

Quadripôles/ Réponse en fréquence et diagramme de Bode

Chapitre 1

Dans ce chapitre la définition des quadripôles, leurs différents types ainsi que leurs paramètres sont étudiés. L'analyse fréquentielle et le tracé des diagrammes de Bode des fonctions de transfert associées aux quadripôles sont présentés.

Université Mohammed V

Faculté des Sciences Rabat

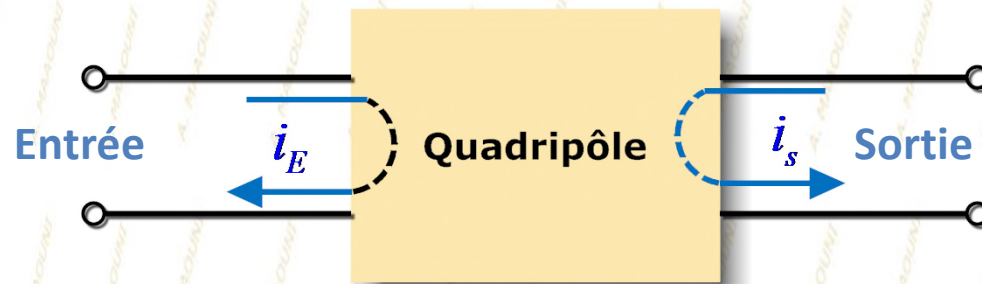
Electronique
SMP5 2015/2016

Pr. A. MAAOUNI

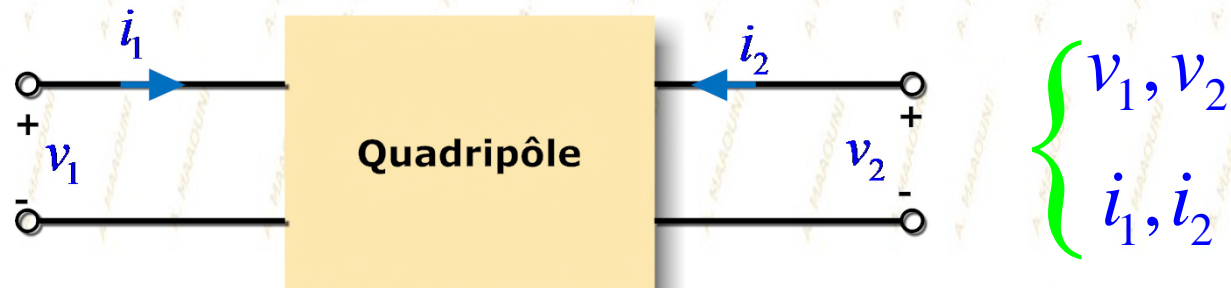
Quadripôles

Définition

Un quadripôle est une partie du réseau qui communique avec l'extérieur par deux paires de bornes.



- Le courant qui rentre à chacun des dipôles doit être égal à celui qui en sort.
- Le quadripôle est caractérisé par les quatre grandeurs :

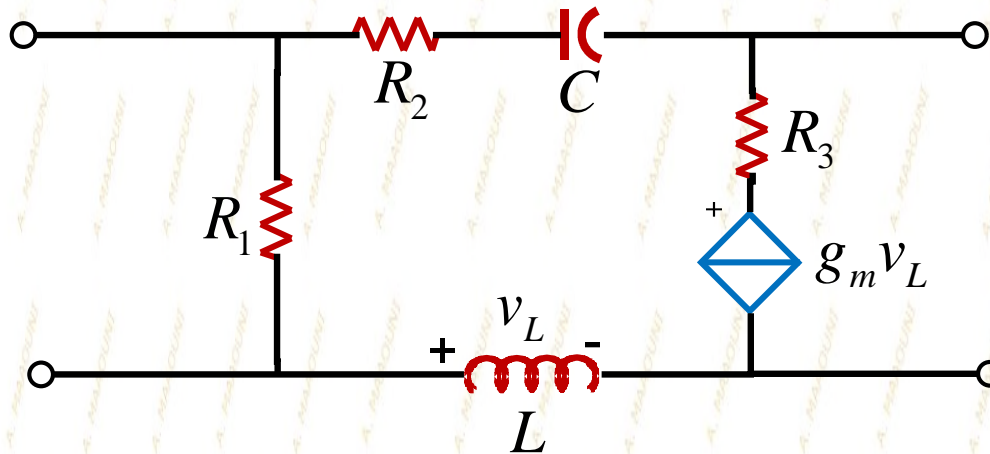


Pr. A. MAAOUNI

Différents types de quadripôles

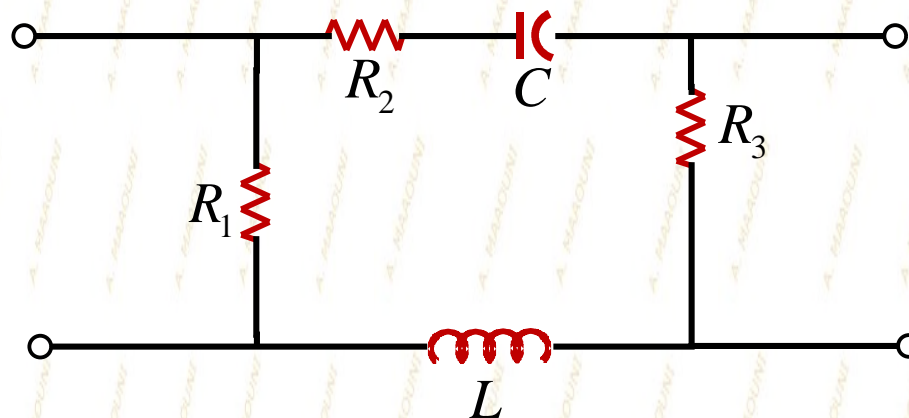
On peut classer les quadripôles linéaires en un certain nombre de catégories :

Quadripôles actifs



un quadripôle actif comporte des sources liées à des générateurs internes (Exemple: Cf. figure ci contre)

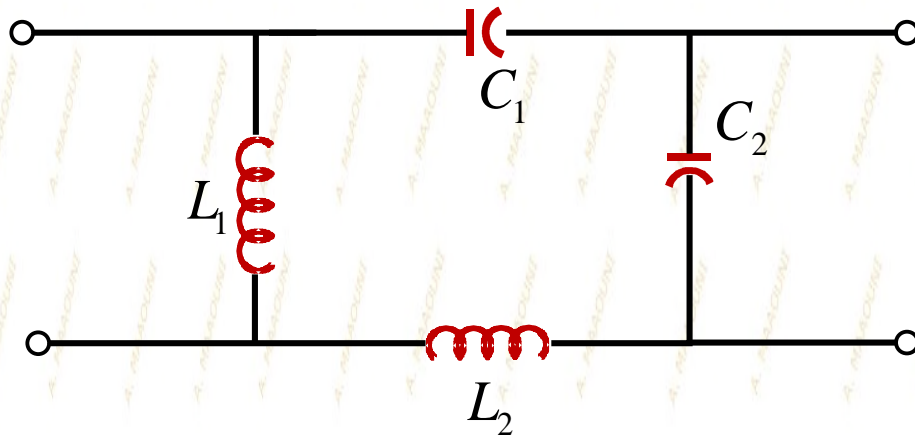
Quadripôles passifs



un quadripôle passif ne contient aucune source (cf. figure ci contre)

Pr. A. MAAOUNI

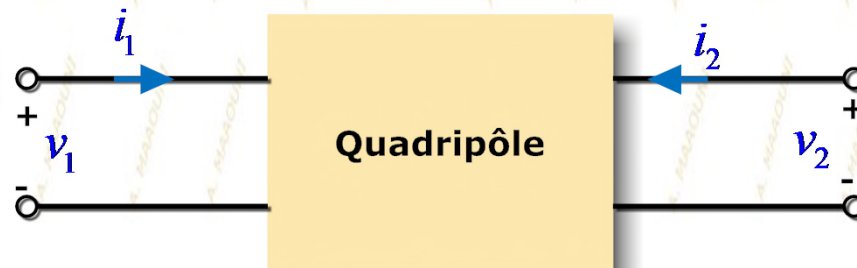
Quadripôles réactifs



un quadripôle réactif est composé uniquement de bobines et capacités parfaites (voir exemple ci contre).

Paramètres d'un quadripôle

Nous étudions des quadripôles linéaires : les quatre grandeurs v_1, i_1, v_2, i_2 sont liées par des relations linéaires. Les coefficients de ces relations sont appelés *paramètres du quadripôle*.



Pr. A. MAAOUNI

Paramètres impédances, admittances et association série, parallèle

Paramètres Z

Ils permettent d'exprimer les tensions en fonction des courants.

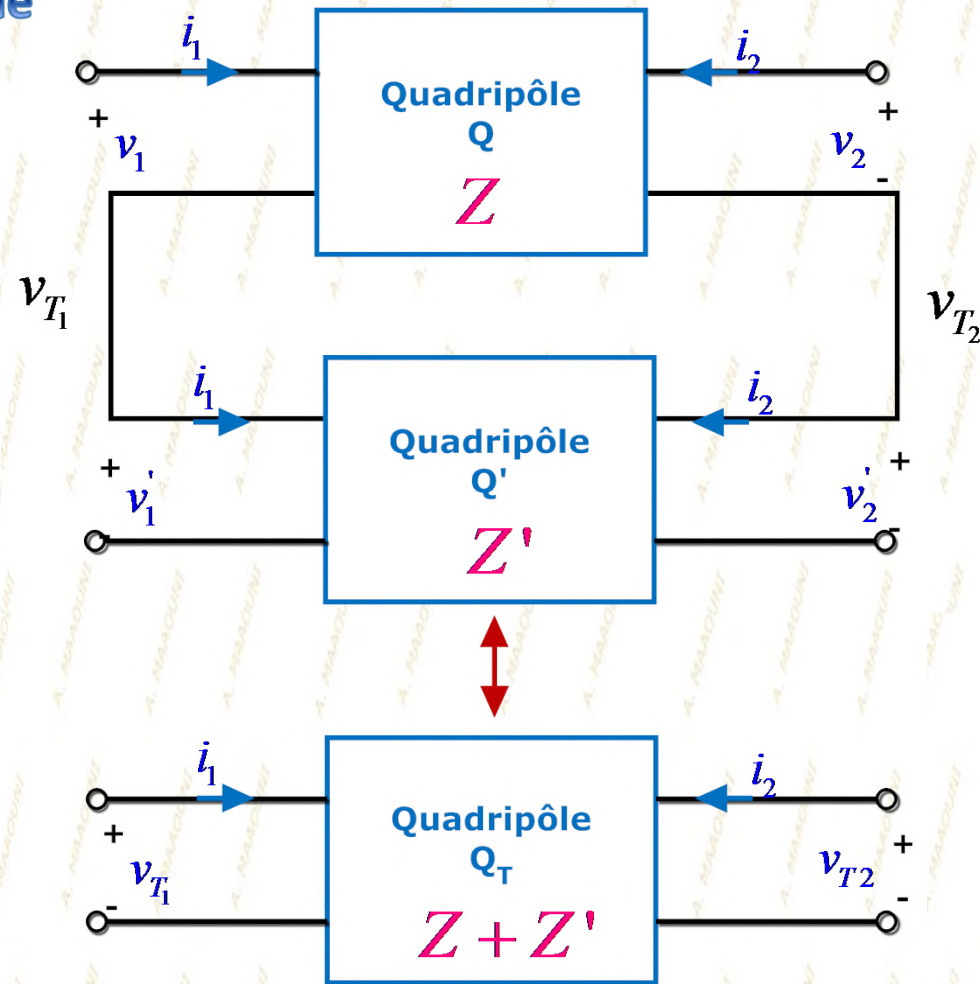
$$\begin{aligned}v_1 &= z_{11}i_1 + z_{12}i_2 \\v_2 &= z_{21}i_1 + z_{22}i_2\end{aligned}$$

Soit, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}}_{\mathbf{Z}} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

\mathbf{Z} est la matrice impédance du quadripôle

Association série



$$\begin{pmatrix} v_{T1} \\ v_{T2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = Z \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + Z' \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \underbrace{(Z + Z')}_{Z_T} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

Paramètres Y

On les définit en exprimant les courants en fonction des tensions.

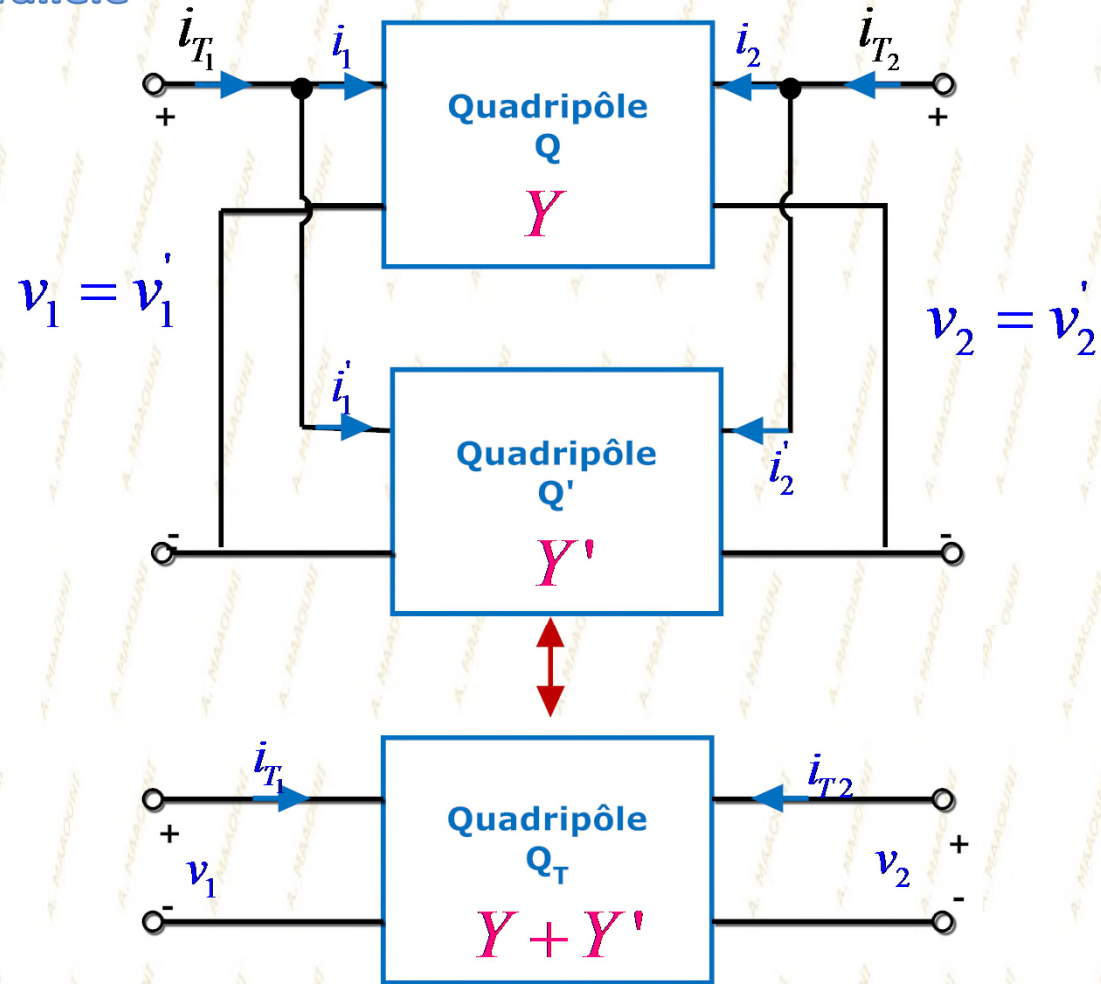
$$\begin{aligned}i_1 &= y_{11}v_1 + y_{12}v_2 \\i_2 &= y_{21}v_1 + y_{22}v_2\end{aligned}$$

Soit, sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}}_{Y=Z^{-1}} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Y est la matrice admittance du quadripôle

Association parallèle



$$\begin{pmatrix} i_{T1} \\ i_{T2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_1' \\ i_2' \end{pmatrix} = Y \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + Y' \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \underbrace{(Y + Y')}_{Y_T} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Paramètres hybrides et associations série-parallèle, parallèle-série

Paramètres h

Ils permettent d'exprimer la tension d'entrée et le courant de sortie en fonction du courant d'entrée et de la tension de sortie:

$$\begin{aligned}v_1 &= h_{11}i_1 + h_{12}v_2 \\i_2 &= h_{21}i_1 + h_{22}v_2\end{aligned}$$

On peut écrire ces deux équations sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}}_h \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

h est la matrice hybride du quadripôle

Paramètres g

Une seconde combinaison entre les grandeurs donne i_1, v_2 en fonction de v_1, i_2 :

$$i_1 = g_{11}v_1 + g_{12}i_2$$

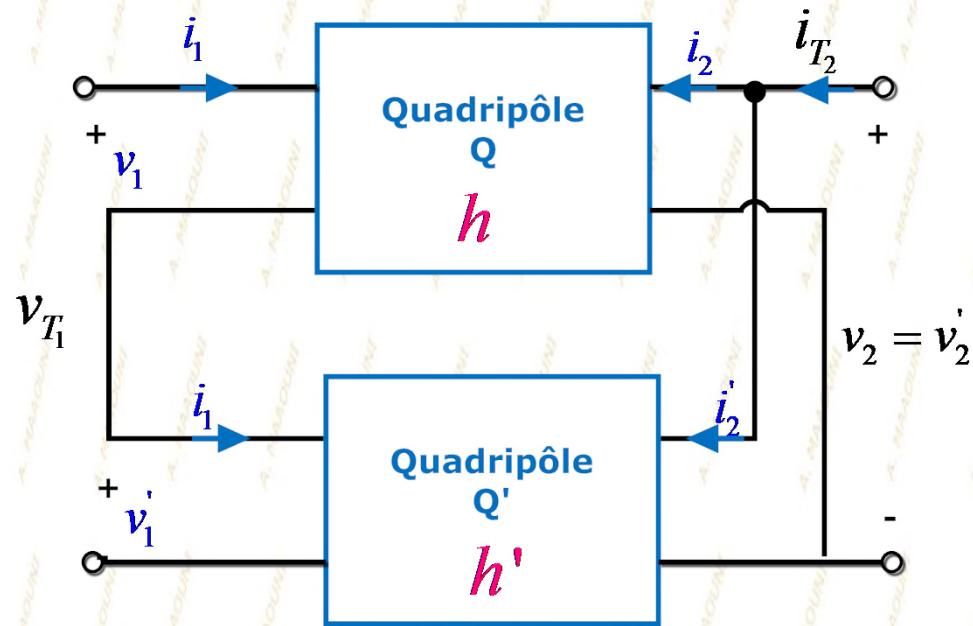
$$v_2 = g_{21}v_1 + g_{22}i_2$$

On peut écrire ces deux équations sous forme matricielle :

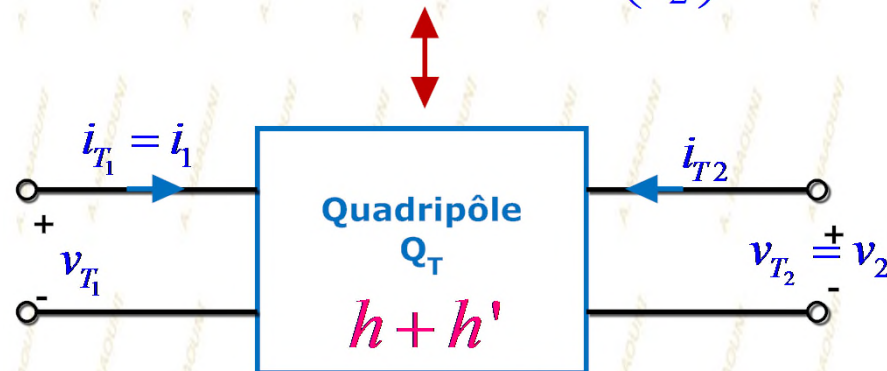
$$\begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}}_{g=h^{-1}} \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix}$$

g Est aussi une matrice hybride du quadripôle

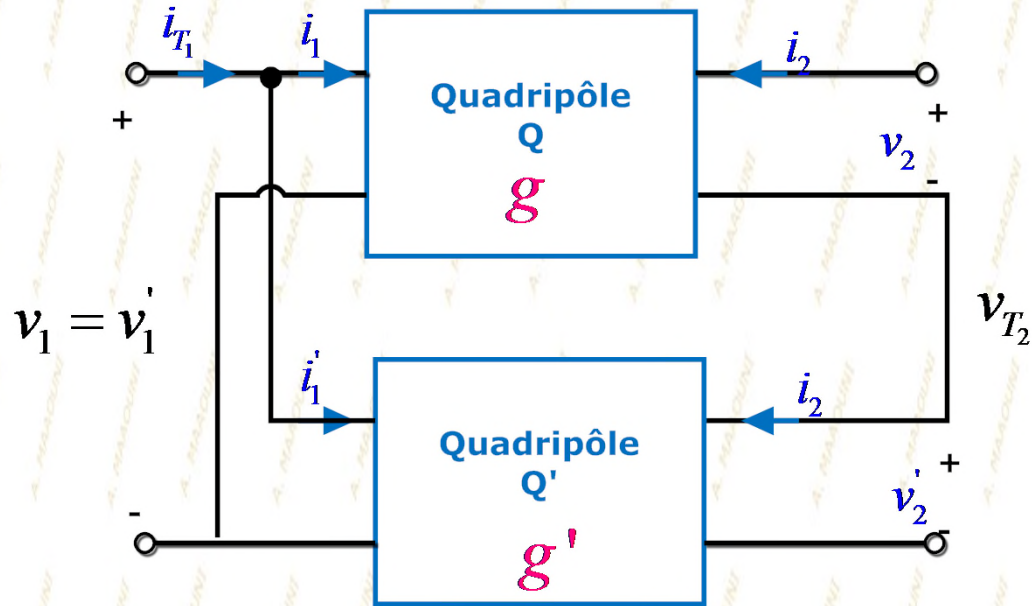
Association série-parallèle



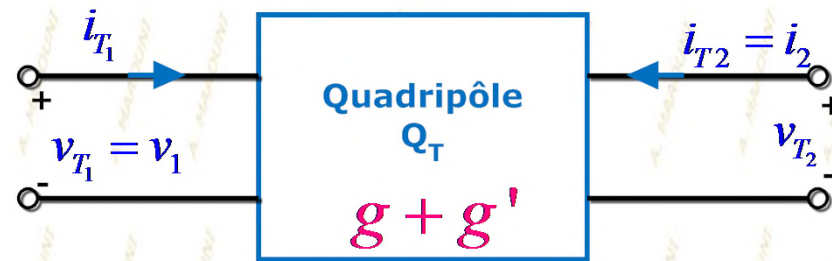
$$\begin{pmatrix} v_{T1} \\ i_{T2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1' \\ i_2' \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + h' \begin{pmatrix} i_1 \\ \underbrace{v_2}_{v_2} \end{pmatrix} = \underbrace{(h + h')}_{h_T} \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$



Association parallèle-série



$$\begin{pmatrix} i_{T1} \\ v_{T2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = g \begin{pmatrix} v_1 \\ i_2 \end{pmatrix} + g' \begin{pmatrix} v_1' \\ i_2' \end{pmatrix} = \underbrace{(g + g')}_{g_T} \begin{pmatrix} v_{T1} = v_1 \\ i_{T2} = i_2 \end{pmatrix}$$



Paramètres de chaîne et association cascade

Ils définissent une relation entre les grandeurs d'entrées (v_1, i_1) et les grandeurs de sorties (v_2, i_2) :

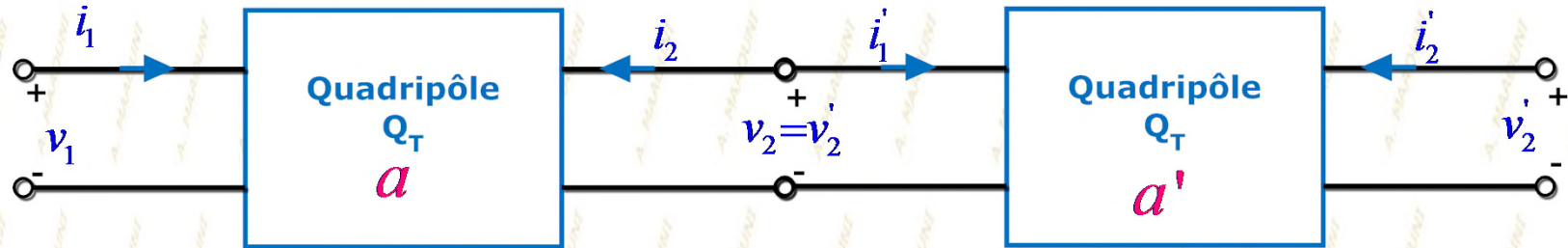
$$\begin{aligned}v_1 &= Av_2 - Bi_2 \\ i_1 &= Cv_2 - Di_2\end{aligned}$$

Sous forme matricielle, on peut écrire :

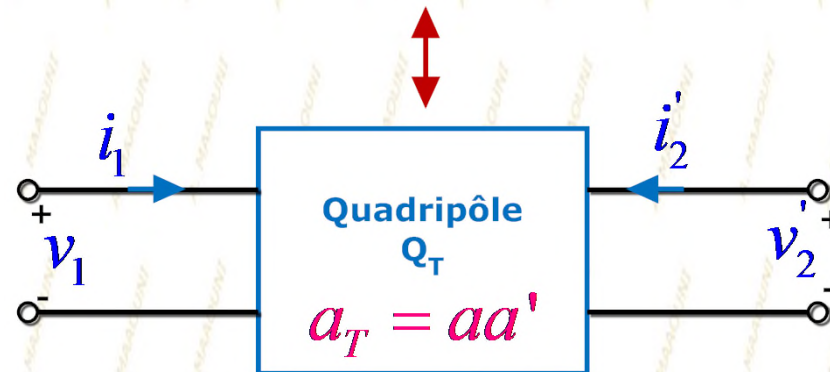
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}}_a \begin{pmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{pmatrix}$$

a est matrice chaîne.

Mise en cascade



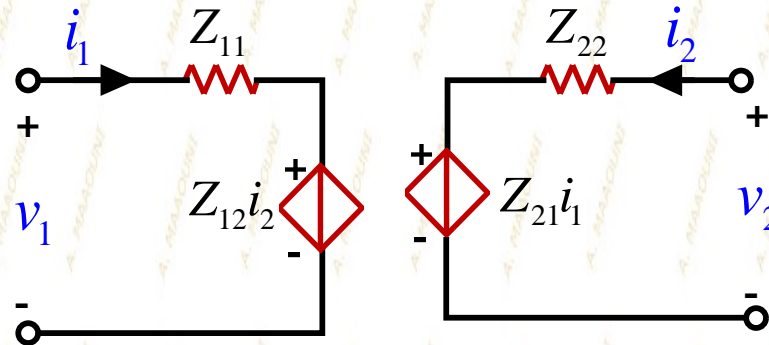
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ i_1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} v_2 \\ -i_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} v_1' \\ i_1' \end{pmatrix} = \underbrace{aa'}_{a_T} \begin{pmatrix} v_2' \\ -i_2' \end{pmatrix}$$



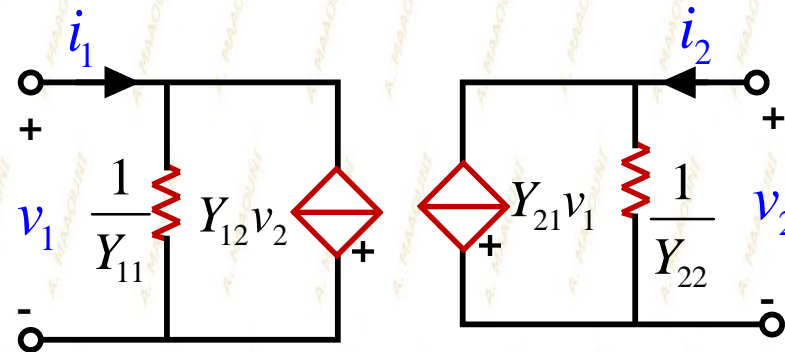
Représentations d'un quadripôle

Il peut être utile dans un problème donné de remplacer un quadripôle par un schéma simple. On obtient ainsi les schémas suivants :

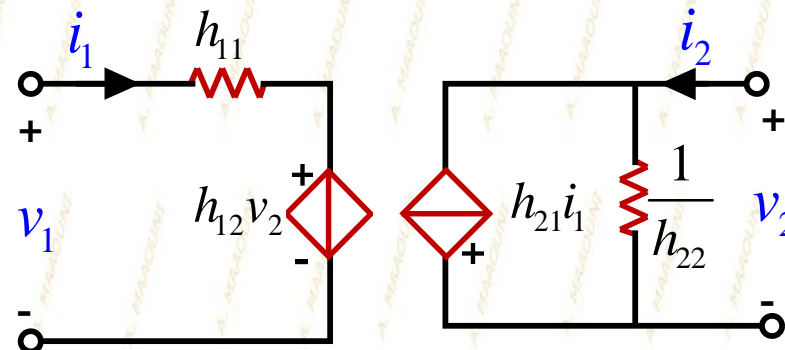
PARAMÈTRES Z



PARAMÈTRES Y



PARAMÈTRES h



Transformée de Laplace

La transformée de Laplace d'une fonction du temps $f(t)$ est une fonction de la Fréquence complexe p :

$$f(t) \xrightarrow{L} F(p)$$

$F(p)$ est la transformée de Laplace de $f(t)$. On écrit : $F(p) = L(f(t))$

La fréquence complexe p est habituellement exprimée sous la forme $p = \sigma + j\omega$.
La transformée de Laplace est définie par :

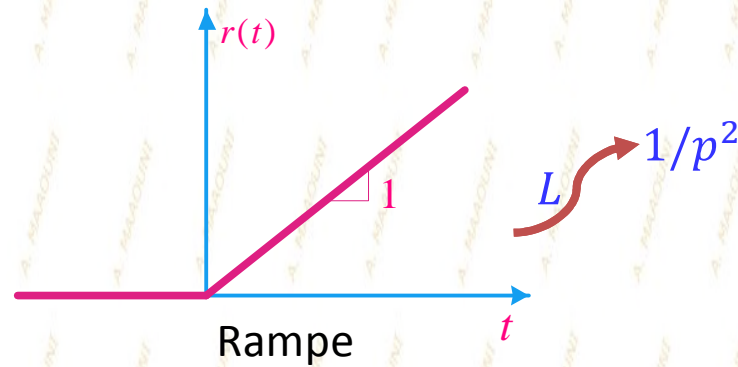
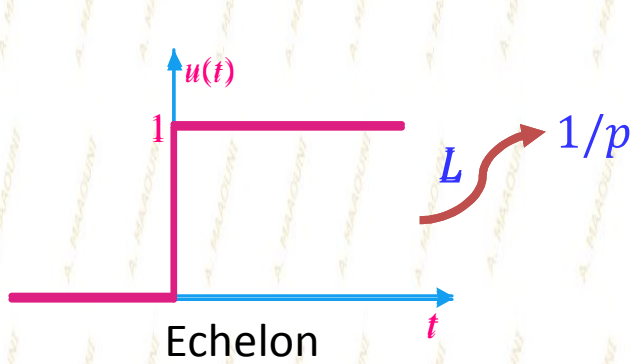
$$F(p) = \int_{0_-}^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$$

Une fonction $f(t)$ admet une transformée de Laplace si :

- Elle est continue par sections
- Il existe un nombre réel et positif σ_0 de sorte que l'intégrale

$$\int_{0_-}^{\infty} |f(t)|e^{-\sigma_0 t} dt < \infty$$

Exemples



$$L(e^{at}u(t)) = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \frac{1}{a-p} e^{(a-(\sigma+j\omega))t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{p-a}, \sigma > a$$

Quelques Propriétés

Linéarité

$$L(a_1f(t) + a_2g(t)) = a_1F(p) + a_2G(p)$$

Transformation de la dérivée

$$L\left(\frac{df}{dt}\right) = pF(p) - f(0)$$

$$L\left(\frac{d^n f}{dt^n}\right) = p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{n-1}(0)$$

Translation de l'axe temps

$$L(f(t - a)) = e^{-ap} F(p)$$

Changement d'échelle de temps

$$L(f(at)) = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$$

Transformation d'une intégrale

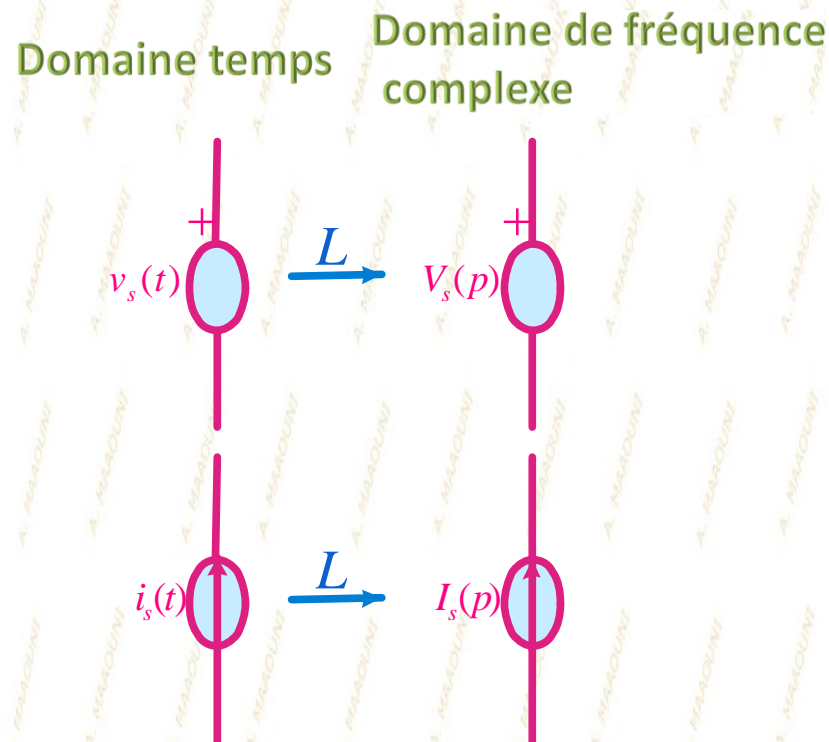
$$L\left(\int_0^t f(t) dt\right) = \frac{F(p)}{p}$$

$$L\left(\int_{-\infty}^t f(t) dt\right) = \frac{F(p) + y(0)}{p}, \quad \text{avec } y(0) = \int_{-\infty}^0 f(t) dt$$

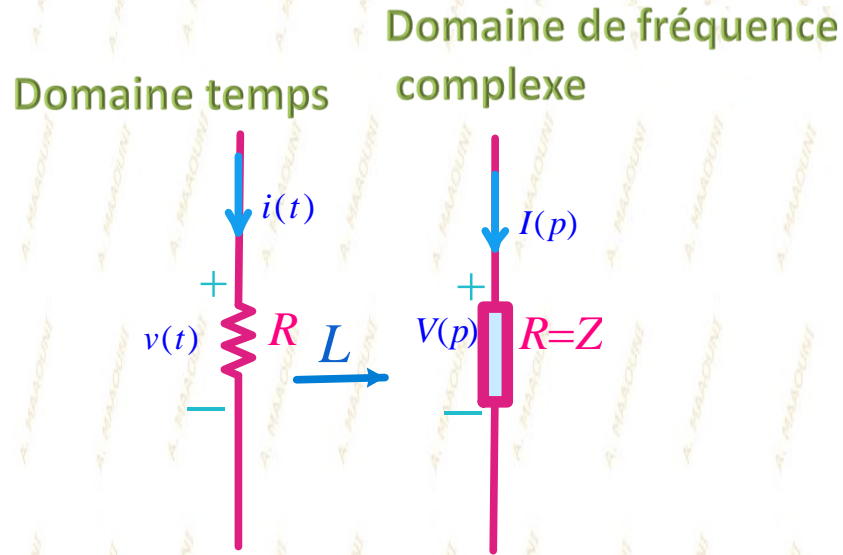
Transformation des éléments du domaine temps au domaine de fréquence complexe

Transformation de sources

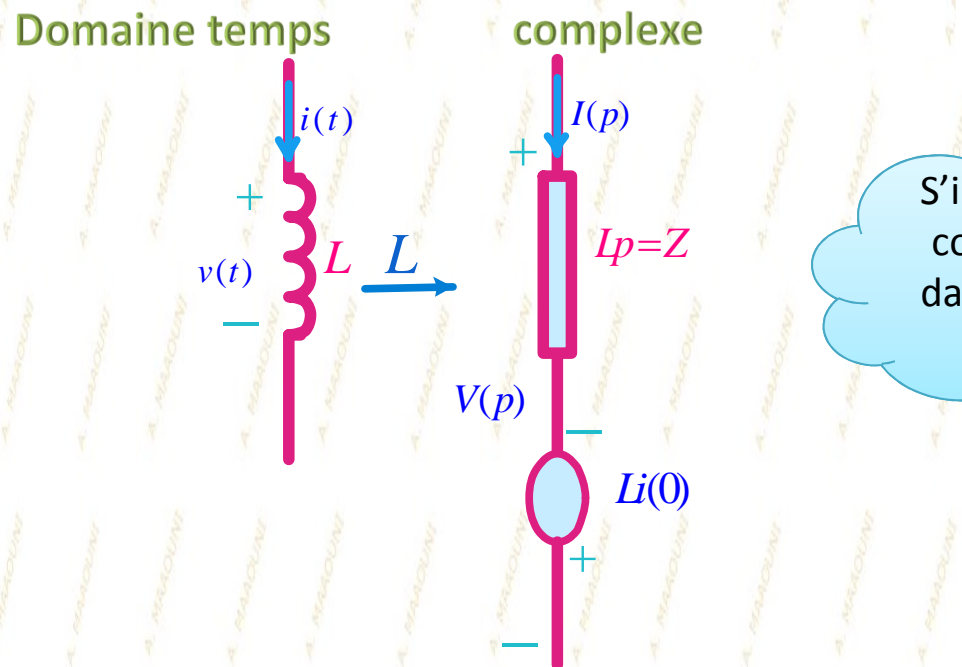
Les sources qu'elles soient de tension ou de courant sont des fonction du temps. Leurs équivalents dans le domaine de fréquence complexe son leurs transformées de Laplace



Transformation de R (Résistance)



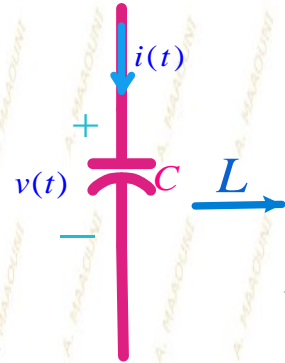
Transformation de L (Inductance)



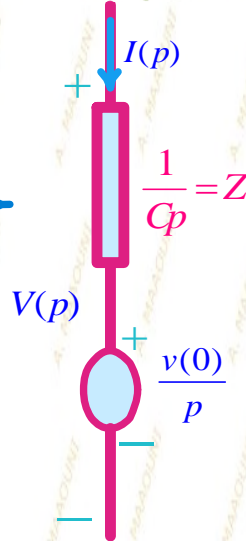
S'il n'y a pas de courant initial dans la bobine, $i(0) = 0$

Transformation de C (Capacité)

Domaine temps

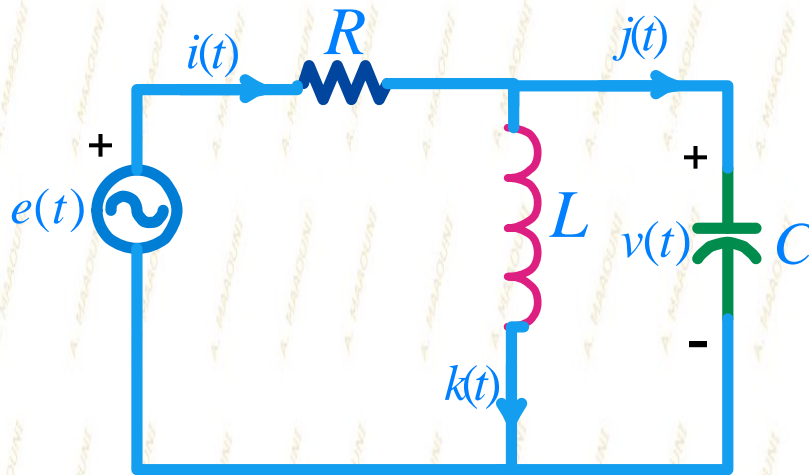


Domaine de fréquence complexe



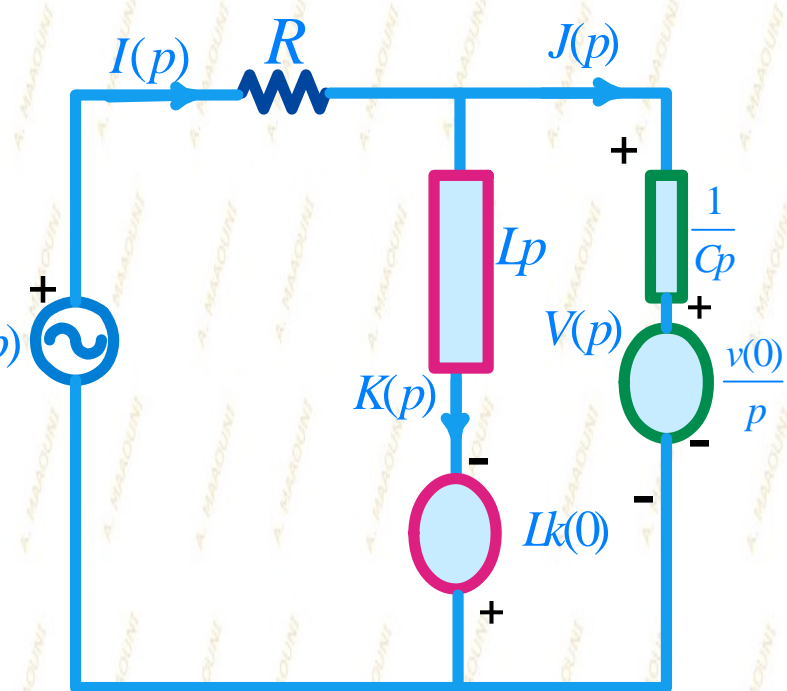
Transformation d'un circuit

Domaine temps



$L \rightarrow$

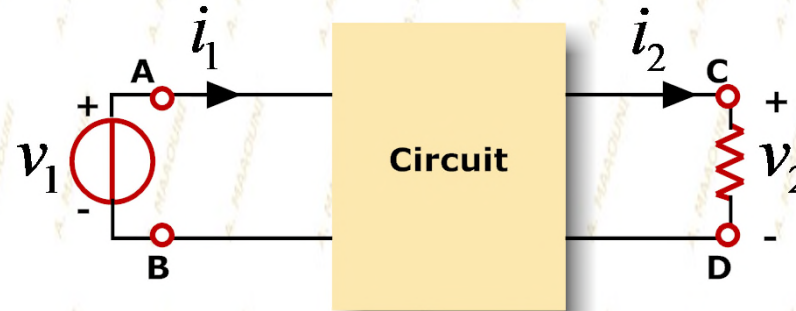
Domaine de fréquence complexe



Fonction de transfert et réponse en fréquence des réseaux électriques

Fonctions de transfert

Dans un réseau on isole une source de tension $v_1(t)$ dans la branche AB, et une branche CD :



On suppose que le reste du circuit ne contient pas de sources indépendantes. On définit les gains de transfert en tension et courant de ce réseau par :

$$\frac{V_2(p)}{V_1(p)}, \frac{I_2(p)}{I_1(p)}, \quad V_{1,2}(p) = L(v_{1,2}(t)), \quad I_{1,2}(p) = L(i_{1,2}(t))$$

L'admittance de transfert est définie par :

$$\frac{I_2(p)}{V_1(p)} \quad \text{et l'impédance de transfert par :} \quad \frac{V_2(p)}{I_1(p)}$$

Ces quatre fonctions sont appelées **fonctions de transfert**

Les fonctions de transfert s'écrivent généralement sous la forme générale

$$F(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0}$$

On peut faire apparaître les zéros et les pôles de $F(p)$ et la mettre sous la forme :

$$F(p) = K \frac{(1 + \frac{p}{z_1})(1 + \frac{p}{z_2}) \dots (1 + \frac{p}{z_m})}{(1 + \frac{p}{p_1})(1 + \frac{p}{p_2}) \dots (1 + \frac{p}{p_m})}$$

$-p_j$: pôle
 $-z_j$: zéro

En régime sinusoïdal permanent, la **réponse en fréquence du réseau** s'obtient remplaçant p par $j\omega$, $\omega = 2\pi f$, f fréquence (Hz) dans l'expression de la fonction du réseau. La fonction de transfert devient :

$$F(j\omega) = K \frac{(\frac{j\omega}{z_1} + 1)(\frac{j\omega}{z_2} + 1) \dots (\frac{j\omega}{z_m} + 1)}{(\frac{j\omega}{p_1} + 1)(\frac{j\omega}{p_2} + 1) \dots (\frac{j\omega}{p_n} + 1)} = |F(j\omega)| e^{j\angle F(j\omega)}$$

Diagramme de Bode

Il s'agit d'une représentation logarithmique de la fonction $F(j\omega)$.

On donne d'une part le module $|F(j\omega)|$ exprimé en décibels, d'autre part la phase portée sur une échelle linéaire, la pulsation étant portée sur une échelle logarithmique.

Décibel : $|F(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} (|F(j\omega)|)$

On sait que si un zéro z_i a une valeur imaginaire (complexe), le conjugué complexe z_i^* est aussi zéro de la fonction de transfert et le produit :

$$\left(1 + \frac{j\omega}{z_i}\right)^{\alpha_i} \left(1 + \frac{j\omega}{z_i^*}\right)^{\alpha_i} \text{ donne un terme de la forme: } \frac{1}{\left(1 + 2\zeta_i \left(\frac{j\omega}{\omega_i}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_i}\right)^2\right)^{\alpha_i}}$$

De même, une paire de pôles complexes conjugués (p_j, p_j^*) donne un terme de la forme:

$$\left(1 + 2\zeta_j \left(\frac{j\omega}{\omega_j}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_j}\right)^2\right)^{\beta_j}$$

Des zéros et des pôles à l'origine se traduisent par

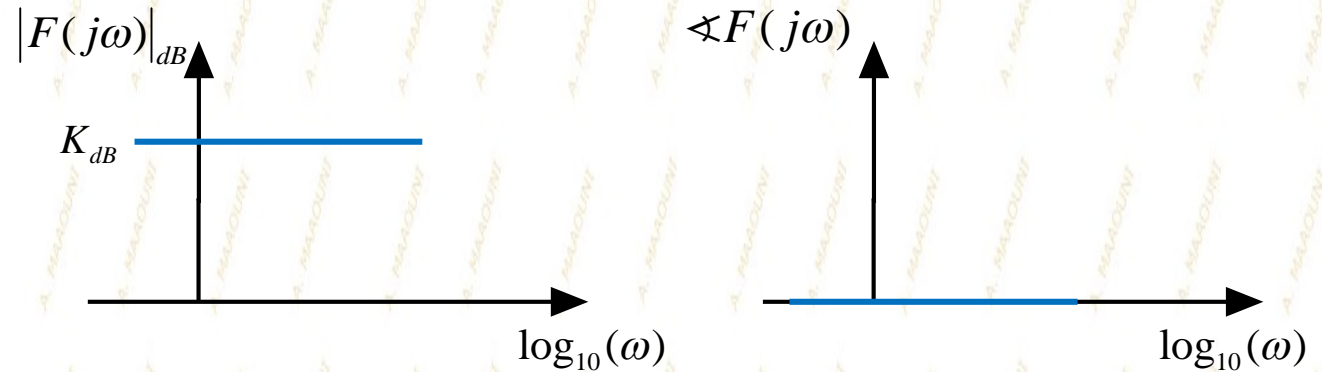
les termes : $(j\omega)^\gamma, (j\omega)^{-\lambda}$

Le tracé du diagramme de Bode de n'importe quelle fonction de transfert se ramène donc aux tracés des diagrammes de Bode des sept fonction élémentaires suivantes :

Gain	K
Pole ou zéro à l'origine	$\frac{1}{j\omega}, j\omega$
Pole simple ou zéro simple	$\frac{1}{1 + \frac{j\omega}{p_1}}, 1 + \frac{j\omega}{z_1}$
Pôle ou zéro quadratiques	$\frac{1}{1 + 2\zeta_2 \frac{j\omega}{\omega_2} + \left(\frac{j\omega}{\omega_2}\right)^2}, 1 + 2\zeta_1 \frac{j\omega}{\omega_1} + \left(\frac{j\omega}{\omega_1}\right)^2$

Gain K :

$$F(j\omega) = K, K > 1$$

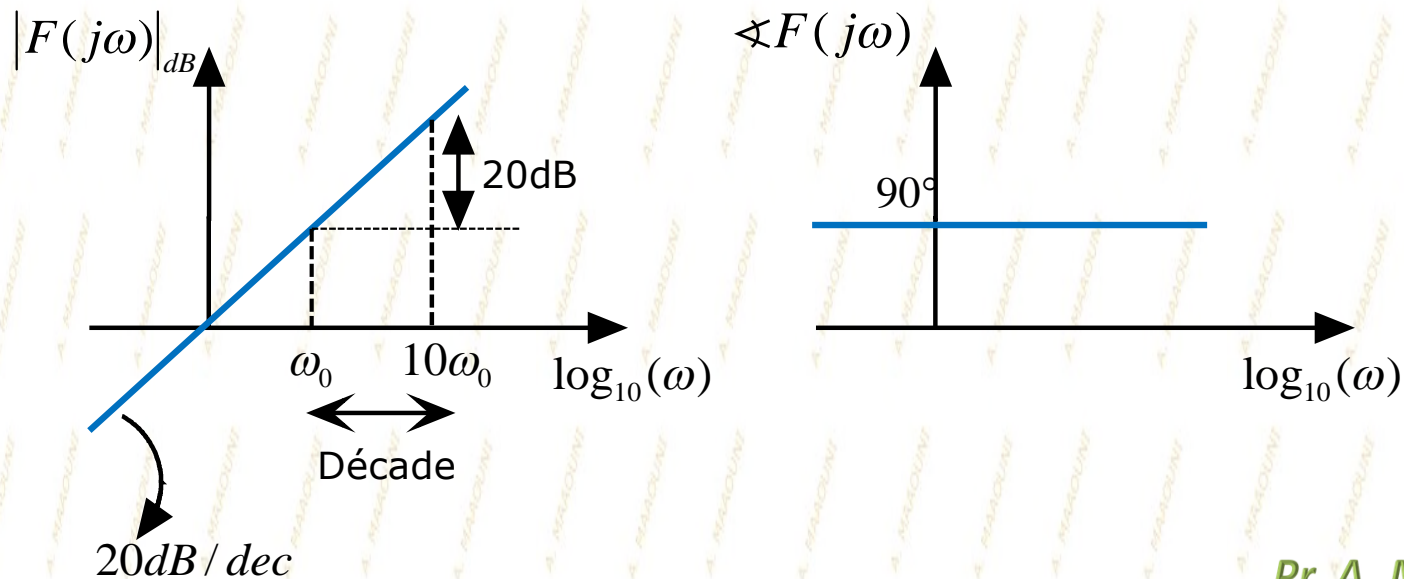


Zéro à l'origine :

$$F(j\omega) = j\omega$$

Module en dB: $|F(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}(|F(j\omega)|) = 20\log_{10}(\omega)$

Phase en Degré : $\angle F(j\omega) = 90^\circ$

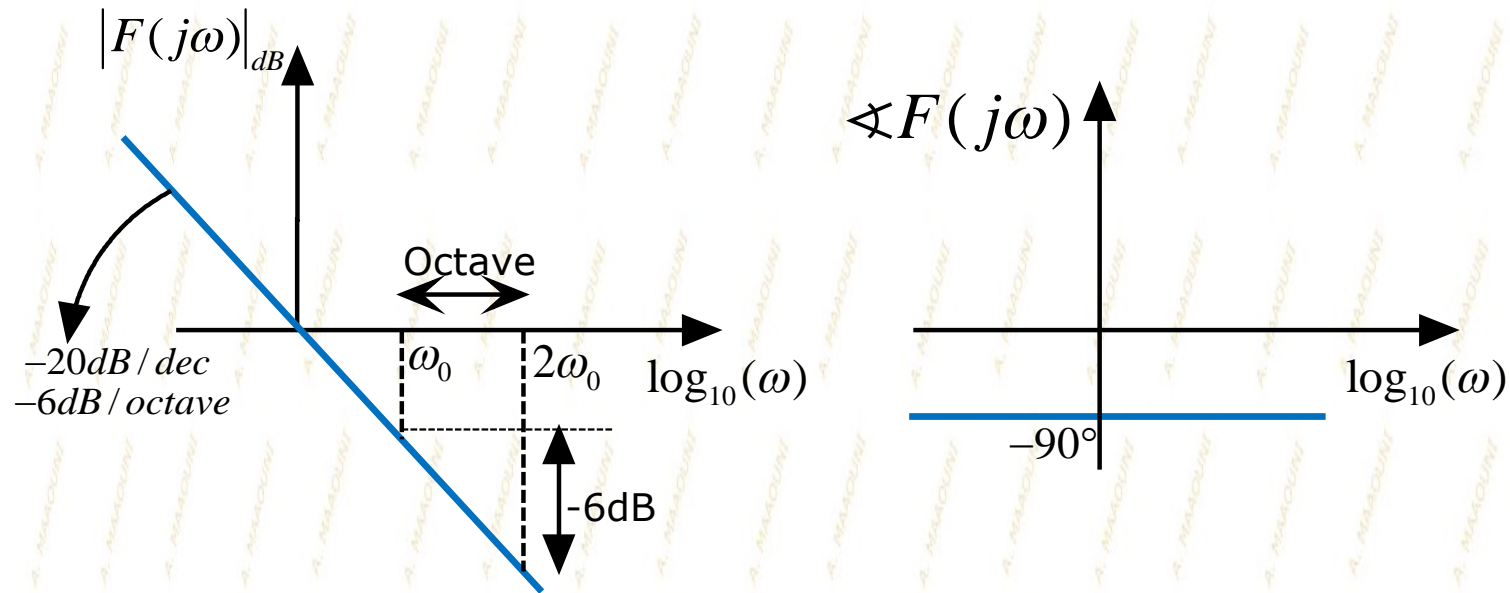


Pôle à l'origine :

$$F(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

Module en dB: $|F(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}(|F(j\omega)|) = -20\log_{10}(\omega)$

Phase en Radians : $\angle F(j\omega) = -90^\circ$



Dans le cas général où $F(j\omega) = (j\omega)^{\pm N}$, N est un entier, la pente du module $|F(j\omega)|$ est $\pm 20NdB/dec$ et la phase vaut : $\pm 90N^\circ$

Zéro/pôle simple :

$$F(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{z_1}, \quad z_1 > 0$$

Module en dB: $|F(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}(|F(j\omega)|) = 10\log_{10}\left(1 + \left(\frac{\omega}{z_1}\right)^2\right)$

Phase en degré: $\angle F(j\omega) = \arctan\left(\frac{\omega}{z_1}\right)$

Étude asymptotique :

Module en dB/phase:

$$\underbrace{|F(j\omega)|_{dB}}_Y \underset{\omega \rightarrow \infty}{\simeq} 10\log_{10}\left(\left(\frac{\omega}{z_1}\right)^2\right) = 20\left(\underbrace{\log_{10}(\omega)}_X - \underbrace{\log_{10}(z_1)}_{X_{z_1}}\right), \quad \angle F(j\omega) \underset{\omega \rightarrow \infty}{\simeq} \arctan(\infty) = 90^\circ$$

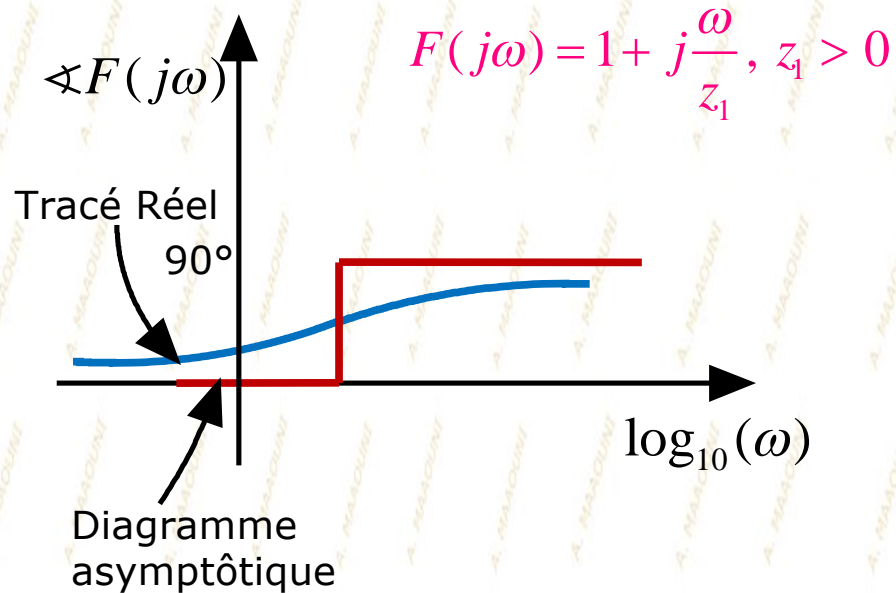
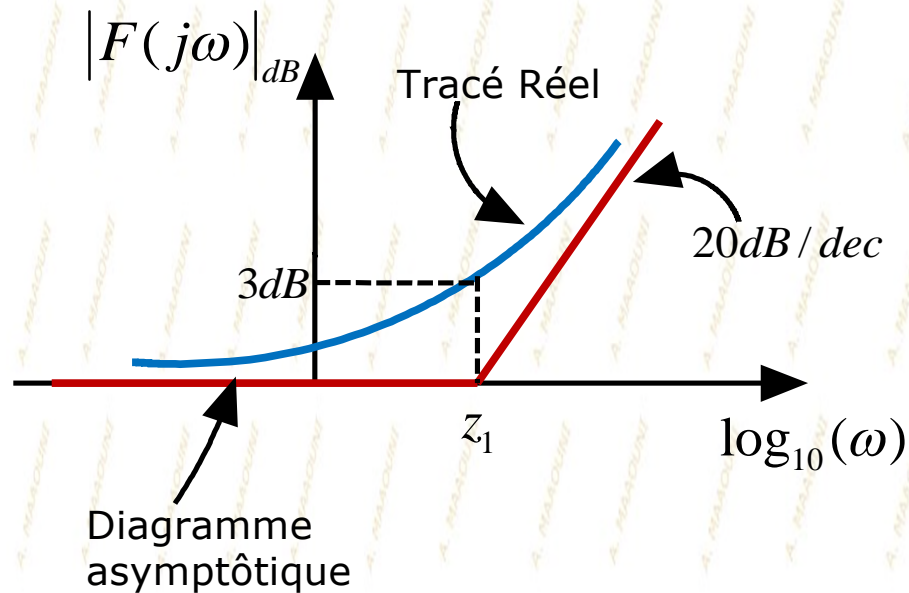
C'est l'équation d'une droite de pente $20dB/dec$. Elle passe par le d'abscisse X_{z_1}

$$\underbrace{|F(j\omega)|_{dB}}_Y \underset{\omega \rightarrow 0, \log_{10}(\omega) \rightarrow -\infty}{\simeq} 10\log_{10}(1) = 0$$

$$\angle F(j\omega) \underset{\omega \rightarrow 0, \log_{10}(\omega) \rightarrow -\infty}{\simeq} \arctan(0) = 0^\circ$$

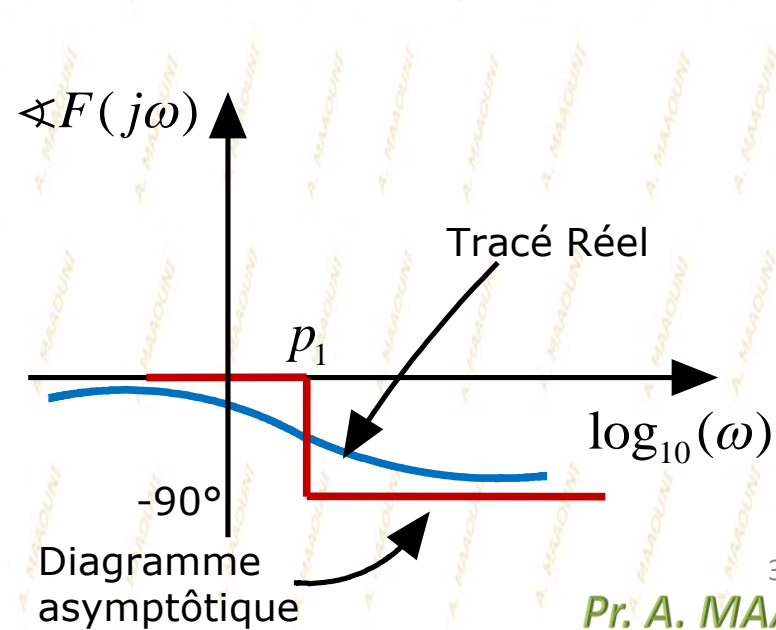
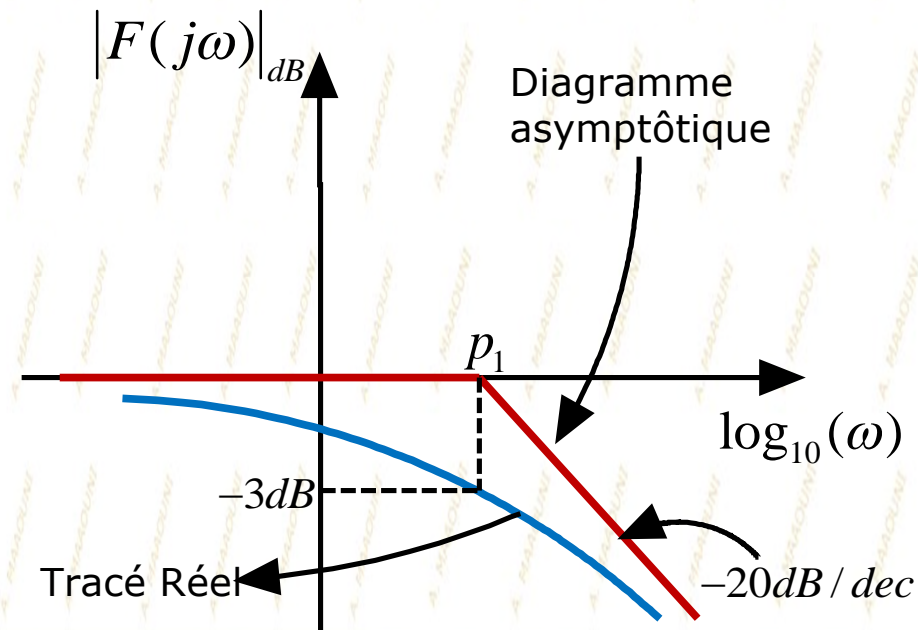
Pour $\omega = z_1$, on a :

$$|F(jz_1)|_{dB} = 10\log_{10}(2) = 3dB, \quad \angle F(jz_1) = 45^\circ$$



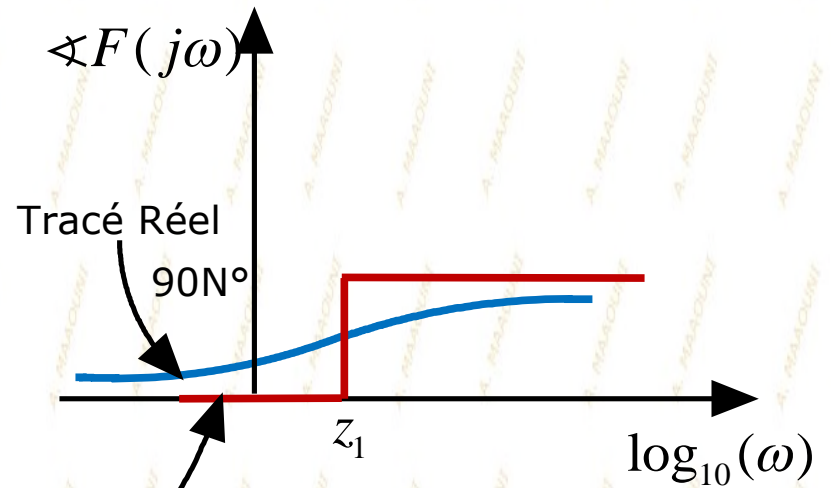
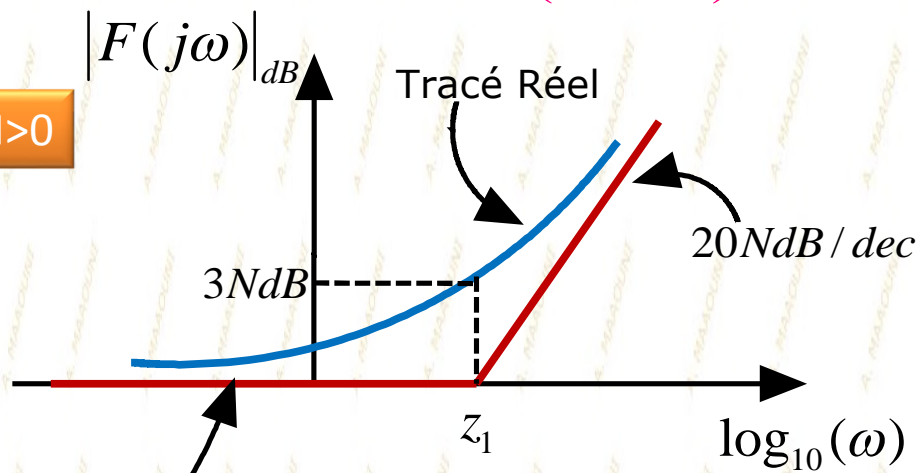
Pour le pôle simple, on obtient l'opposé :

$$F(j\omega) = \left(1 + j\frac{\omega}{p_1}\right)^{-1}, p_1 > 0$$

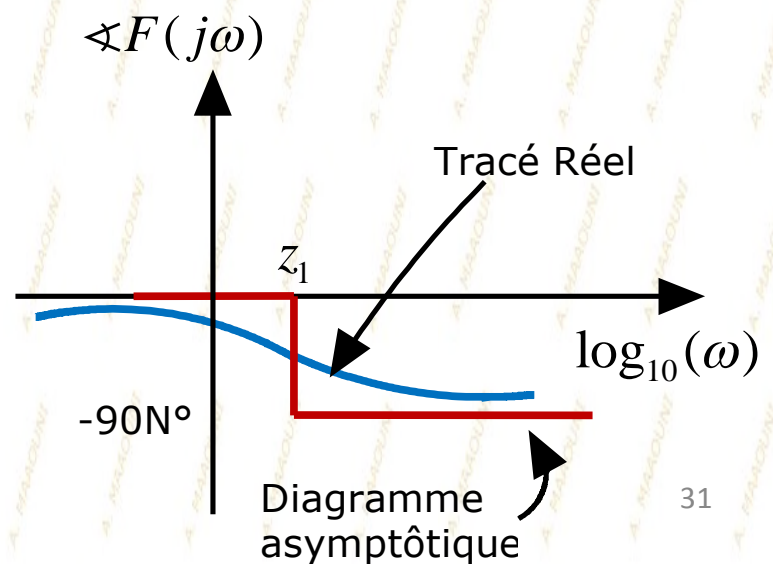
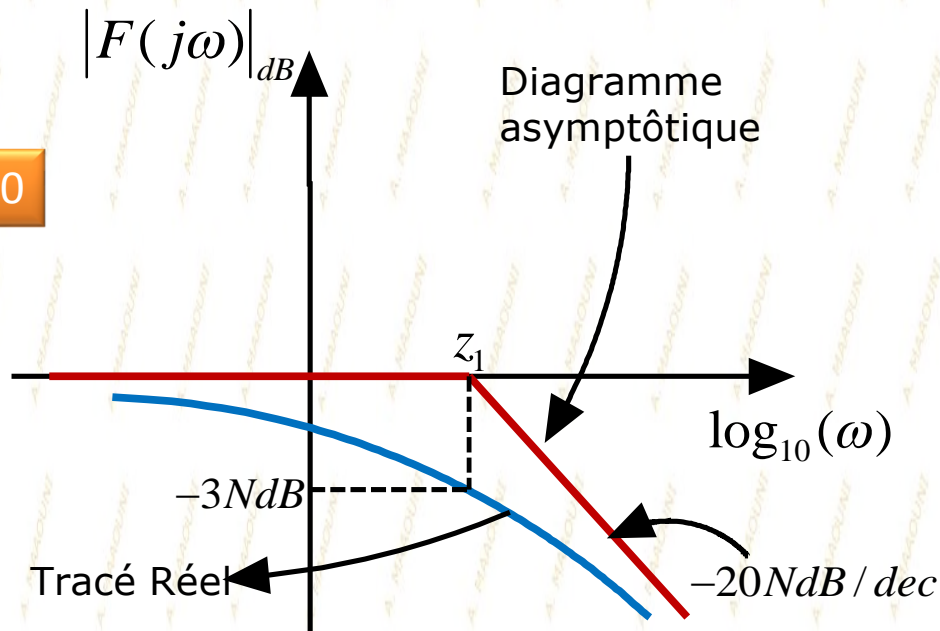


Dans le cas où $F(j\omega) = \left(1 + j\frac{\omega}{z_1}\right)^{\pm N}$, $z_1 > 0$

$N > 0$



$N < 0$



Zéro/pôle quadratique:

$$F(j\omega) = \frac{1}{1 + 2\zeta_2 \frac{j\omega}{\omega_2} + \left(\frac{j\omega}{\omega_2}\right)^2}$$

Module en dB: $|F(j\omega)|_{dB} = 20\log_{10}(|F(j\omega)|) = -20\log_{10}\left(1 + 2\zeta_2 \frac{j\omega}{\omega_2} + \left(\frac{j\omega}{\omega_2}\right)^2\right)$

Phase en Degré :

$$\angle F(j\omega) = -\arctan\left(\frac{2\zeta_2 \omega / \omega_2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}\right)$$

Étude asymptotique :

Module en dB/phase:

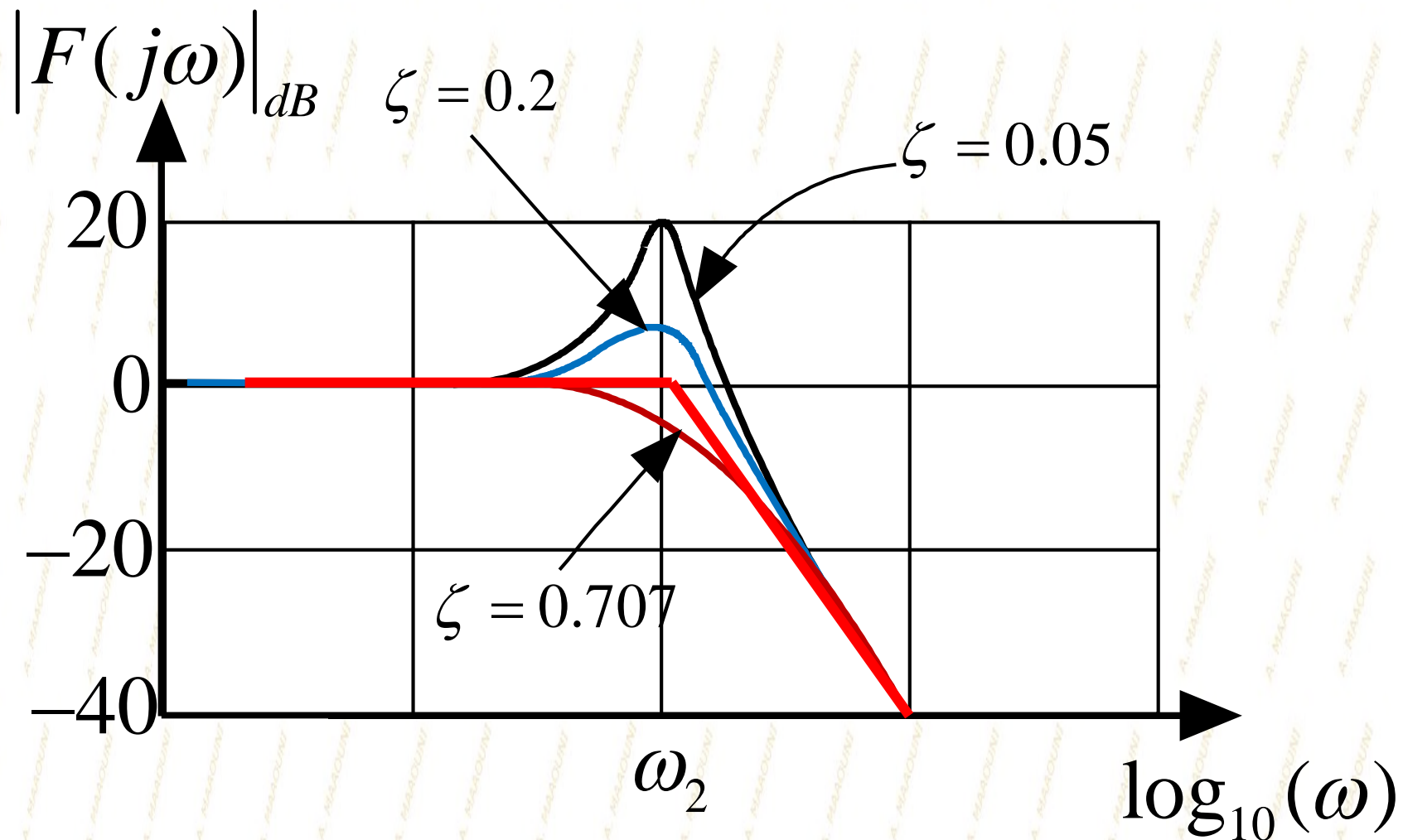
$$\underbrace{|F(j\omega)|_{dB}}_Y \underset{\omega \rightarrow \infty}{\simeq} 20\log_{10}\left(\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right) = 40\left(\underbrace{\log_{10}(\omega)}_X - \underbrace{\log_{10}(\omega_2)}_{X_{\omega_2}}\right), \angle F(j\omega) \underset{\omega \rightarrow \infty}{\simeq} \arctan(\infty) = -180^\circ$$

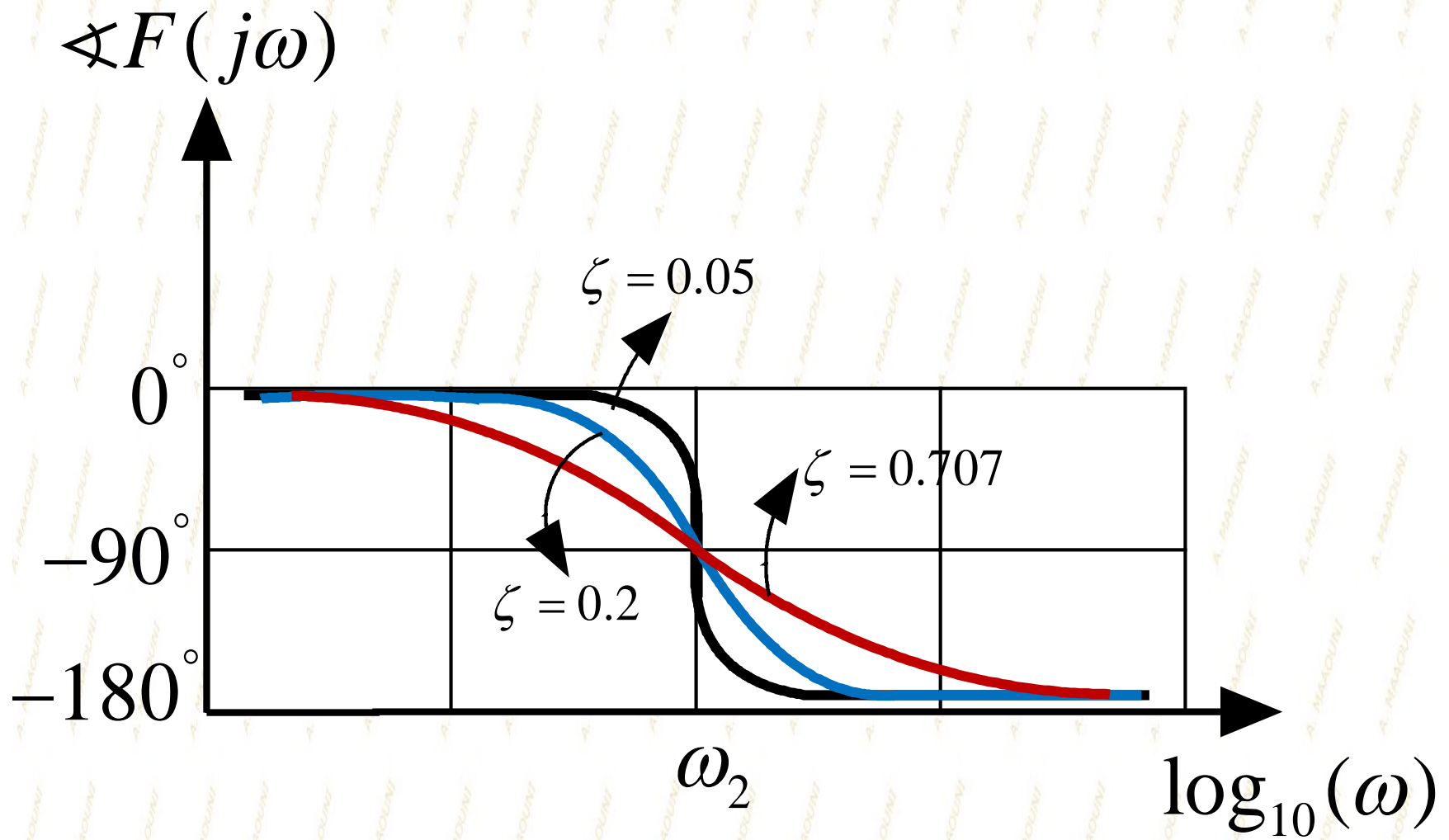
C'est l'équation d'une droite de pente 40dB/dec. Elle passe par le d'abscisse X_{ω_2}

$$\underbrace{|F(j\omega)|_{dB}}_Y \underset{\omega \rightarrow 0, \log_{10}(\omega) \rightarrow -\infty}{\simeq} 10\log_{10}(1) = 0$$

$$\angle F(j\omega) \underset{\omega \rightarrow 0, \log_{10}(\omega) \rightarrow -\infty}{\simeq} \arctan(0) = 0^\circ$$

Pour $\omega = \omega_2$, on a $|F(j\omega_2)|_{dB} = -20\log_{10}(1/2\zeta_2)$, $\angle F(j\omega_2) = -90^\circ$





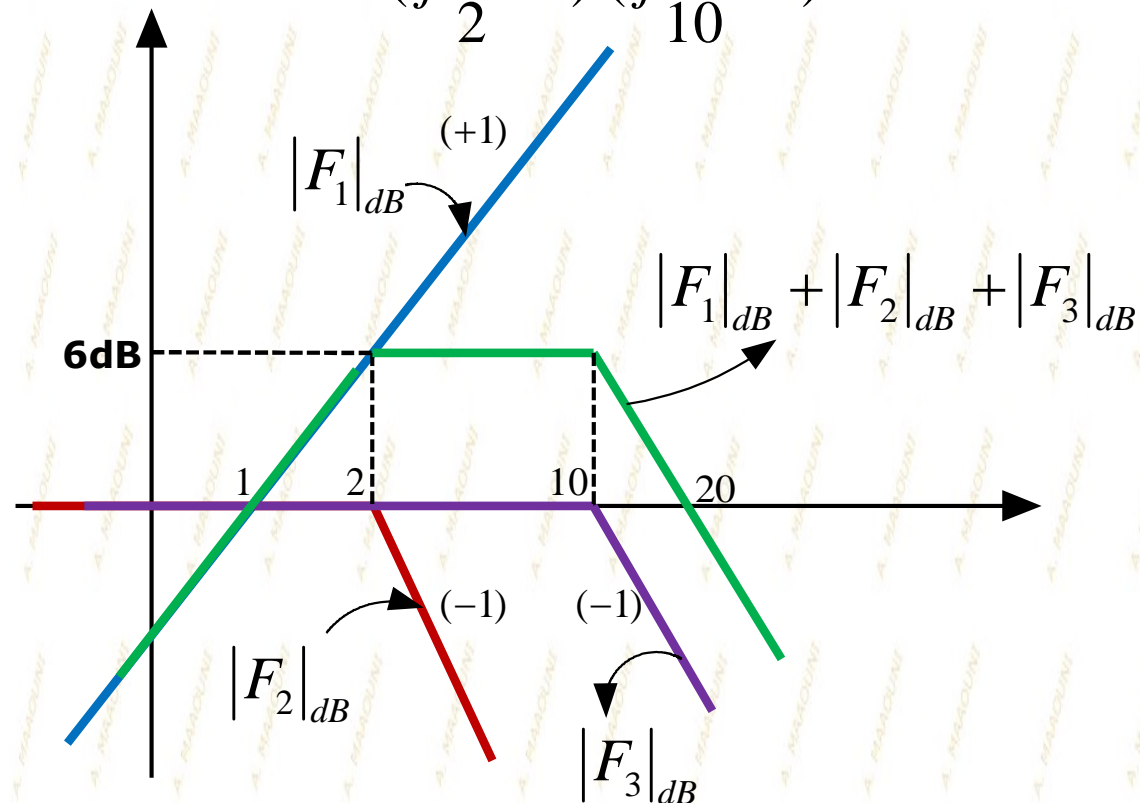
Exemple :

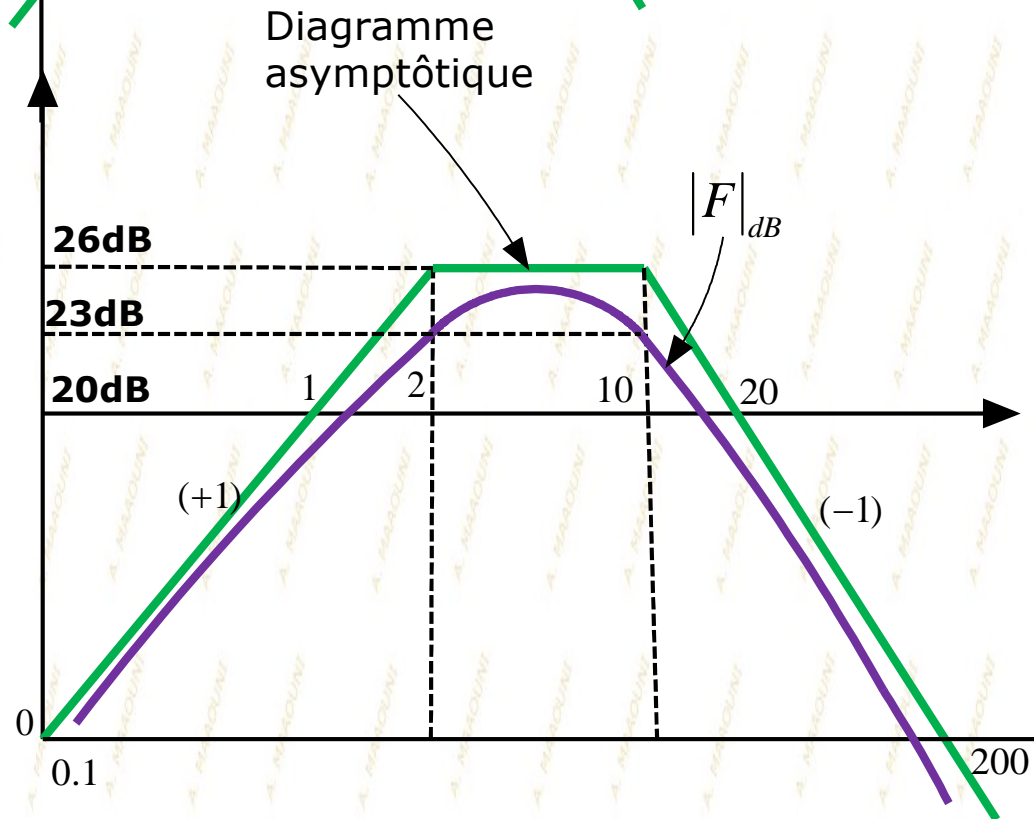
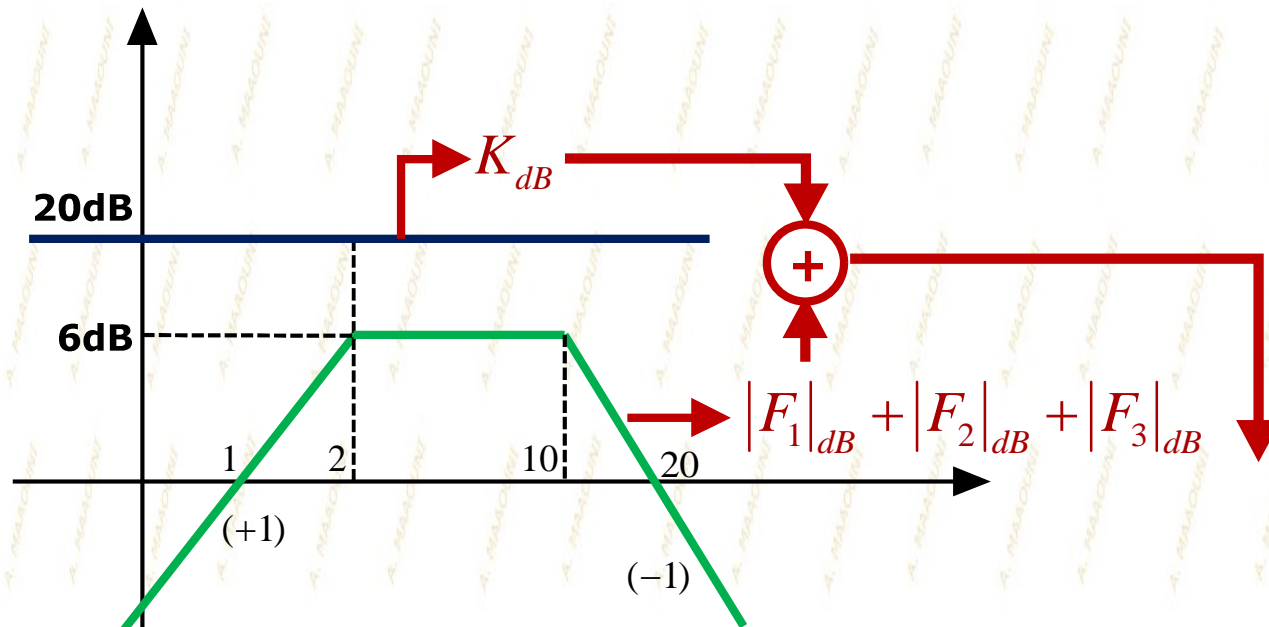
Tracer le diagramme de Bode de la fonction de transfert :

$$F(j\omega) = \frac{200j\omega}{(j\omega + 2)(j\omega + 10)}$$

Sol.

$$F(j\omega) = \underbrace{10}_K \underbrace{j\omega}_{F_1} \frac{\underbrace{1}_{F_2}}{(j\frac{\omega}{2} + 1)} \frac{\underbrace{1}_{F_3}}{(j\frac{\omega}{10} + 1)}$$





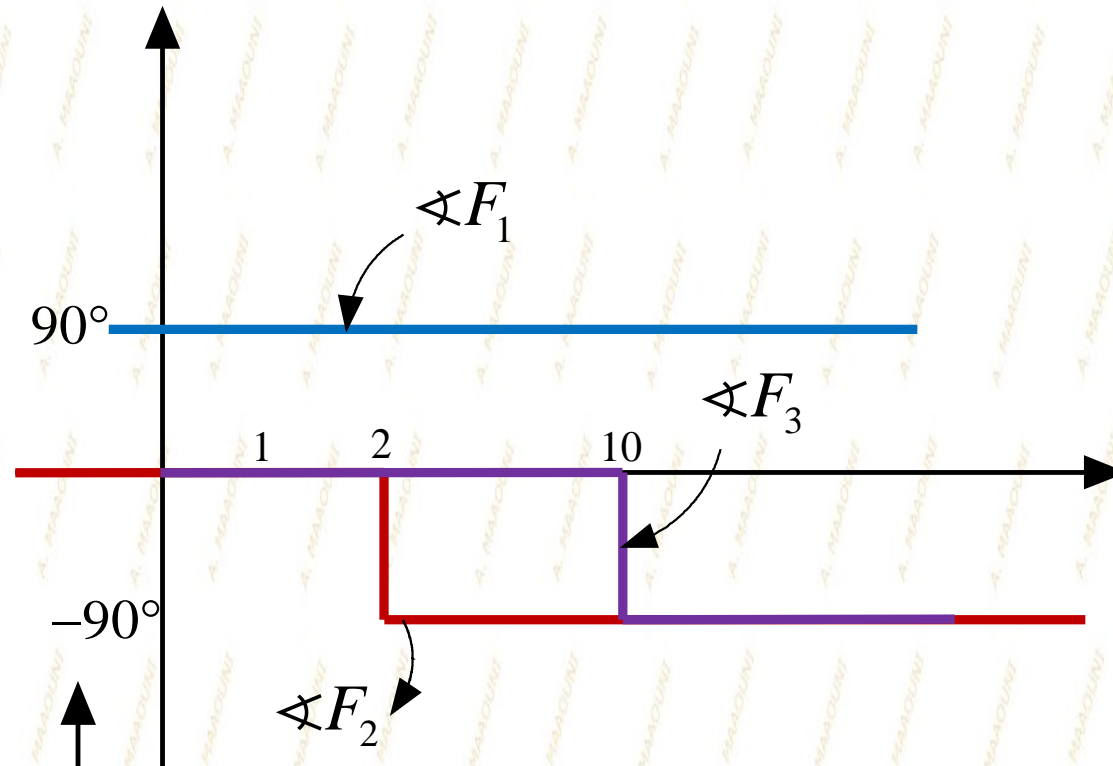
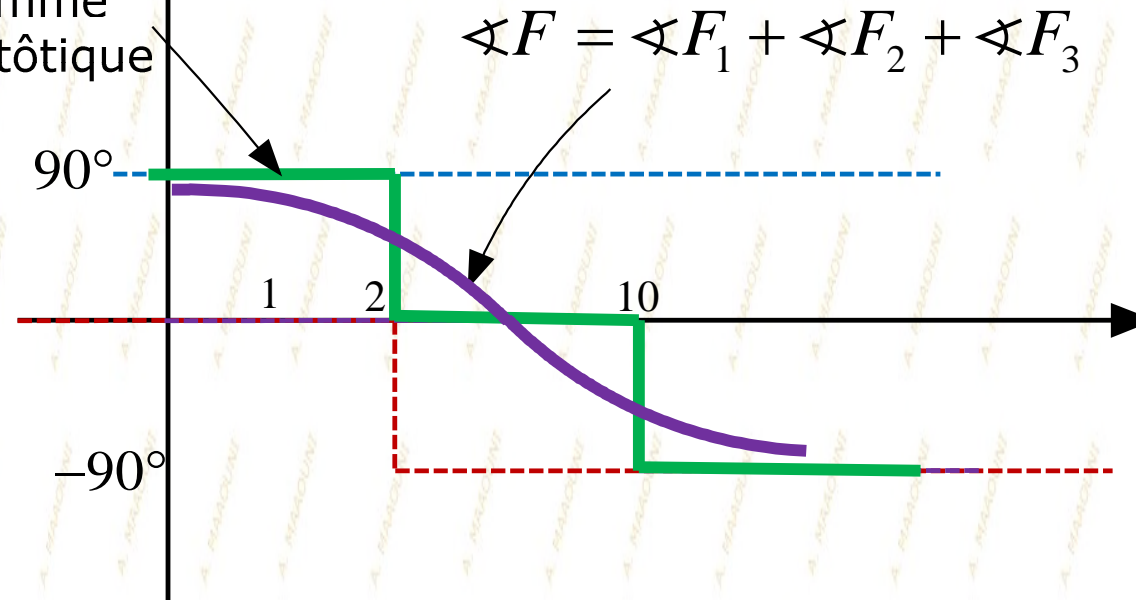


Diagramme asymptotique



Un exemple de plus

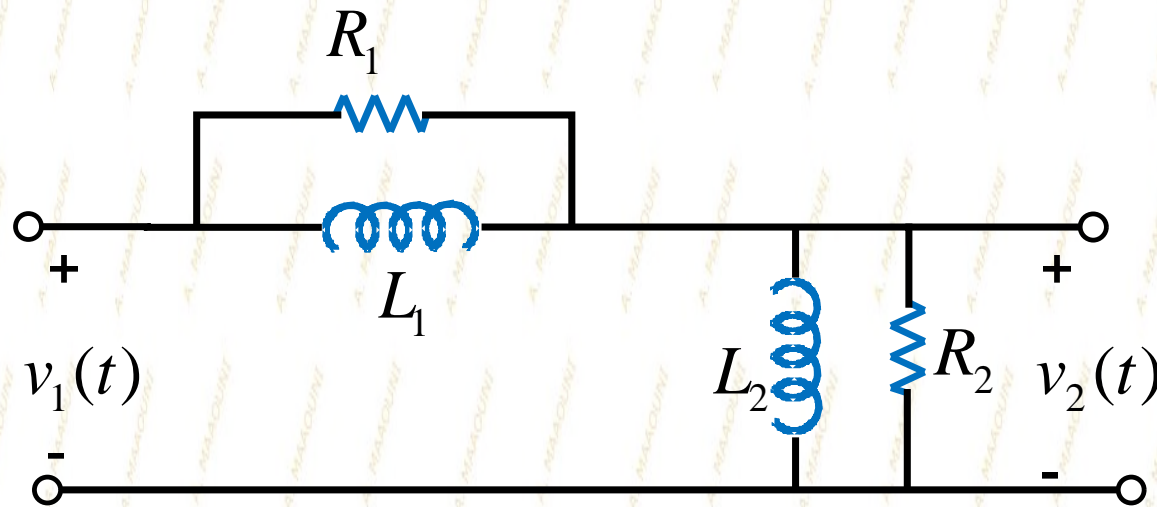


Exemple :

Déterminer la fonction de transfert

$$F(j\omega) = \frac{V_2(j\omega)}{V_1(j\omega)}$$

du quadripôle suivant et tracer son diagramme de Bode en amplitude.



On donne :

$$L_1 = L_2 = L, R_1 = \frac{R_2}{2} = R, \tau_1 = \frac{L_1}{R_1}, \tau = \frac{L_1 \parallel L_2}{R_1 \parallel R_2}$$

Sol.

$$F(p) = \frac{V_2(p)}{V_1(p)} = \frac{L_2 p \parallel R_2}{L_2 p \parallel R_2 + L_1 p \parallel R_1} = \frac{\frac{L_2 p R_2}{L_2 p + R_2}}{\frac{L_2 p R_2}{L_2 p + R_2} + \frac{L_1 p R_1}{L_1 p + R_1}}$$

$$F(p) = \frac{L_2 R_2 (L_1 p + R_1)}{L_2 L_2 (R_2 + R_1) p + (L_1 + L_2) R_1 R_2} = \frac{L_2}{L_1 + L_2} \frac{1 + \tau_1 p}{1 + \tau p}$$

$$F(j\omega) = \underbrace{\frac{L_2}{L_1 + L_2}}_K \underbrace{1 + \tau_1 j\omega}_{F_1} \underbrace{\frac{1}{1 + \tau j\omega}}_{F_2}, \tau = \frac{3}{4} \tau_1, \tau_1 > \tau$$

