Antennes

Master Matière et Rayonnement

Année 2017 -2018

A. MAAOUNI
Equipe ESMAR

Electromagnétisme du rayonnement

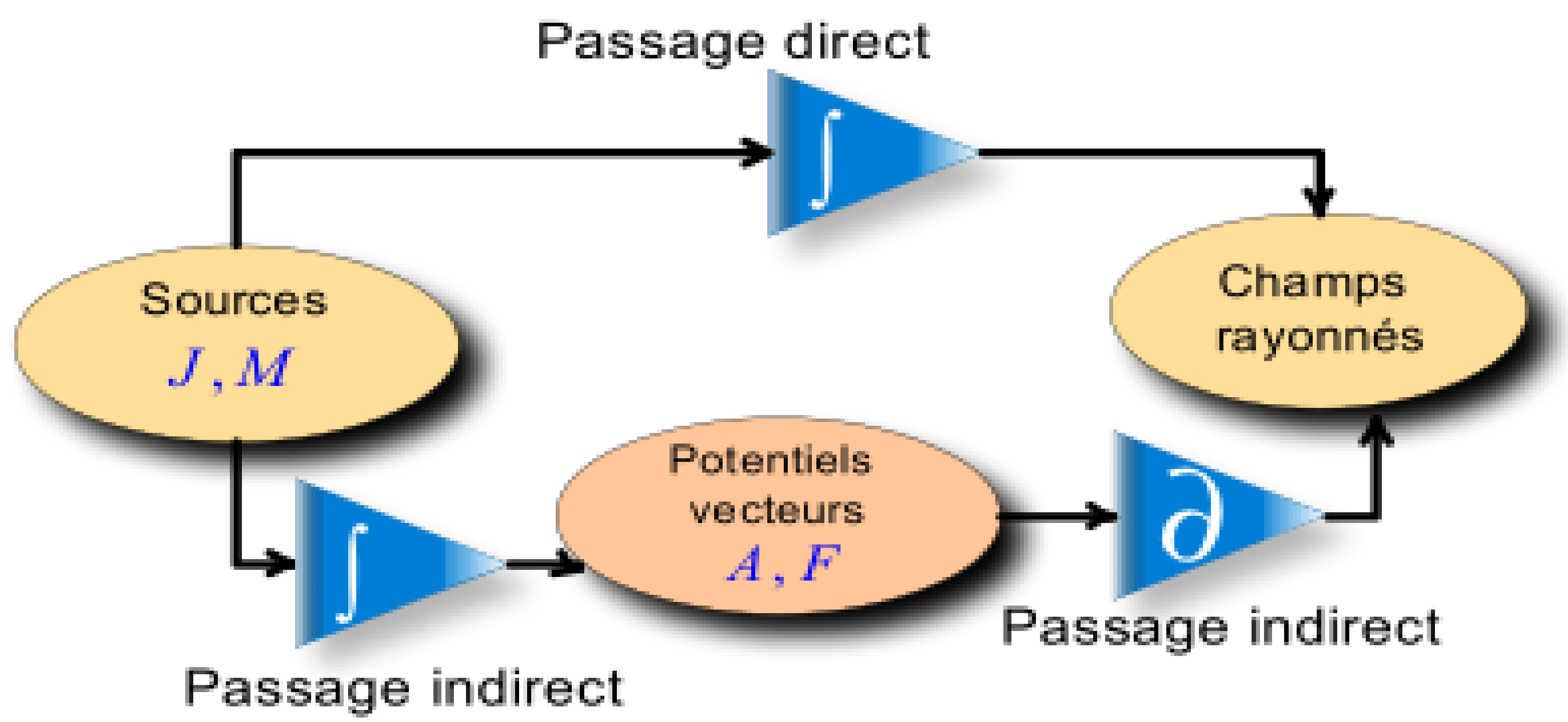
Chapitre 1 : Intégrales de rayonnement et potentiels retardés

Equation de rayonnement

- Les sources électromagnétiques créent des champs rayonnés dans l'espace.

- Le passage direct (par intégration directe) de l'expression des sources électromagnétiques J et M vers les champs rayonnés qui en découlent est difficile.

- La création d'entités mathématiques (sans fondement physique) appelées **potentiels vecteurs** reste une issue souhaitable et assez simple pour établir les expressions des champs rayonnés.



Passages des sources au champs rayonnés.

Potentiel vecteur **A**

Le champ magnétique B est de $divergence\ nulle$: $\nabla . \boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$
Il est donc possible de le représenter comme le $rotationnel$ d'un champ vectoriel :

$$\nabla . \boldsymbol{B} = 0 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}, \boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \boldsymbol{A}$$

Le champ $\boldsymbol{A}$ est appelé *potentiel vecteur*.

L'équation de Faraday, en termes de transformées de Fourier, s'écrit :

$$\nabla \times \overline{\boldsymbol{E}} = -j\omega \overline{\boldsymbol{B}}$$

$$\nabla \times \underbrace{(\overline{\boldsymbol{E}} + j\omega \overline{\boldsymbol{A}})}_{-\nabla\phi} = \boldsymbol{0}$$

$$\psi(r,t) = \int \frac{1}{2\pi} \bar{\psi}(r,\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$\overline{\boldsymbol{E}} + j\omega \overline{\boldsymbol{A}}$ est un champ de gradient. Il s'ensuit donc que :

$$\overline{\boldsymbol{E}} = -\nabla\phi - j\omega \overline{\boldsymbol{A}}$$

Compte tenu de la relation $\nabla\times\nabla\times\bar{\boldsymbol{A}} = \nabla(\nabla.\bar{\boldsymbol{A}}) - \nabla^2\bar{\boldsymbol{A}}$

et de l'équation d'ampère : $\nabla\times\bar{\boldsymbol{H}} = \bar{\boldsymbol{J}} + j\omega\epsilon\,\bar{\boldsymbol{E}}$, il est aisé de prouver que :

$$\nabla^2\bar{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{k}^2\bar{\boldsymbol{A}} = -\mu\bar{\boldsymbol{J}} + \nabla\underbrace{(\nabla.\bar{\boldsymbol{A}} + j\omega\epsilon\mu\phi)}_{0}, \qquad k^2 = \omega\mu\epsilon$$

Il existe plusieurs possibilités de définir la divergence de $\bar{\boldsymbol{A}}$, celle qui simplifie l'équation ci-dessus porte le nom de *condition de Lorentz* :

$$\nabla.\bar{\boldsymbol{A}} + j\omega\epsilon\mu\phi = 0; \qquad \phi = -\frac{1}{j\omega\epsilon\mu}\nabla.\bar{\boldsymbol{A}}$$

On aura donc :

1 $$\nabla^2\bar{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{k}^2\bar{\boldsymbol{A}} = -\mu\bar{\boldsymbol{J}}$$

$$\bar{\boldsymbol{E}} = -\nabla\phi - j\omega\bar{\boldsymbol{A}}$$
$$= -j\omega\bar{\boldsymbol{A}} - j\frac{1}{\omega\mu\epsilon}\nabla(\nabla.\bar{\boldsymbol{A}})$$

ρ: densité de charge

et

2 $$\nabla^2\phi + \boldsymbol{k}^2\phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Potentiels retardés

Le système d'équations (1, 2) peut être mis sous la forme générale suivante :

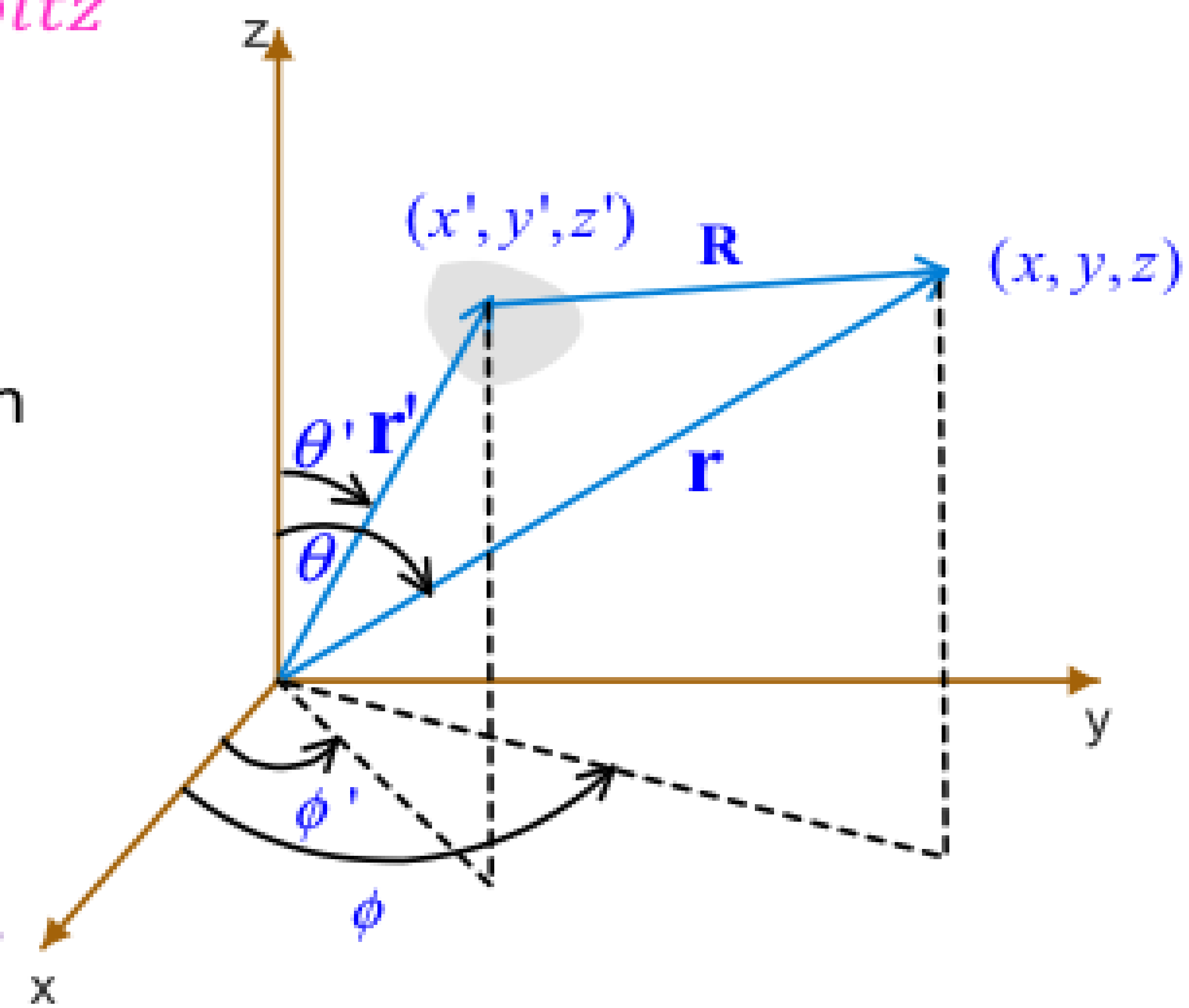
$$\nabla^2\overline{\boldsymbol{\psi}} + \boldsymbol{k}^2\overline{\boldsymbol{\psi}} = -\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}\,(\boldsymbol{r}), \qquad \bar{\psi} = \bar{A}\,,\boldsymbol{\phi}$$

Cette équation est appelée *équation d'Helmholtz*

Fonction de Green

On définit la fonction de Green $G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$ de l'équation de Helmholtz comme étant sa solution pour une source ponctuelle située à $\boldsymbol{r}'$:

$$(\nabla^2 + \boldsymbol{k}^2)G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = -\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$$



- La fonction de Green, solution précise de l'équation, dépend des conditions aux limites imposées au problème
- G possède deux arguments, r $(position\ du\ point\ d'observation)$ et r' $(position\ de\ la\ source)$

- *Interprétation physique* : G représente l'amplitude du champ *au point* r d'une source monochromatique située au point r'

Si la fonction de Green est connue, on peut écrire la solution générale de l'équation de Helmholtz sous la forme :

$$\overline{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{r}) = \iiint_{V'} G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\bar{\varepsilon}\,(\boldsymbol{r}')dv'$$

En l'absence de l'obstacle (rayonnement en espace infini)

- L'invariance par translation fait que la fonction de Green $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ ne dépend que de la position $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ relative du point d'observation par rapport à la source.
- L'invariance par rotation fait que la fonction de Green $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ ne dépend que de $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$.

On peut écrire dans ce cas :

$$\overline{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{r}) = \iiint_{V'} G\,(|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|)\;\bar{\varepsilon}(\boldsymbol{r}')dv'$$

Plaçons la source à l'origine $\boldsymbol{r}' = \mathbf{0}$. Comme $\boldsymbol{G}$ ne dépend pas des angles, l'utilisation du système de coordonnées sphériques se traduit par :

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r^2G(r)) + k^2G(r) = -\delta(\boldsymbol{r}),$$

Si $\mathrm{r} \neq 0,$ L'équation est homogène et admet pour solution :

$$A\frac{e^{-jkr}}{r} + B\frac{e^{jkr}}{r}$$

Le premier terme correspond à une onde qui s'éloigne de la source et le second terme correspond à une onde qui s'en approche. Les conditions aux limites du rayonnement sont justement que l'onde s'éloigne de la source, ce qui se traduit par $B = 0$.

La constante A est déterminée en supposant que la fonction de Green prenne la valeur statique bien connue $\frac{1}{4\pi r}$ quand $k \to 0,$ ce qui conduit à:

$$A = 1/4\pi$$

En bref, la fonction de Green recherchée est : $$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi}}\frac{e^{-jk|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

La solution générale à l'équation de Helmholtz est donc :

$$\overline{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{r}) = \iiint_{V'} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi}} \frac{e^{-jk|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \bar{\varepsilon}(\boldsymbol{r}')dv'$$

Potentiels retardés

Rétablissons maintenant la dépendance temporelle en calculant la transformée de Fourier inverse, c'est-à-dire en passant de $\overline{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{r},\omega)$ à $\overline{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{r},t)$:

$$\overline{\boldsymbol{\psi}}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{t}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{j\omega t} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi}} \frac{e^{\frac{-j\omega}{v}|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \bar{\varepsilon}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{\omega})dv'$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi}} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{1}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \underbrace{\int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-j\omega\left(t-\frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{v}\right)} \bar{\varepsilon}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{\omega})\, dv'}_{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{t}')}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4\pi}} \iiint_{V'} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{t}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} dv', \qquad t' = t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{v}$$

La solution générale à l'équation d'onde pour les potentiels électromagnétiques est donc :

$$\boldsymbol{A}(r,t) = \frac{\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{4\pi}} \iiint_{V'} \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{t}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} dv', \qquad t' = t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{v}$$

$$\phi(r,t) = \frac{\boldsymbol{\epsilon}}{\boldsymbol{4\pi}} \iiint_{V'} \frac{\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{r}',\boldsymbol{t}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} dv', \qquad v = 1/\sqrt{\epsilon\mu}$$

Les potentiels ainsi obtenus portent le nom de *potentiels retardées*. Ils ont la même forme qu'en électrostatique ou en magnétostatique, sauf que les sources contribuent non pas au temps d'observation t, mais au temps antérieur t'

Potentiel vecteur électrique **F**

Les charges et courants magnétiques n'existent pas en réalité, mais constituent un concept fort utile pour résoudre certains problèmes de rayonnement; en particulier pour l'étude des antennes à ouvertures où les champs aux ouvertures sont remplacés par des courants magnétique et électrique selon le principe d'équivalence (équivalence de Love).

Le champ généré par un courant magnétique harmonique dans une région Homogène, avec $J = 0, M \neq 0$ satisfait :

$$\nabla . \overline{\boldsymbol{D}} = 0$$

Ce qui implique un champ électrique sous la forme :

$$\overline{\boldsymbol{E}} = -1/\epsilon \nabla \times \overline{\boldsymbol{F}}$$

Ce potentiel vecteur $\overline{\boldsymbol{F}}$ *est associé* à *la densité de courant magnétique*

L'utilisation de l'équation d'ampère conduit à l'expression suivante :

$$\nabla \times (\overline{\boldsymbol{H}} + j\omega \overline{\boldsymbol{F}}) = 0$$

Le champ entre parenthèses de l'expression ci-dessus est un champ de gradient, on peut donc écrire :

$$\overline{\boldsymbol{H}} = -j\omega \overline{\boldsymbol{F}} - \nabla . \phi_m$$

De la même manière que pour les potentiels $\overline{\boldsymbol{A}}$ **et** $\overline{\boldsymbol{\phi}}$, on montre que :

$$\overline{\mathbf{F}}(\boldsymbol{r}) = \iiint_{V'} \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{e^{-jk|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{r}') dv'$$

Régions des champs des antennes

Les expressions des potentiels retardés sont adéquates pour la détermination des champs pour n'importe quelle distribution de charge et de courant. Cependant, l'intérêt pour les champs rayonnés véhiculant une importante puissance à grandes distances de leurs sources de courant impose quelques approximations.

Trois régions aux caractéristiques différentes pour les expressions des champs sont à distinguer :

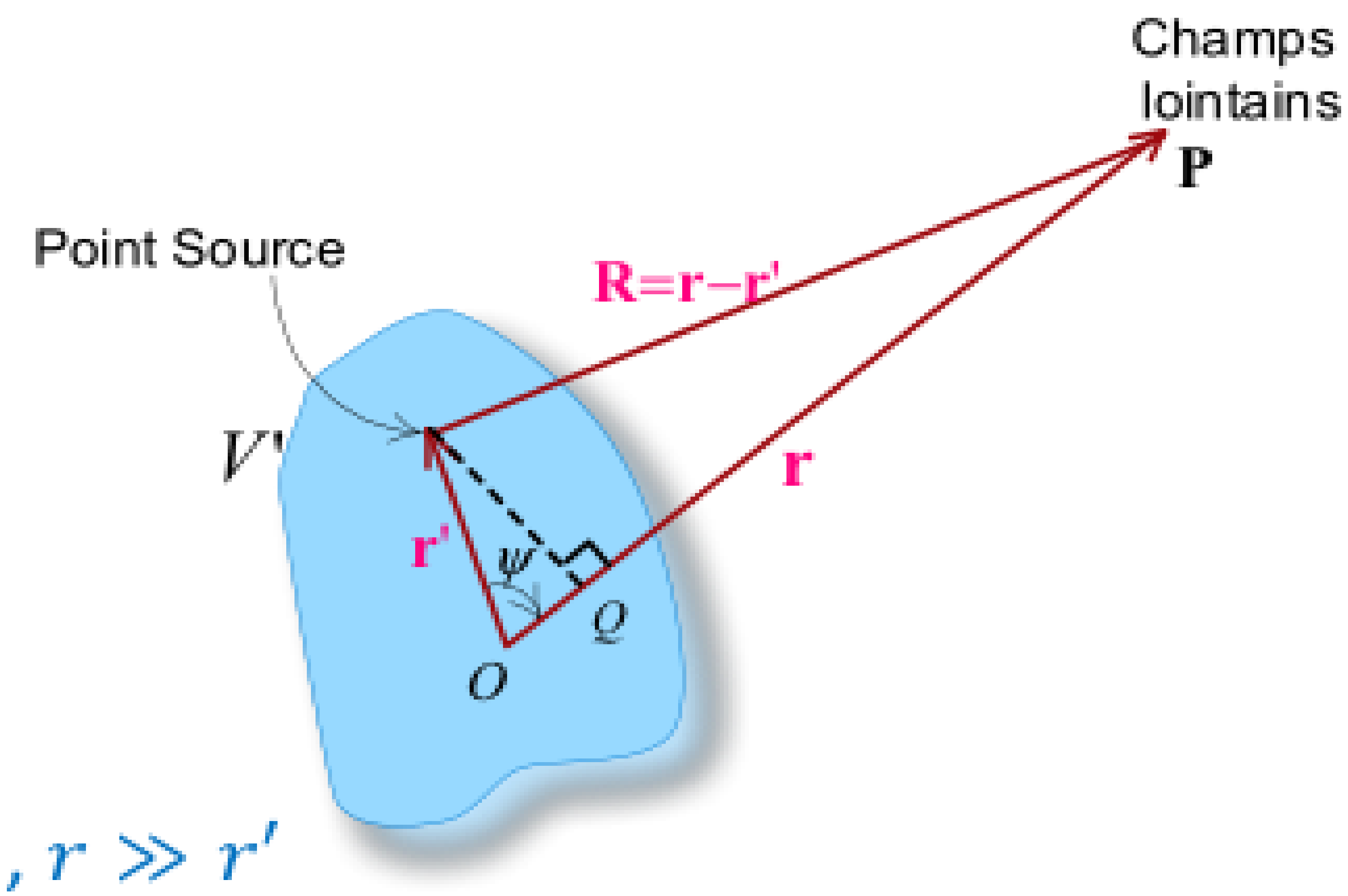
Champs lointains

$$R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\boldsymbol{r}.\boldsymbol{r}'}$$

$$= \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\psi)}$$

$$\cong r - r'\cos(\psi) + \frac{r'^2}{2r}\sin^2(\psi),\, r \gg r'$$

$$\cong r - \underbrace{\hat{\boldsymbol{r}}.\boldsymbol{r}'}_{OQ},\, r \gg r'$$



Tenant compte de cette approximation dans les expressions des potentiels $\overline{\boldsymbol{A}}$ et $\overline{\boldsymbol{F}}$, on trouve que :

$$\overline{\mathbf{A}}(\boldsymbol{r}) = \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \underbrace{\iiint_{V'} e^{jk\boldsymbol{r}'.\hat{\boldsymbol{r}}} \overline{\boldsymbol{J}}(\boldsymbol{r}')dv'}_{\overline{\boldsymbol{N}}} \qquad \overline{\mathbf{F}}(\boldsymbol{r}) = \epsilon \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \underbrace{\iiint_{V'} e^{jk\boldsymbol{r}'.\hat{\boldsymbol{r}}} \overline{\boldsymbol{M}}(\boldsymbol{r}')dv'}_{\overline{\boldsymbol{L}}}$$

Pour obtenir ces expressions, en plus de l'approximation $r' \ll r$ le terme du second ordre (en r'^2) a été ignoré dans l'argument de l'exponentiel.
Cette seconde approximation est valable si :

$$\frac{kr'^2}{2r} \ll 1, \qquad k = 2\pi/\lambda$$

En remplaçant $2r'$ par la longueur typique l de l'antenne, nous obtenons les conditions :

$$r \gg l, \quad r \gg 2l^2/\lambda, \quad k = 2\pi/\lambda$$

Zone de Fraunhofer

Ces conditions définissent la ***zone de Fraunhofer***. Dans cette zone loin de l'antenne, les termes des champs en $1/r^2$ et $1/r^3$ sont négligés et les champs électriques et magnétiques sont orthogonaux à la direction de propagation $\hat{\boldsymbol{r}}$

Expressions des champs lointains

Le champ magnétique découle de l'expression suivante :

$(\hat{\boldsymbol{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}, \hat{\boldsymbol{\phi}})$, base sphérique

$$\mu\overline{\boldsymbol{H}} = \nabla\times\overline{\boldsymbol{A}}$$

$$= \frac{1}{rsin(\theta)}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin(\theta)\,\bar{A}_{\phi}) - \frac{\partial\bar{A}_{\theta}}{\partial\phi}\right]\hat{\boldsymbol{r}} +$$

$$\left[\frac{1}{rsin(\theta)}\frac{\partial}{\partial\phi}\bar{A}_{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial(r\bar{A}_{\phi})}{\partial r}\right]\hat{\boldsymbol{\theta}} +$$

$$\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\bar{A}_{\theta}) - \frac{1}{r}\frac{\partial\bar{A}_{r}}{\partial\theta}\right]\hat{\boldsymbol{\phi}}$$

En ne conservant que les termes en $1/r$ dans l'expression du rotationnel, nous obtenons :

$$\mu\overline{\boldsymbol{H}} = \underbrace{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,\overline{A}_{\theta})\,\hat{\boldsymbol{\phi}}}_{\mu H_{\phi}} + \underbrace{-\frac{1}{r}\frac{\partial(r\,\overline{A}_{\phi})}{\partial r}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}}_{\mu H_{\theta}}$$

Les termes en $1/r^2$ du champ $\overline{\boldsymbol{E}}$ sont liés à l'induction

$$\mu\overline{H}_{\phi} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,\overline{A}_{\theta}) = \frac{1}{r}(-jk)\frac{e^{-jkr}}{4\pi}\mu\overline{N}_{\theta}$$

$$\mu\overline{H}_{\theta} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,\overline{A}_{\theta}) = \frac{1}{r}(jk)\frac{e^{-jkr}}{4\pi}\mu\overline{N}_{\phi}$$

Soit :

$$\overline{H}_\theta = \frac{jk}{4\pi r} e^{-jkr}\,\overline{N}_\phi$$

$$\overline{H}_\phi = -\frac{jk}{4\pi r} e^{-jkr}\,\overline{N}_\theta$$

A partir de l'équation d'ampère, nous déduisons le champ électrique :

$$\overline{\boldsymbol{E}} = \frac{1}{j\omega\epsilon}\nabla\times\overline{\boldsymbol{H}} = \frac{1}{j\omega\epsilon}\left(\hat{\boldsymbol{r}}\frac{\partial}{\partial r} + Opérateurs\ dérivées\ angulaires\right)\times\overline{\boldsymbol{H}}$$

$$\cong \frac{-jk}{j\omega\epsilon}\hat{\boldsymbol{r}}\times\overline{\boldsymbol{H}}$$

$$= \frac{-jk}{j\omega\epsilon}\hat{\boldsymbol{r}}\times(\overline{H}_\theta\widehat{\boldsymbol{\theta}} + \overline{H}_\phi\widehat{\boldsymbol{\phi}})$$

$$= \frac{-jk}{j\omega\epsilon}\,(\overline{H}_\theta\widehat{\boldsymbol{\phi}} - \overline{H}_\phi\widehat{\boldsymbol{\theta}})$$, $k = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$

$$= \eta\,(\overline{H}_\theta\widehat{\boldsymbol{\phi}} - \overline{H}_\phi\widehat{\boldsymbol{\theta}})$$

, $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ impédance Intrinsèque du milieu

$\eta \sim 120\pi\ \Omega$

On déduit :

$$\bar{E}_\theta = -\eta\overline{H}_\phi = \frac{-j\omega\mu}{4\pi r}e^{-jkr}\,\overline{N}_\theta$$

$$\bar{E}_\phi = \eta\overline{H}_\theta = \frac{-j\omega\mu}{4\pi r}e^{-jkr}\,\overline{N}_\phi$$

Compte tenu des résultats précédents, le champ électromagnétique peut être écrit sous la forme vectorielle suivante :

$$\overline{\boldsymbol{E}} = -j\omega\overline{\boldsymbol{A}}_{\perp}, \qquad \overline{\boldsymbol{H}} = \frac{j\omega}{\eta}\overline{\mathbf{A}}_{\perp}\times\hat{\boldsymbol{r}}$$

On remarque que le champ électromagnétique est transverse à la direction de propagation et seules les composantes $\bar{A}_{\theta}$ et $\overline{\mathrm{A}}_{\phi}$ servent à le définir.

De la même manière, dans le cas où $\bar{\boldsymbol{J}} = 0$ et $\overline{\boldsymbol{M}} \neq \mathbf{0}$, le champ électrique et le champ magnétique lointains se déduisent à partir du potentiel vecteur $\overline{\boldsymbol{F}}$:

$$\overline{\boldsymbol{E}} = -j\omega\overline{\boldsymbol{F}}_{\perp}, \qquad \overline{\boldsymbol{E}} = -j\omega\eta\overline{\boldsymbol{F}}_{\perp}\times\hat{\boldsymbol{r}} \qquad \overline{\boldsymbol{F}}_{\perp} = \bar{F}_{\theta}\widehat{\boldsymbol{\theta}} + \bar{F}_{\phi}\widehat{\boldsymbol{\phi}}$$

$$\bar{H}_{\theta} = -\frac{j\omega\epsilon}{4\pi r}e^{-jkr}\,\bar{L}_{\theta}$$

$$\bar{H}_{\theta} = -\frac{j\omega\epsilon}{4\pi r}e^{-jkr}\,\bar{L}_{\theta}$$

$$\bar{E}_{\theta} = -\frac{jk}{4\pi r}e^{-jkr}\,\bar{L}_{\phi}$$

$$\bar{E}_{\phi} = +\frac{j\omega\epsilon}{4\pi r}e^{-jkr}\,\bar{L}_{\theta}$$

Les champs produits par une antenne sont entièrement définis par la connaissance de la distribution de courant en module et en phase.

Zone du Champ proche : Zone de Rayleigh $r < \frac{l^2}{2\lambda}$

Au voisinage immédiat de l'antenne, il y a accumulation d'énergie électrique et magnétique avec prépondérance des termes inductifs et électrostatiques.

Zone de Fresnel :

Elle est située entre les deux zones (cf. figure ci-dessous). Les champs dans cette région oscillent fortement.