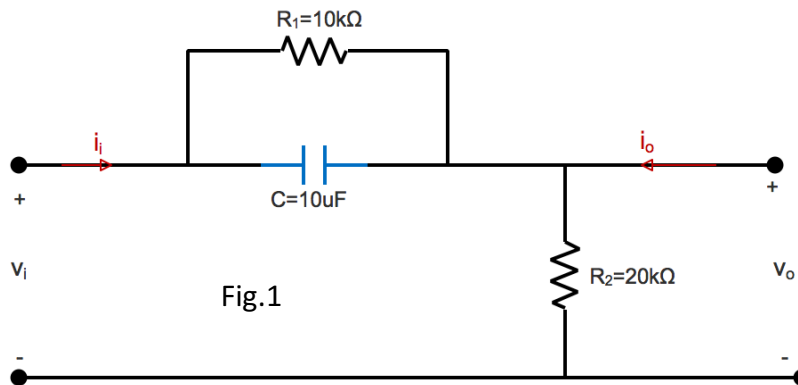


Exercice 1 :

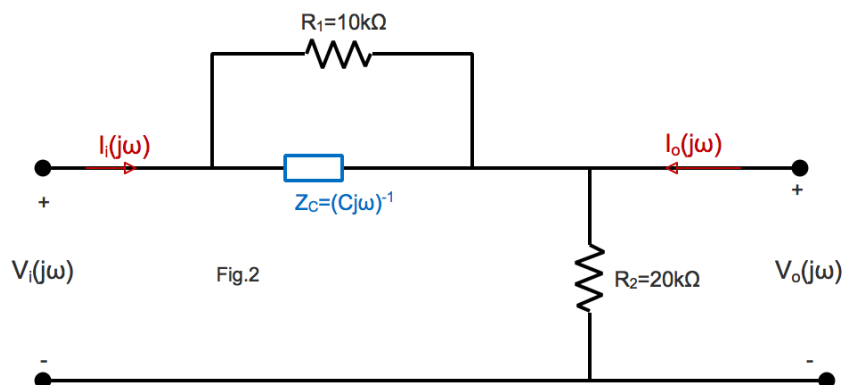
1-

On considère le circuit passif de la figure ci-dessous. La matrice impédance du quadripôle (fig.1) est définie dans le domaine fréquentiel par :



$$\begin{pmatrix} V_i \\ V_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_i \\ I_o \end{pmatrix}$$

Dans le domaine fréquentiel, le quadripôle est représenté ainsi :



Les éléments de la matrice impédance sont définis par :

$$Z_{11} = \left. \frac{V_i}{I_i} \right|_{I_o=0}, \quad Z_{12} = \left. \frac{V_i}{I_o} \right|_{I_i=0}, \quad Z_{21} = \left. \frac{V_o}{I_i} \right|_{I_o=0}, \quad Z_{22} = \left. \frac{V_o}{I_o} \right|_{I_i=0}$$

Lorsque le courant de sortie $I_o(j\omega) = 0$, la résistance R_2 et l'impédance équivalente $Z_C \parallel R_1$ sont en séries et

$$V_i = (R_2 + Z_C \parallel R_1) I_i$$

Soit :

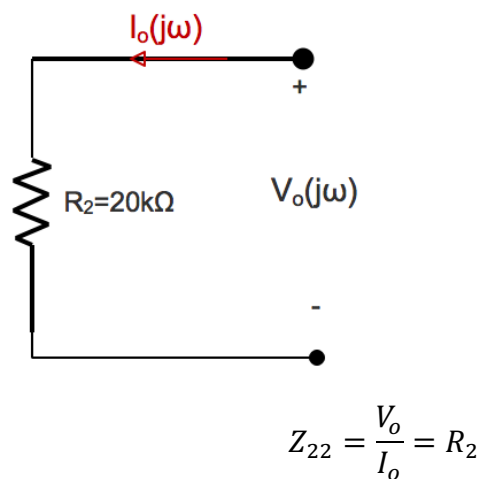
$$Z_{11} = R_2 + \frac{1}{Cj\omega} \parallel R_1$$

$$Z_{11} = R_2 + \frac{R_1}{R_1 Cj\omega + 1}$$

Le quadripôle est passif, il en résulte que :

$$Z_{12} = Z_{21} = \left. \frac{V_o}{I_i} \right|_{I_o=0} = R_2$$

Le paramètre Z_{22} peut être obtenu en annulant le courant d'entrée, ce qui se traduit par le circuit équivalent suivant :



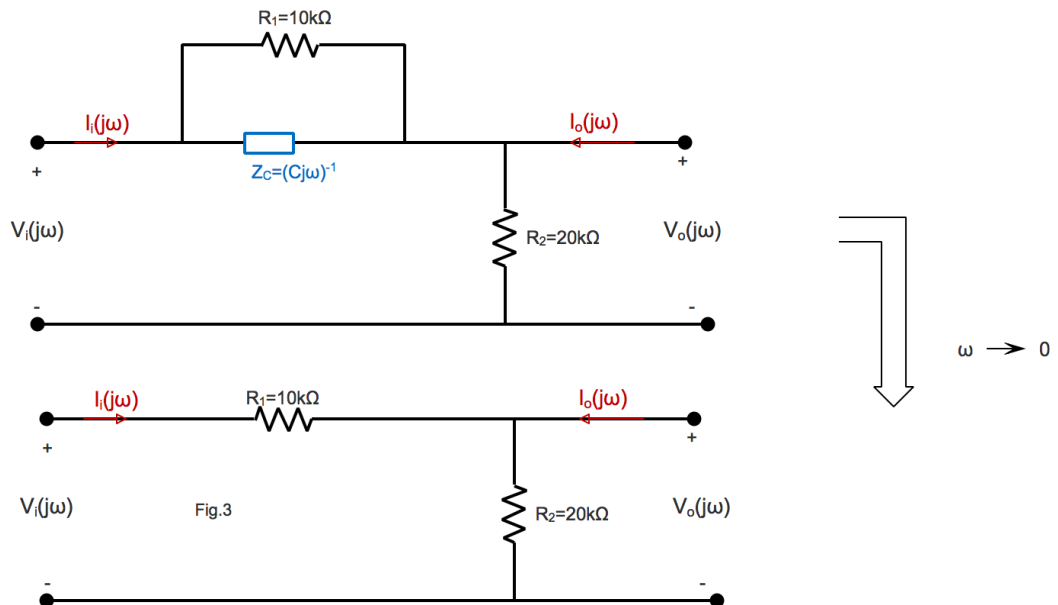
Finalement, la matrice impédance du quadripôle de la fig.2 est :

$$Z = \begin{pmatrix} R_2 + \frac{R_1}{R_1 Cj\omega + 1} & R_2 \\ R_2 & R_2 \end{pmatrix}$$

2-

Pour cette question et celles qui suivent, le courant de sortie est supposé nul.

En basses fréquences (BF), l'impédance $Z_C = \frac{1}{Cj\omega} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \infty$. La capacité se comporte comme un circuit ouvert et le circuit de la figure 2 deviendra celui de la figure 3 :

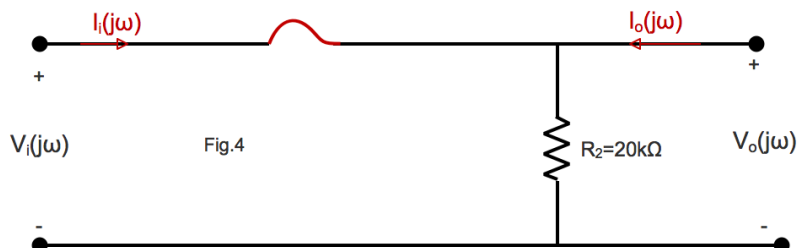


Compte tenu de la loi 'diviseur de tension', on peut écrire :

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{R_2}{R_2 + R_1} = \frac{2}{3}$$

3-

En Hautes fréquences (HF), l'impédance de la capacité se comporte comme un court-circuit, $Z_C = \frac{1}{Cj\omega} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$. Le circuit de la figure 2 est donc équivalent à celui de la figure 4 :



Il est clair que $V_i = V_o$ et donc : $\frac{V_o}{V_i} = 1$.

4-

On a $I_0 = 0A$. On peut donc, compte tenu du résultat de la question 1, écrire :

$$\begin{pmatrix} V_i \\ V_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$V_i = Z_{11}I_i, V_o = Z_{21}I_i$$

On en déduit que :

$$T(j\omega) = \frac{Z_{21}}{Z_{11}} = \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1}{1 + R_1 C j\omega}} = \frac{R_2}{R_2 + R_1} \frac{1 + R_1 C j\omega}{1 + R_1 \parallel R_2 C j\omega}$$

et

$$K = \frac{R_2}{R_2 + R_1} = \frac{2}{3}, \tau_A = R_1 C = 10k \times 10\mu F = 100ms, \tau_B = (10k \parallel 20k) \times 10\mu F = 66,67ms$$

Exercice 2 :

1-

L'amplificateur opérationnel est idéal. Il en résulte que sa résistance d'entrée est infinie, ce qui se traduit par des courants d'entrées I^+ et I^- nuls. D'autre part le gain de l'amplificateur est infini. Puisque la tension de sortie est finie, $V^+ = V^-$.

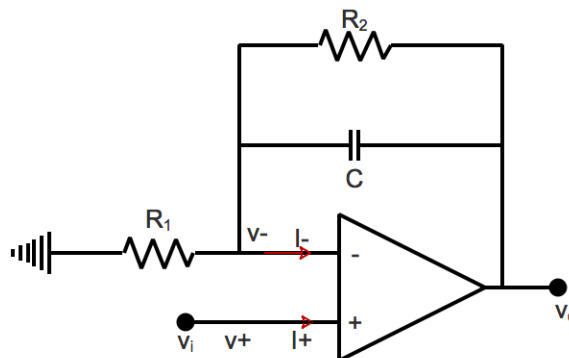


Fig.2

On a :

$$V^+ = V_i = V^-$$

Compte tenue de la loi de 'Diviseur de tension', on déduit directement V^- :

$$\begin{aligned} V_i = V^- &= \frac{R_1}{R_1 + \frac{1}{Cj\omega} \parallel R_2} V_o \\ &= \frac{R_1}{R_1 + \frac{R_2}{R_2 Cj\omega + 1}} V_o \\ &= \frac{R_1(1 + R_2 Cj\omega)}{R_1(1 + R_2 Cj\omega) + R_2} V_o \\ &= \frac{R_1}{R_1 + R_2} \frac{1 + R_2 Cj\omega}{1 + R_1 \parallel R_2 Cj\omega} V_o \end{aligned}$$

Il s'ensuit donc que :

$$T(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{1 + R_1 \parallel R_2 Cj\omega}{1 + R_2 Cj\omega} = K \frac{1 + \tau_1 j\omega}{1 + \tau_2 j\omega} \quad \text{où } \tau_1 = R_1 \parallel R_2 C \text{ et } \tau_2 = R_2 C.$$

On a $\tau_1 < \tau_2$, ce qui entraîne que $\omega_1 = \frac{1}{\tau_1} > \omega_2 = \frac{1}{\tau_2}$.

La fonction de transfert du filtre peut se mettre sous la forme équivalente suivante :

$$T(j\omega) = K \frac{1 + j\omega/\omega_1}{1 + j\omega/\omega_2}$$

où $K = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) > 1$.

2- La fonction de transfert $T(j\omega)$ peut être mise sous la forme suivante :

$$T(j\omega) = K T_1(j\omega) T_2(j\omega)$$

où $T_1(j\omega) = 1 + j\omega/\omega_1$, $T_2(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega/\omega_2}$.

Le gain en décibel et l'argument de T sont définis par :

$$\begin{aligned} |T|_{dB} &= 20 \log_{10}(|T|) = K_{dB} + |T_1|_{dB} + |T_2|_{dB} \\ \angle T &= \angle T_1 + \angle T_2 \end{aligned}$$

- Diagramme asymptotique de T_1 :

$$|T_1|_{dB} = 20 \log_{10}(|T_1|) = 20 \log_{10}\left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}\right) = 10 \log_{10}\left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right)$$

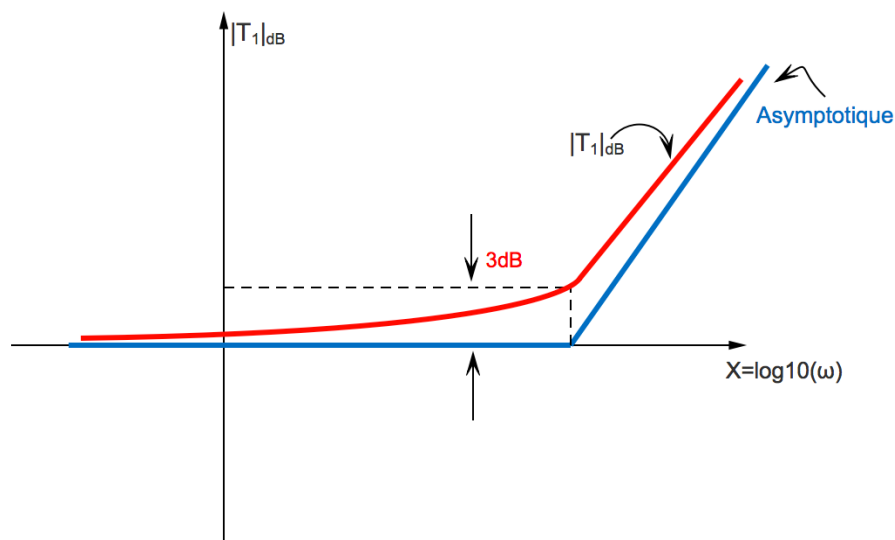
Si $\omega \gg \omega_1$, $Y = |T|_{dB} \cong 20(\log_{10}(\omega) - \log_{10}(\omega_1)) = 20(X - X_1)$.

Sur une échelle logarithmique, il s'agit ici d'une équation de droite de pente $20dB/dec$.

Si $\omega \ll \omega_1$, $Y = |T_1|_{dB} \cong 0$

Si $\omega = \omega_1$, $Y = |T_1|_{dB} = 10 \log_{10}(2) = 20 \log_{10}(\sqrt{2}) = 3dB$.

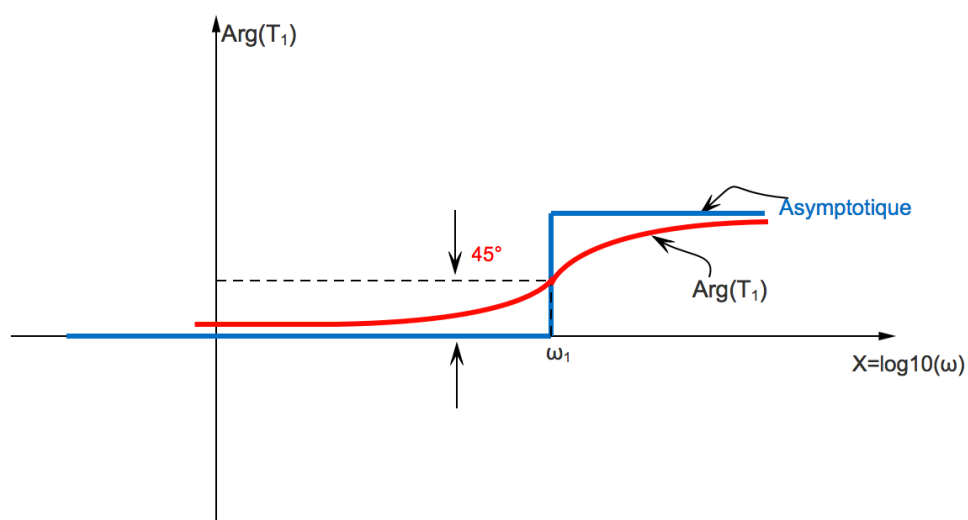
Le diagramme d'Amplitude de T_1 est représenté à la figure ci-dessous.



L'argument de T_1 est :

$$\angle T_1 = \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) = \begin{cases} 90^\circ, & \text{si } \omega \gg \omega_1 \\ 0, & \text{si } \omega \ll \omega_1 \\ 45^\circ, & \text{si } \omega = \omega_1 \end{cases}$$

Sa représentation est illustrée à la figure ci-dessous.



- Diagramme asymptotique de T_2 :

$$|T_2|_{dB} = 20 \log_{10}(|T_2|) = -20 \log_{10} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)^2} \right) = -10 \log_{10} \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2} \right)^2 \right)$$

Si $\omega \gg \omega_2$, $Y = |T_2|_{dB} \cong -20(\log_{10}(\omega) - \log_{10}(\omega_2)) = -20(X - X_2)$.

Il s'agit ici d'une équation de droite de pente $-20dB/dec$.

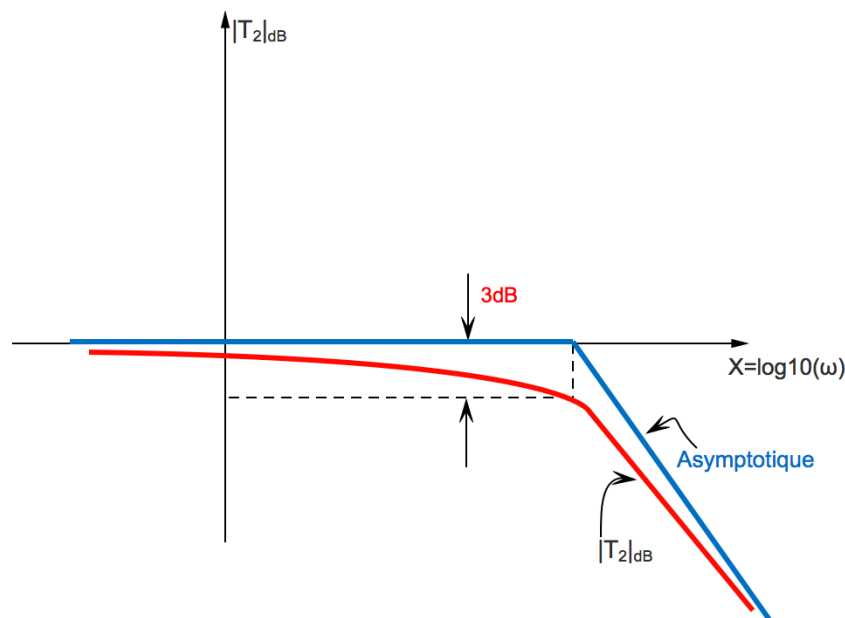
Si $\omega \ll \omega_2$, $Y = |T_2|_{dB} \cong 0$

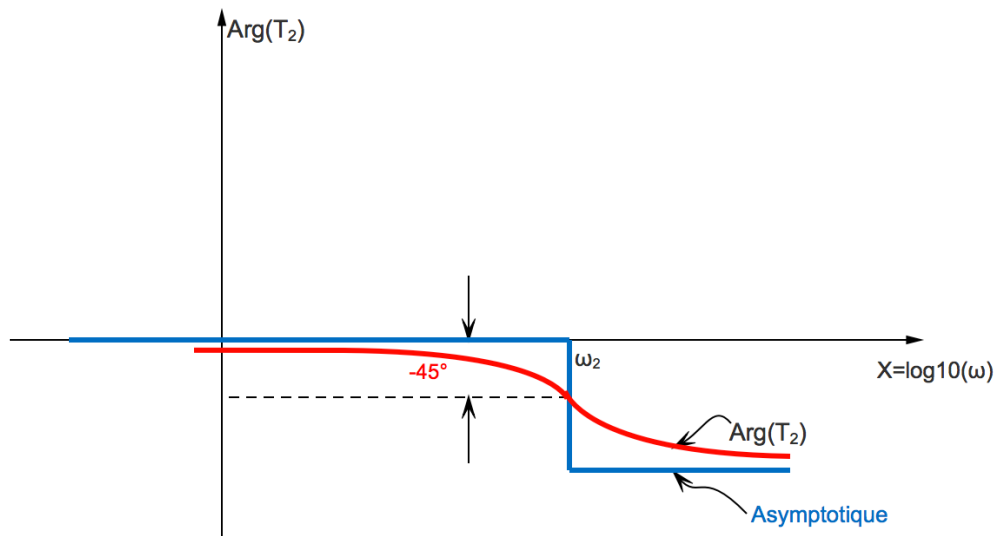
Si $\omega = \omega_2$, $Y = |T_2|_{dB} = -10 \log_{10}(2) = -20 \log_{10}(\sqrt{2}) = -3dB$.

L'argument de T_2 est :

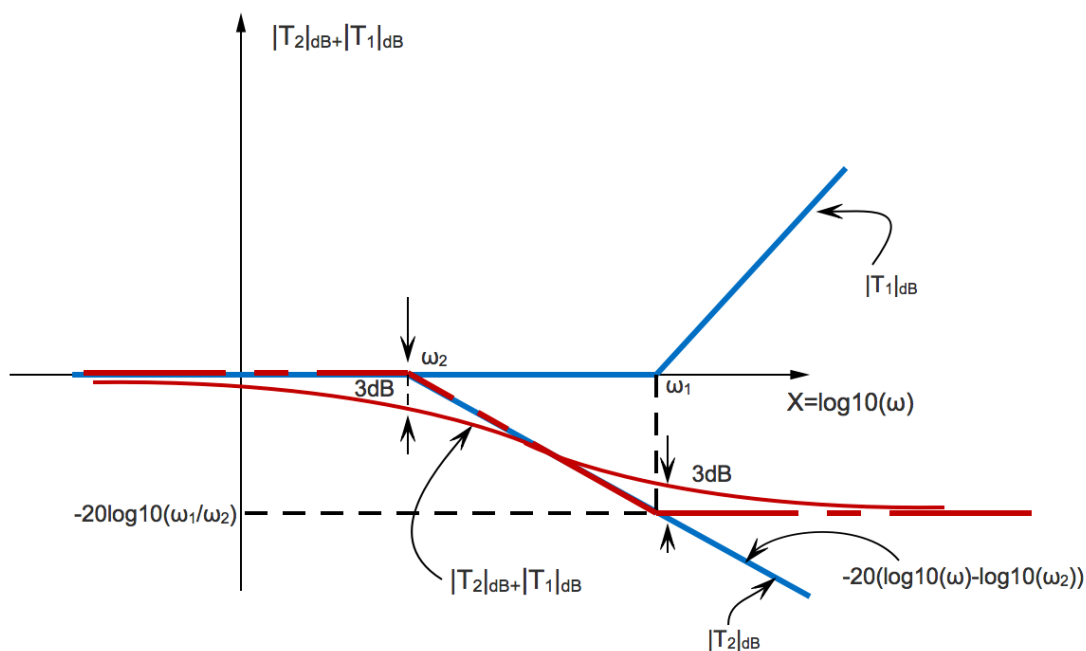
$$\angle T_2 = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right) = \begin{cases} -90^\circ, & \text{si } \omega \gg \omega_2 \\ 0, & \text{si } \omega \ll \omega_2 \\ -45^\circ, & \text{si } \omega = \omega_2 \end{cases}$$

Le diagramme de Bode de T_2 est représenté à la figure ci-dessous :





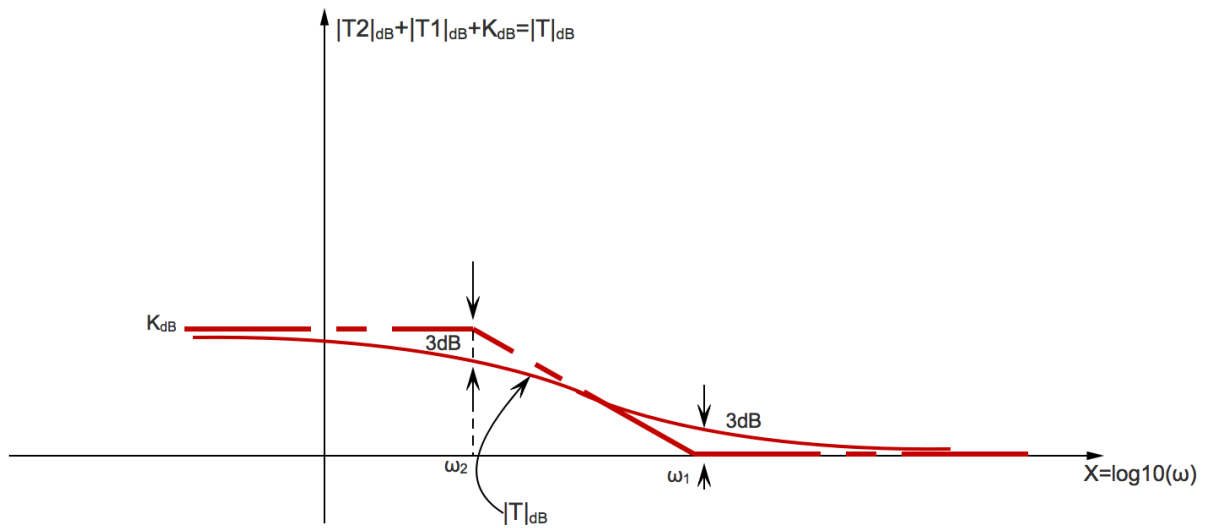
En additionnant les modules en décibels de T_1 et T_2 , nous obtenons :



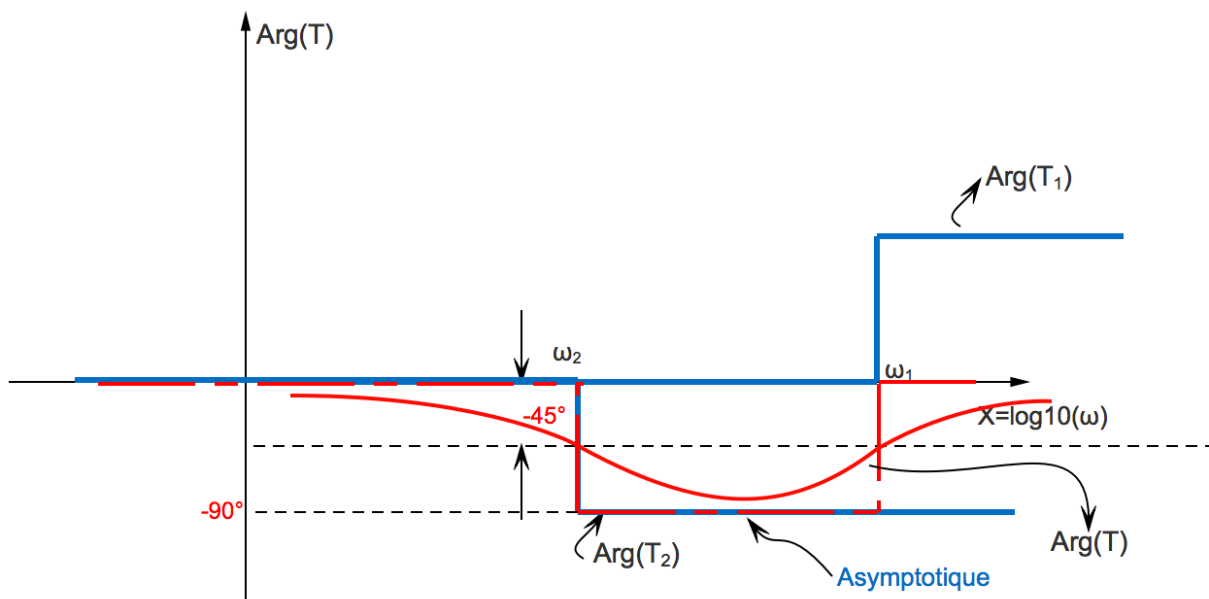
Compte tenu du fait que $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = R_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = 1 + \frac{R_2}{R_1} = K$, on a :

$$-20 \log_{10} \left(\frac{\omega_1}{\omega_2} \right) = -K_{dB}$$

Le diagramme de Bode en amplitude de la fonction de transfert du filtre actif de la figure 2 se déduit du schéma ci-dessus par translation (voir fig. ci dessous).



De même, l'addition des arguments de T_1 et T_2 entraîne l'argument de T puisque $K > 1$. La figure suivante illustre cette addition.



Exercice 3 :

1-a

Le quadripôle de la figure ci-dessous est caractérisé par les grandeurs I_i, I_o, v_i et v_o .

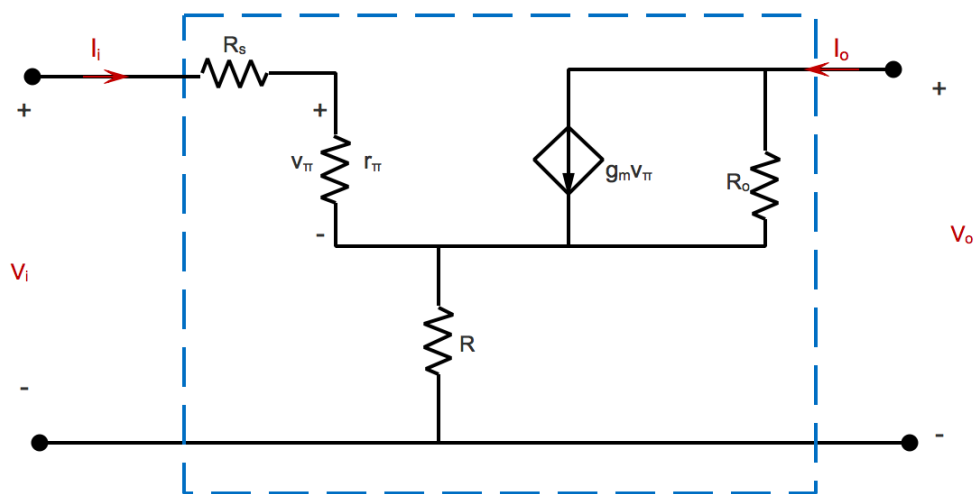


fig.3

On définit les paramètres hybrides et les paramètres admittances par les relations :

$$\begin{pmatrix} v_i \\ I_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_i \\ V_o \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} I_i \\ I_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_i \\ V_o \end{pmatrix}$$

- Calcul des paramètres h_{11} et h_{21}

Pour le calcul de ces paramètres, on court-circuite la sortie ($V_o = 0$). Il s'ensuit que :

$$h_{11} = v_i / i_i, \quad h_{21} = I_o / I_i$$

Le schéma devient celui de la figure suivante

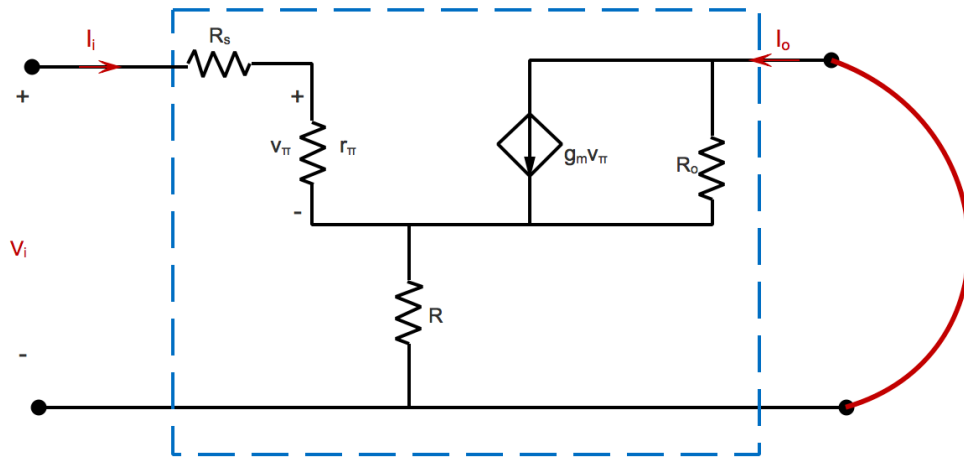
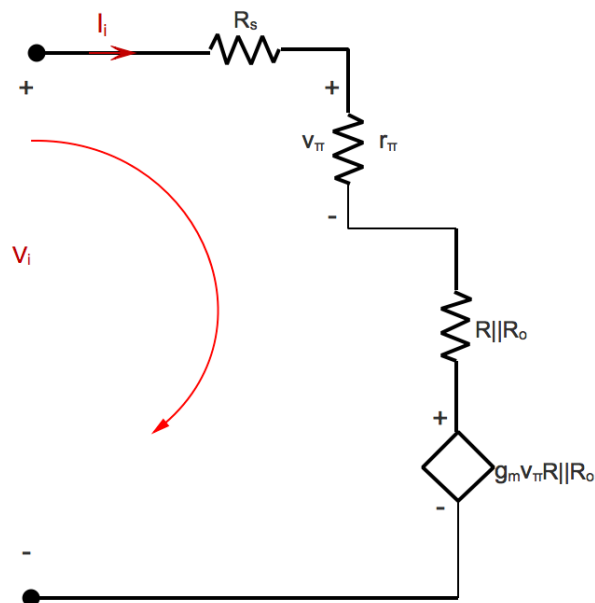


fig. α

En transformant la source de courant constituée de $(R_o || R)$ et de la source $g_m v_\pi$ en une source de tension (transformation Norton-Thévenin), nous obtenons le circuit équivalent suivant



La méthode de mailles appliquée au circuit ci-contre entraîne :

$$-v_i + (R_s + r_\pi + R_o || R)I_i + g_m v_\pi R_o || R = 0$$

D'autre part

$$v_\pi = r_\pi I_i$$

ce qui conduit à :

$$h_{11} = \frac{v_i}{I_i} = R_s + r_\pi + R_o || R + g_m r_\pi R_o || R$$

$$h_{11} = 1k + 2k + 0.5k + 50 \times 2 \times 0.5k = 53,5k\Omega$$

Maintenant, transformons la figure α à l'aide de la transformation Norton-Thévenin. Nous obtenons le circuit de la figure suivante

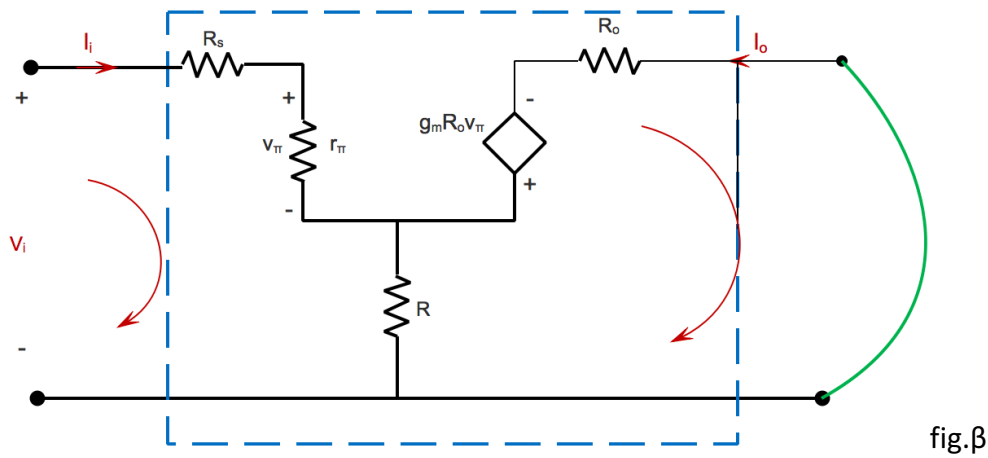


fig.β

La loi des mailles se traduit par les relations :

$$\begin{aligned} -v_i + (R_s + r_\pi)I_i + R(I_i + I_o) &= 0 \\ -R(I_i + I_o) + g_m R_o v_\pi - R_o I_o &= 0 \end{aligned}$$

Compte tenue de la relation $v_\pi = r_\pi I_i$, la seconde équation ci-dessus devient :

$$(R + R_o)I_o = (-R + g_m R_o r_\pi)I_i$$

Il s'ensuit que :

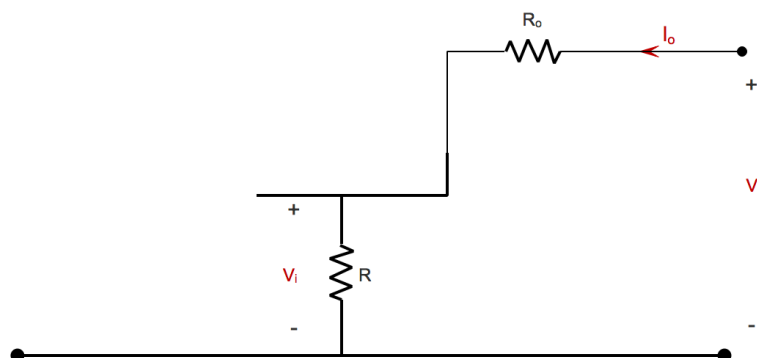
$$h_{21} = \frac{I_o}{I_i} = \frac{-R + g_m R_o r_\pi}{R + R_o} = \frac{-1 + 50 \times 1 \times 2}{2} = 49,5$$

- Calcul des paramètres h_{12} et h_{22}

On suppose cette fois-ci que le courant d'entrée I_i est nul.

$$h_{12} = \frac{v_i}{v_o}, \quad h_{22} = \frac{I_o}{v_o}$$

La tension $v_\pi = 0$. Le circuit de la figure 3 devient



La loi du 'Diviseur de tension' donne :

$$v_i = \frac{R}{R + R_o} v_o$$

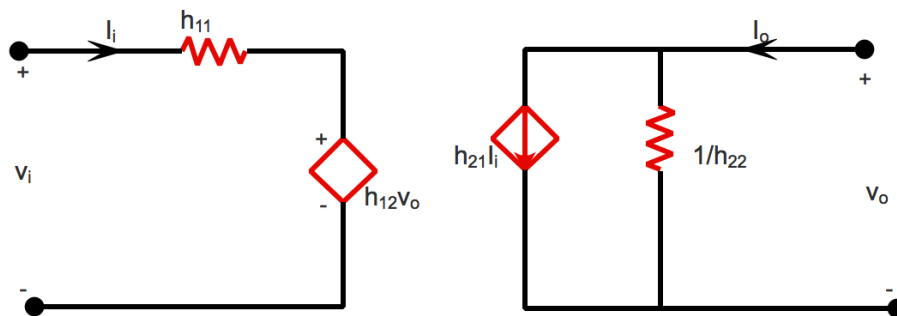
Soit :

$$h_{12} = \frac{v_i}{v_o} = \frac{R}{R + R_o} = \frac{1}{2}$$

De même, il est aisé de déduire que :

$$h_{22} = \frac{I_o}{v_o} = \frac{1}{R + R_o} = \frac{1}{2} mS$$

Le schéma équivalent du quadripôle en termes des paramètres hybrides est donné à la figure ci-dessous.



1-b

La matrice admittance du quadripôle est définie par :

$$\begin{pmatrix} I_i \\ I_o \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ v_o \end{pmatrix}$$

- Calcul des paramètres y_{11} et y_{21}

On court-circuite la sortie du quadripôle. Le circuit obtenu est celui de la fig. β .

$$y_{11} = \frac{I_i}{v_i} = \frac{1}{h_{11}} = \frac{1}{R_s + r_\pi + R_o || R + g_m r_\pi R_o || R} = \frac{1}{53,5} mS = 0.01876 mS$$

$$y_{21} = \frac{I_o}{v_i} = \frac{I_o}{I_i} \frac{I_i}{v_i} = \frac{h_{21}}{h_{11}}$$

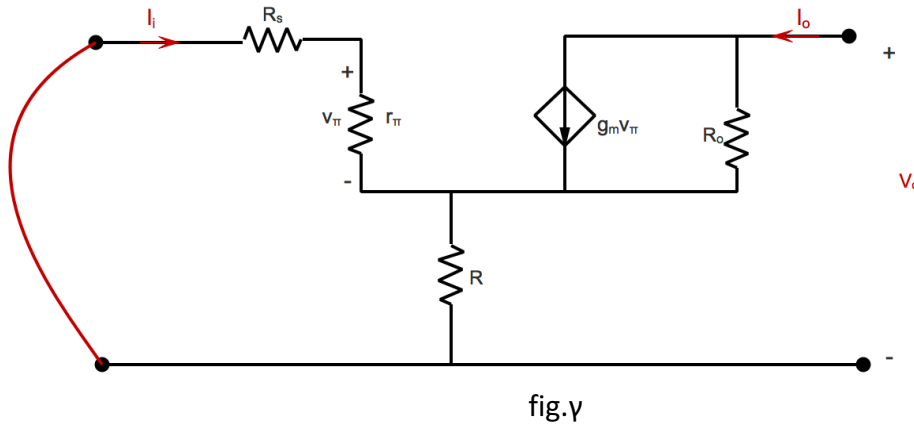
$$y_{21} = \frac{-R + g_m R_o r_\pi}{R_o + R} \frac{1}{R_s + r_\pi + R_o || R + g_m r_\pi R_o || R} = \frac{49.5}{53.5} mS = 0.925234 mS$$

• Calcul des paramètres y_{12} et y_{22}

On court-circuite l'entrée ($v_i = 0V$). Les paramètres y_{12} et y_{22} sont définis par :

$$y_{12} = I_i/v_o, \quad y_{22} = I_o/v_o$$

Pour la détermination de ces paramètres, on adopte le schéma suivant :



La loi 'Diviseur de de courant' nous donne :

$$I_i = -\frac{R}{R+r_\pi+R_s} I_o \quad (a)$$

La loi des mailles à la sortie se traduit par la relation :

$$-R(I_i + I_o) - R_o(I_o - g_m r_\pi I_i) + v_o = 0 \quad (b)$$

En reportant l'expression (a) dans (b), nous obtenons :

$$(g_m r_\pi R_o - R) \frac{R}{R+R_s+r_\pi} + R_o + R = \frac{v_o}{I_o} = y_{22}^{-1} = 26,75k\Omega$$

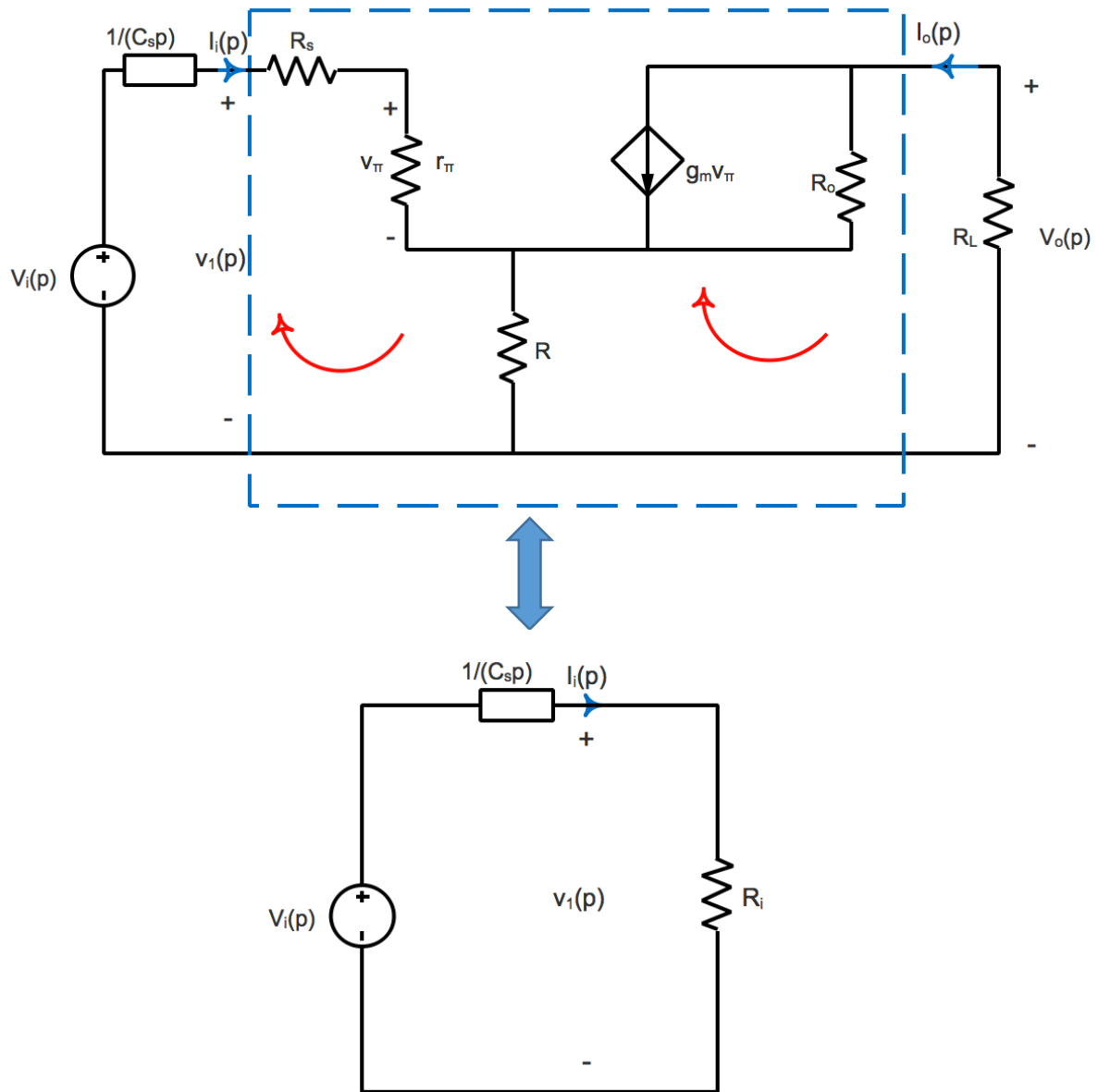
$$y_{22} = 0.0000373832 S = 37.3832\mu S$$

De plus, nous avons :

$$y_{12} = \frac{I_i}{v_o} = \frac{I_i}{I_o} \frac{I_o}{v_o} = -\frac{R}{R+r_\pi+R_s} y_{22} = -\frac{R}{R+r_\pi+R_s} \frac{1}{(g_m r_\pi R_o - R) \frac{R}{R+R_s+r_\pi} + R_o + R} = -9.34579\mu S$$

2-

Le Schéma équivalent du circuit de la figure 3 dans le domaine fréquentiel de fréquence complexe p est représenté à la figure ci dessous.



- Maille d'entrée :

3-

$$V_1 = (R_s + r_\pi)I_i + R(I_i + I_o) \quad (1)$$

$$V_o = -R_L I_o = R(I_o + I_i) + R_o(I_o - g_m r_\pi I_i) \quad (2)$$

Compte tenue de l'équation (2), nous déduisons :

$$I_o = \frac{g_m r_{\pi} R_o - R}{R_L + R + R_o} I_i \quad (3)$$

En reportant l'équation (3) dans la relation (1), nous obtenons :

$$V_i = R_i I_i = (R_s + r_{\pi} + R) I_i + R \frac{g_m r_{\pi} R_o - R}{R_L + R + R_o} I_i$$

D'où :

$$R_i = R_s + r_{\pi} + R + R \frac{g_m r_{\pi} R_o - R}{R_L + R + R_o} = 20,5 k\Omega$$

Le gain en tension peut donc être mis sous la forme :

$$T(j\omega) = \frac{V_o}{V_i} = \frac{V_o}{V_1} \frac{V_1}{V_i}$$

$$\frac{V_o}{V_1} = - \frac{R_L \frac{g_m r_{\pi} R_o - R}{R_L + R + R_o}}{R_i}$$

$$\frac{V_1}{V_i} = \frac{R_i}{R_i + \frac{1}{Cj\omega}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{R_i Cj\omega}} = \frac{1}{1 - j \frac{\omega_i}{\omega}}, \quad \omega_i = \frac{1}{R_i C}$$

Soit :

$$T(j\omega) = - \frac{R_L}{R_i} \frac{g_m r_{\pi} R_o - R}{R_L + R + R_o} \frac{1}{1 - j \frac{\omega_i}{\omega}}$$

Posons $K = \frac{R_L}{R_i} \frac{g_m r_{\pi} R_o - R}{R_L + R + R_o} = 3,219$. $\omega_i = 4.878 \cdot 10^7 \text{ rad/s}$

- Gain en décibel

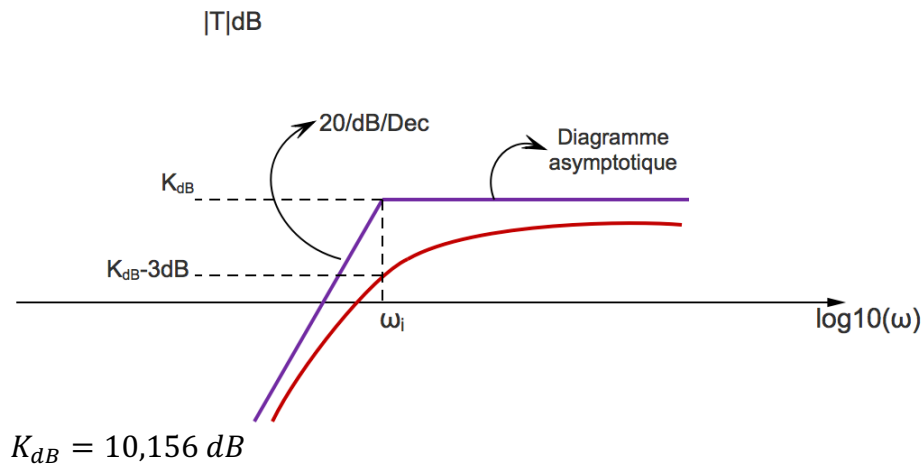
$$|T|_{dB} = 20 \log_{10} \left(\frac{K}{\left| 1 - \frac{j\omega_i}{\omega} \right|} \right)$$

$$|T|_{dB} = K_{dB} - 20 \log_{10} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_i}{\omega} \right)^2} \right)$$

Si $\omega_i \ll \omega$, $|T|_{dB} \cong K_{dB}$

Si $\omega \ll \omega_i$, $|T|_{dB} \cong K_{dB} + 20(\log_{10}(\omega) - \log_{10}(\omega_i)) = 20(X - X_{\omega_i}) + K_{dB}$

Si $\omega = \omega_i$, $|T|_{dB} \cong K_{dB} - 3dB$



• Phase

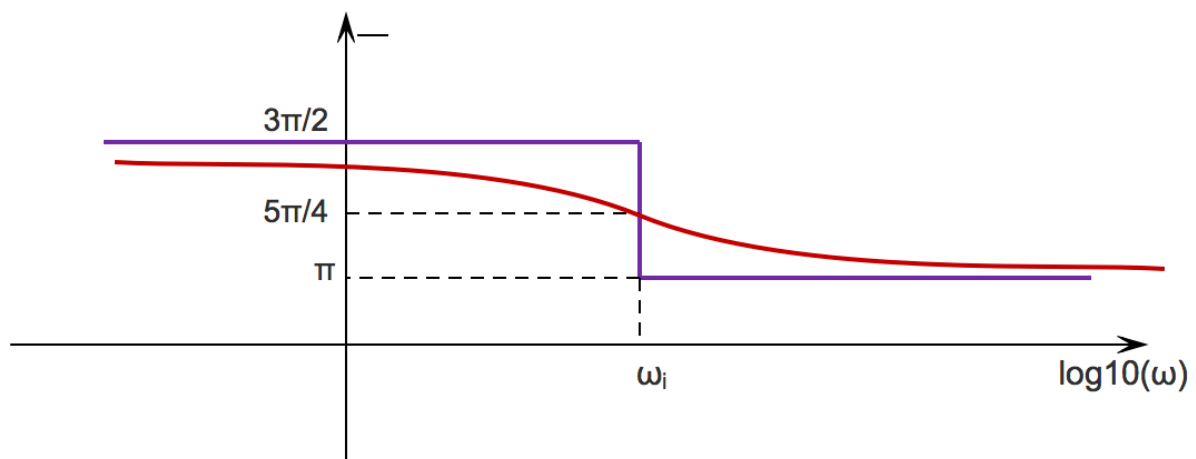
$$\angle T = \pi + \arctan\left(\frac{\omega_i}{\omega}\right)$$

Etude asymptotique

Si $\omega \gg \omega_i$, $\angle T = \pi$

Si $\omega \ll \omega_i$, $\angle T = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$

Si $\omega = \omega_i$, $\angle T = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$



Il s'agit d'un filtre passe haut du premier ordre.