{\frac{R}{1-A}}.$$

D'où :
$$V_L = \frac{1-A}{R} \cdot (R_2 \| R_L)(\beta+1)\, V_1$$

$$\frac{V_L}{V_1} = A = \frac{1-A}{R}(R_2 \| R_L)(\beta+1)$$

$$A \cdot \left(1 + \frac{R_2 \| R_L}{R}(\beta+1)\right) = \frac{(R_2 \| R_L)(\beta+1)}{R}$$

$$A = \frac{V_L}{V_1} = \frac{(R_2 \| R_L)(\beta+1)}{(R_2 \| R_L)(\beta+1) + R}.$$

D'autre part, la LDT permet d'écrire :

$$V_1 = \frac{R_1 \| \left(\frac{R}{1-A}\right)}{R_1 \| \left(\frac{R}{1-A}\right) + R_S} \cdot V_s$$

Finalement :

$$V_L = A \cdot \frac{V_1}{V_s} V_s = A \cdot \frac{R_1 \| \frac{R}{1-A}}{R_1 \| \frac{R}{1-A} + R_s} \cdot V_s$$

$$= \cancel{\frac{1-A}{R}} (R_2 \| R_L)(\beta+1) \cdot \frac{\left(R_1 \cdot \cancel{\frac{R}{1-A}}\right) / \left(R_1 + \frac{R}{1-A}\right)}{\frac{R_1 \cdot R}{1-A} / \left(R_1 + \frac{R}{1-A}\right) + R_s}$$

Or :

$$1-A = \frac{R}{R + R_2 \| R_L (\beta+1)} \quad ; \quad \frac{R}{1-A} = R + (R_2 \| R_L)(\beta+1)$$

D'où :

$$V_L = (R_2 \| R_L)(\beta+1)\, R_1 \frac{1}{R_1\left(R + (\beta+1) R_2 \| R_L\right) + R_s\left(R_1 + R + (R_2 \| R_L)(\beta+1)\right)} v_s$$

$$V_L = (\beta+1) \frac{R_1}{R_s + R_1} \cdot \frac{R_2 \| R_L}{R + R_s \| R_1 + (\beta+1) R_2 \| R_L} v_s$$

$$V_L = (\beta+1)\frac{R_1}{R_S+R_1}\cdot\frac{R_2 \| R_L}{R + R_S \| R_1 + (\beta+1) R_2 \| R_L}\, v_S$$

$$= (\beta+1)\frac{R_1}{R_S+R_1}\cdot\frac{R_2 \| R_L \cdot \dfrac{R + R_S \| R_1}{\beta+1}}{\dfrac{R + R_S \| R_1}{\beta+1} + R_2 \| R_L}\cdot\frac{1}{R + R_S \| R_1}\, v_S$$

$$= (\beta+1)\frac{R_1}{R_S+R_1}\cdot R_L \| R_T \cdot \frac{1}{R + R_S \| R_1}\cdot v_S.$$

On retrouve ainsi le résultat de la Diapo. no.

Fini.

A. MAAOUNI