

**Antennes
Chapitre 4**

**A. MAAOUNI
ESMAR
2017-2018**

Antennes boucles

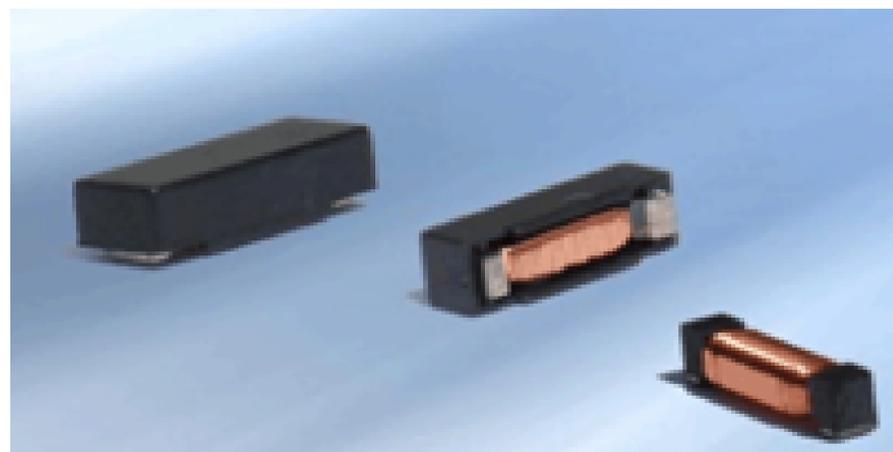
Chapitre 4



Antenne magnétique ou antenne boucle

Les boucles constituent le deuxième type d'antennes le plus courant. L'antenne boucle ou dipôle magnétique est constituée d'une boucle pouvant avoir plusieurs formes (circulaire, losange, ellipse, carré, rectangle, ...etc.).

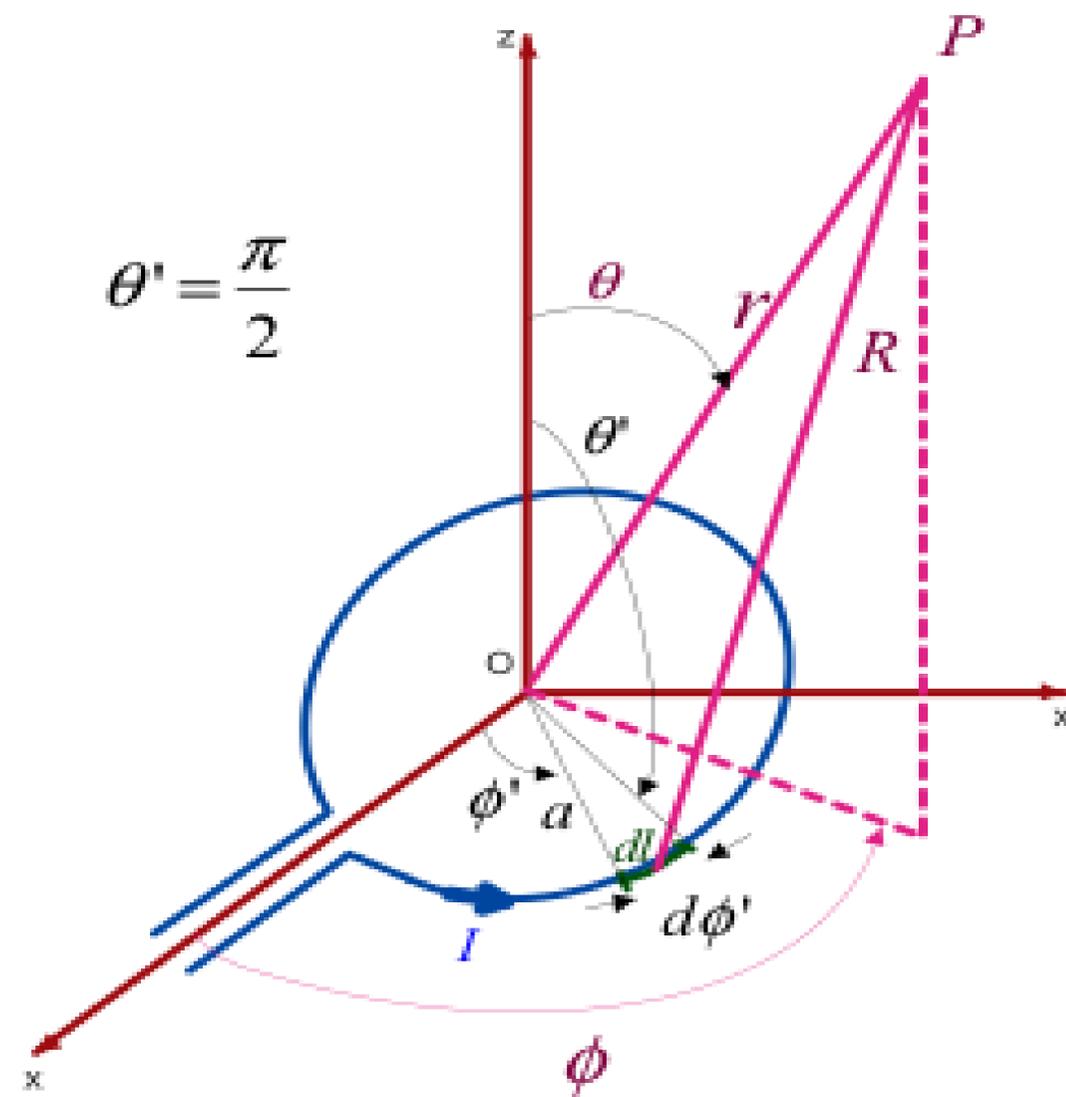
- Elle est principalement inductive sa capacité propre est assez faible.
- Le rayonnement lointain d'une petite antenne boucle est généralement faible.
- Elle est utilisée comme antenne champ proche, notamment pour les applications de 'Radio Frequency Identification' (RFID) et ceci en raison du fort champ magnétique en Zone proche.
- Améliorer le facteur de qualité de l'antenne boucle se traduit par une augmentation de son champ magnétique. Celle-ci peut être assurée soit par l'augmentation du nombre de tours (de boucles) ou par l'insertion d'un matériau de grande perméabilité magnétique μ_r à l'intérieur de la boucle. On parle d'antenne Ferrite lorsque le matériau magnétique est utilisé.



Antenne RFID 20kHz-150kHz

Antenne boucle circulaire de rayon $a < \lambda/6\pi$

Considérons une boucle petite électriquement : une boucle de courant constant dont le rayon satisfait la relation : $a < \lambda/6\pi$



En général, le potentiel vecteur dû à la distribution de courant $\mathbf{I}(x', y', z')$ au point d'observation (x, y, z) est défini par :

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \int_C \mathbf{I}(x', y', z') \frac{e^{-jkR}}{R} dl'$$

Dans le cas de la boucle circulaire, la supposition d'une variation spatiale de courant constante, se traduit par :

$$\mathbf{I} = I_{\phi'} \mathbf{a}_{\phi'} = I_0 \mathbf{a}_{\phi'}$$

Compte tenue de l'identité vectorielle suivante :

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + a \hat{\mathbf{r}}'$$

On déduit :

$$R = \sqrt{r^2 - 2a \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}}' + a^2}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \hat{\mathbf{r}}' &= r \sin(\theta) \times \\ &\quad \cos(\phi - \phi') \\ dl' &= a d\phi' \end{aligned}$$

D'autre part, il est aisé de prouver que la projection de la distribution de courant dans la base $(\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\theta, \mathbf{a}_\phi)$ relative au point d'observation peut être mise sous la forme :

$$\mathbf{I} = I_0 (\sin(\theta) \sin(\phi - \phi') \mathbf{a}_r + \cos(\theta) \sin(\phi - \phi') \mathbf{a}_\theta + \cos(\phi - \phi') \mathbf{a}_\phi)$$

Ce qui entraîne :

$$\mathbf{A} = A_r \mathbf{a}_r + A_\theta \mathbf{a}_\theta + A_\phi \mathbf{a}_\phi$$

Où :

$$A_\phi = \frac{\mu a}{4\pi} \int_0^{2\pi} I_0 \cos(\phi') \frac{e^{-jk\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \sin(\theta) \cos(\phi')}}}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \sin(\theta) \cos(\phi')}} d\phi'$$

ϕ est choisi nul
 puisque la distribution
 de courant est
 indépendante du point
 d'observation (Elle est
 supposée constante)

La boucle étant petite, l'évaluation de l'intégrale ci-dessous peut être obtenue en utilisant le développement de Taylor au voisinage de 0 en a (rayon de la boucle) de

$$g = \frac{e^{-jk\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \sin(\theta) \cos(\phi')}}}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \sin(\theta) \cos(\phi')}}$$

à l'ordre 1 :

$$g \cong \frac{e^{-jkr}}{r} + a \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin(\theta) \cos(\phi') e^{-jkr}$$

Le report de l'approximation de g dans les intégrants de A_ϕ, A_r, A_θ entraîne :

$$\left\{ \begin{aligned}
 A_\phi &\cong \frac{\mu a}{4\pi} \int_0^{2\pi} I_0 \cos(\phi') \left(\frac{e^{-jkr}}{r} + a \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin(\theta) \cos(\phi') e^{-jkr} \right) d\phi' \\
 &= \frac{\mu a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I_0}{2} \left(a \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \sin(\theta) e^{-jkr} \right) d\phi' \\
 &= \frac{\mu a^2 I_0}{4} \left(\frac{jk}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-jkr} \sin(\theta) \\
 A_r &= 0 \\
 A_\theta &= 0
 \end{aligned} \right.$$

$\nabla \times \mathbf{A}$

$$= \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \begin{vmatrix} \mathbf{a}_r & r \mathbf{a}_\theta & r \sin(\theta) \mathbf{a}_\phi \\ \partial_r & \partial_\theta & \partial_\phi \\ A_r & r A_\theta & r \sin(\theta) A_\phi \end{vmatrix}$$

Compte tenu de la relation : $\nabla \times \bar{\mathbf{A}} = \frac{1}{\mu} \bar{\mathbf{H}}$, nous obtenons les expressions suivantes pour le champ magnétique :

$$\left\{ \begin{aligned}
 H_r &= \frac{jka^2 I_0 \cos(\theta)}{2r^2} \left(1 + \frac{1}{jkr} \right) e^{-jkr} \\
 H_\theta &= - \frac{(ka)^2 I_0 \sin(\theta)}{4r} \left(1 + \frac{1}{jkr} + \frac{1}{(jkr)^2} \right) e^{-jkr} \\
 H_\phi &= 0
 \end{aligned} \right.$$

1

De même, le report de l'expression du potentiel vecteur \mathbf{A} dans l'expression donnant le champ électrique, à savoir :

$$\mathbf{E} = -j\omega\mathbf{A} - j\frac{1}{\omega\mu\epsilon}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{A})$$

et l'utilisation de la divergence et du gradient en coordonnées sphériques

$$\nabla\cdot\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\partial_r(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\theta(\sin(\theta)A_\theta) + \frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi(A_\phi)$$

$$\nabla\psi = \mathbf{a}_r\partial_r\psi + \mathbf{a}_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta\psi + \mathbf{a}_\phi\frac{1}{r\sin(\theta)}\partial_\phi\psi$$

nous permettent d'avoir :

$$\begin{cases} E_r = 0 \\ E_\theta = 0 \\ E_\phi = \eta \frac{(ka)^2 I_0 \sin(\theta)}{4r} \left(1 + \frac{1}{jkr}\right) e^{-jkr} \end{cases} \quad \boxed{2}$$

- Les expressions $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$ du champ électromagnétique sont valables en toute région de l'espace excepté l'origine du repère ($r = 0$).

Puissance de rayonnement

La densité de puissance est donnée par le vecteur de **Poynting** complexe :

$$\begin{aligned}\bar{W} &= \frac{1}{2} \bar{E} \times \bar{H}^* && (\quad)^* \text{ désigne le complexe conjugué} \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{a}_\phi E_\phi \times (\mathbf{a}_r H_r^* + \mathbf{a}_\theta H_\theta^*) \\ &= \frac{1}{2} (-\mathbf{a}_r E_\phi H_\theta^* + \mathbf{a}_\theta E_\phi H_r^*)\end{aligned}$$

L'insertion des expressions **1** et **2** des composantes du champ électromagnétique dans la relation ci-dessus, nous donne l'expression de la composante radiale de la densité de puissance :

$$W_r = \eta \frac{(ka)^4}{32} |I_0|^2 \frac{\sin^2(\theta)}{r^2} \left(1 + j \frac{1}{(kr)^3} \right) \quad \boxed{3}$$

- Pour $kr \ll 1$ (région proche de l'antenne), la puissance est **réactive**
- Pour $kr \gg 1$ (région loin de l'antenne), la puissance est **réelle**.

La puissance rayonnée par l'antenne boucle est définie par :

$$\begin{aligned}P_{rad} &= \operatorname{Re} \left(\iint_S \mathbf{W} \cdot d\mathbf{S} \right), && S \text{ surface de la sphère de rayon } r \\ d\mathbf{S} &= ds \mathbf{a}_r = r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \mathbf{a}_r\end{aligned}$$

Soit :

$$\begin{aligned} P_{rad} &= \operatorname{Re} \left(\iint_S \mathbf{W} \cdot d\mathbf{S} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\iint_S W_r ds \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\iint_S W_r r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} W_r r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \left(\eta \frac{(ka)^4}{32} |I_0|^2 \frac{\sin^2(\theta)}{r^2} \left(1 + j \frac{1}{(kr)^3} \right) \right) r^2 \sin(\theta) d\theta d\phi \right) \\ &= \eta \left(\frac{\pi}{12} \right) (ka)^4 |I_0|^2 \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} \sin^3(\theta) d\theta = 4/3$$

Résistance de rayonnement R_r

Elle est définie par l'égalité : $P_{rad} = |I_{eff}|^2 R_r = \frac{|I_0|^2}{2} R_r$:

$$R_r = \eta \frac{\pi}{6} (ka)^4 = 31,71 \left(\frac{S^2}{\lambda^4} \right)$$

Boucle à un seul tour

$$R_r = N^2 \eta \frac{\pi}{6} (ka)^4 = 31,71 \left(\frac{S^2}{\lambda^4} \right)$$

Boucle à N tours

Champ lointain ($kr \gg 1$)

L'expression des champs électrique et magnétique dans la zone de Fraunhofer peut être déduite des expressions 1 et 2 établies précédemment sous la condition $kr \gg 1$, en ne gardant que les termes en $1/r$. Une autre façon de procéder consiste à approximer le potentiel vecteur \bar{A} de la sorte :

$$\bar{A} = A_{\phi} \mathbf{a}_{\phi} \cong \frac{\mu a^2 I_0 jk}{4 r} e^{-jkr} \sin(\theta) \mathbf{a}_{\phi}$$

On néglige le terme en $1/r^2$

et utiliser les relations établies au chapitre 1 suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{E} &= -j\omega \bar{A}_{\perp} \\ &= -j\omega \bar{A} \\ &= \eta \frac{I_0 k^2 a^2}{4} \frac{e^{-jkr}}{r} \sin(\theta) \mathbf{a}_{\phi} \end{aligned}$$

$$\bar{H} = \frac{1}{\eta} \mathbf{a}_r \times \bar{E}$$

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \frac{j\omega}{\eta} \bar{A}_{\perp} \times \mathbf{a}_r \\ &= \frac{j\omega}{\eta} \bar{A} \times \mathbf{a}_r \\ &= -\frac{I_0 a^2 k^2}{4} \frac{e^{-jkr}}{r} \sin(\theta) \mathbf{a}_{\theta} \end{aligned}$$

- Le champ lointain créé par une petite boucle est *TEM* (transverse électromagnétique) : La direction du champ \bar{E} , celle de \bar{H} et la direction de propagation forment un trièdre direct

Intensité de rayonnement / Directivité

L'intensité de rayonnement est définie par :

$$\begin{aligned}K(\theta, \phi) &= \operatorname{Re}(\bar{\mathbf{W}} \cdot \mathbf{a}_r r^2) \\ &= \operatorname{Re}(\bar{W}_r r^2) \\ &= \eta \frac{(ka)^4}{32} |I_0|^2 \sin^2(\theta)\end{aligned}$$

$\bar{\mathbf{W}}$ est le vecteur de Poynting Complexe

- Le diagramme de rayonnement normalisé est identique à celui d'un dipôle infinitésimal.

L'intensité de rayonnement maximale vaut :

$$K_{max} = \eta \frac{(ka)^4}{32} |I_0|^2$$

Elle est obtenue pour $\theta = \pi/2$.

La directivité de la boucle s'écrit :

$$D_{max} = \frac{K_{max}}{\frac{P_{rad}}{4\pi}} = 3/2$$

On en déduit de la relation ci-dessus, la surface effective de l'antenne :

$$A_{em} = \frac{\lambda^2}{4\pi} D_{max} = 3\lambda^2/8\pi$$

Antenne boucle circulaire de courant constant

Considérons dans ce cas une boucle de rayon a non nécessairement petit.
Le courant de boucle est supposé constant.

Zone de Fraunhofer

Pour un point d'observation en $\phi = 0$:

$$R = \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar \sin(\theta) \cos(\phi')} \cong r - a \sin(\theta) \cos(\phi'), \quad r \gg a$$

Pour le terme phase

$$R \cong r, \quad \text{Pour le terme amplitude}$$

Le potentiel vecteur $\bar{\mathbf{A}}$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \bar{A}_\phi \mathbf{a}_\phi = \frac{\mu a}{4\pi} \int_0^{2\pi} I_0 \cos(\phi') \frac{e^{-jk(r - a \sin(\theta) \cos(\phi'))}}{r} d\phi' \mathbf{a}_\phi \\ &= \frac{\mu a I_0}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_0^{2\pi} \cos(\phi') e^{jka \sin(\theta) \cos(\phi')} d\phi' \mathbf{a}_\phi \\ &= \frac{\mu a I_0}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \int_0^{2\pi} \cos(\phi') e^{jka \sin(\theta) \cos(\phi')} d\phi' \mathbf{a}_\phi \end{aligned}$$

Compte tenu de la relation :

$$\int_0^{2\pi} \cos(x) e^{j t \cos(x)} dx = 2j\pi J_1(t), \quad t \text{ réel}$$

J_1 : fonction de Bessel de Première espèce d'ordre 1

nous obtenons :

$$\bar{\mathbf{A}} = \underbrace{j \frac{\mu a I_0}{2} \frac{e^{-jkr}}{r} J_1(ka \sin(\theta))}_{\bar{A}_\phi} \mathbf{a}_\phi$$

Les champs électrique et magnétique se déduisent directement à partir de $\bar{\mathbf{A}}$:

$$\bar{\mathbf{E}} = \underbrace{\frac{\omega \mu a I_0}{2} \frac{e^{-jkr}}{r} J_1(ka \sin(\theta))}_{\bar{E}_\phi} \mathbf{a}_\phi$$

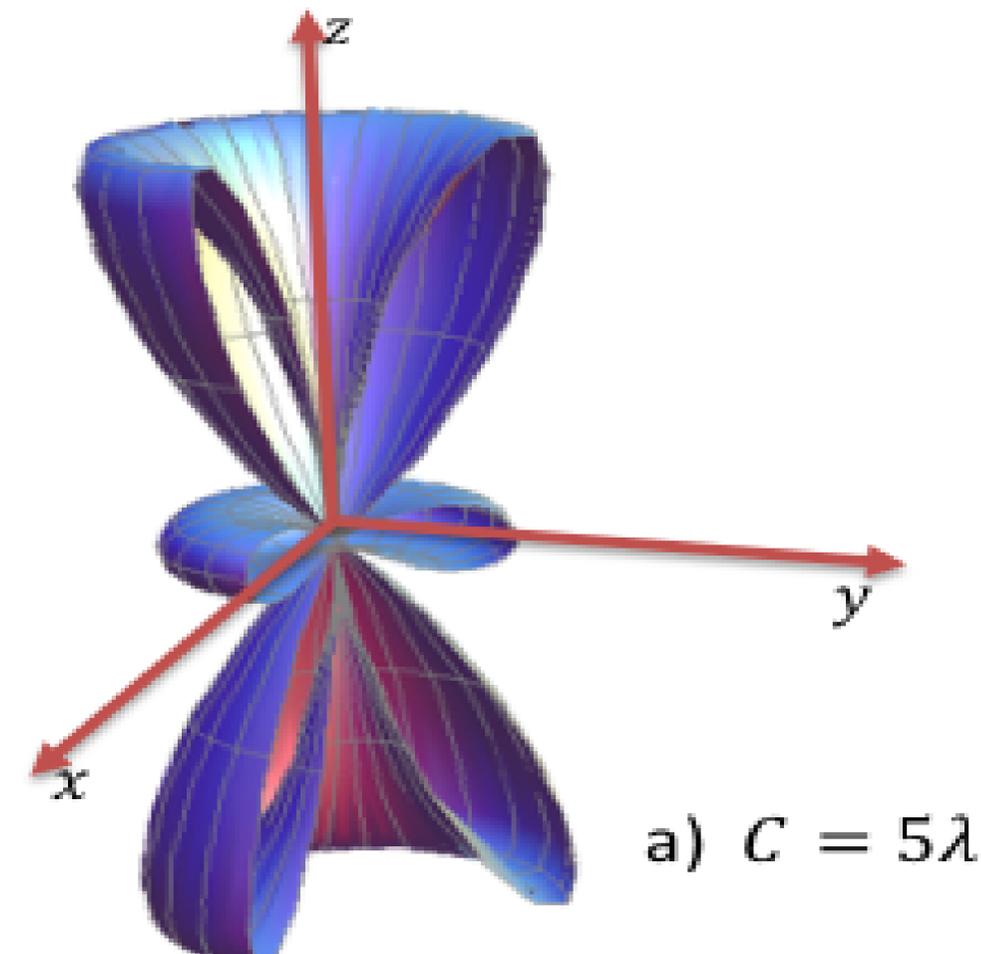
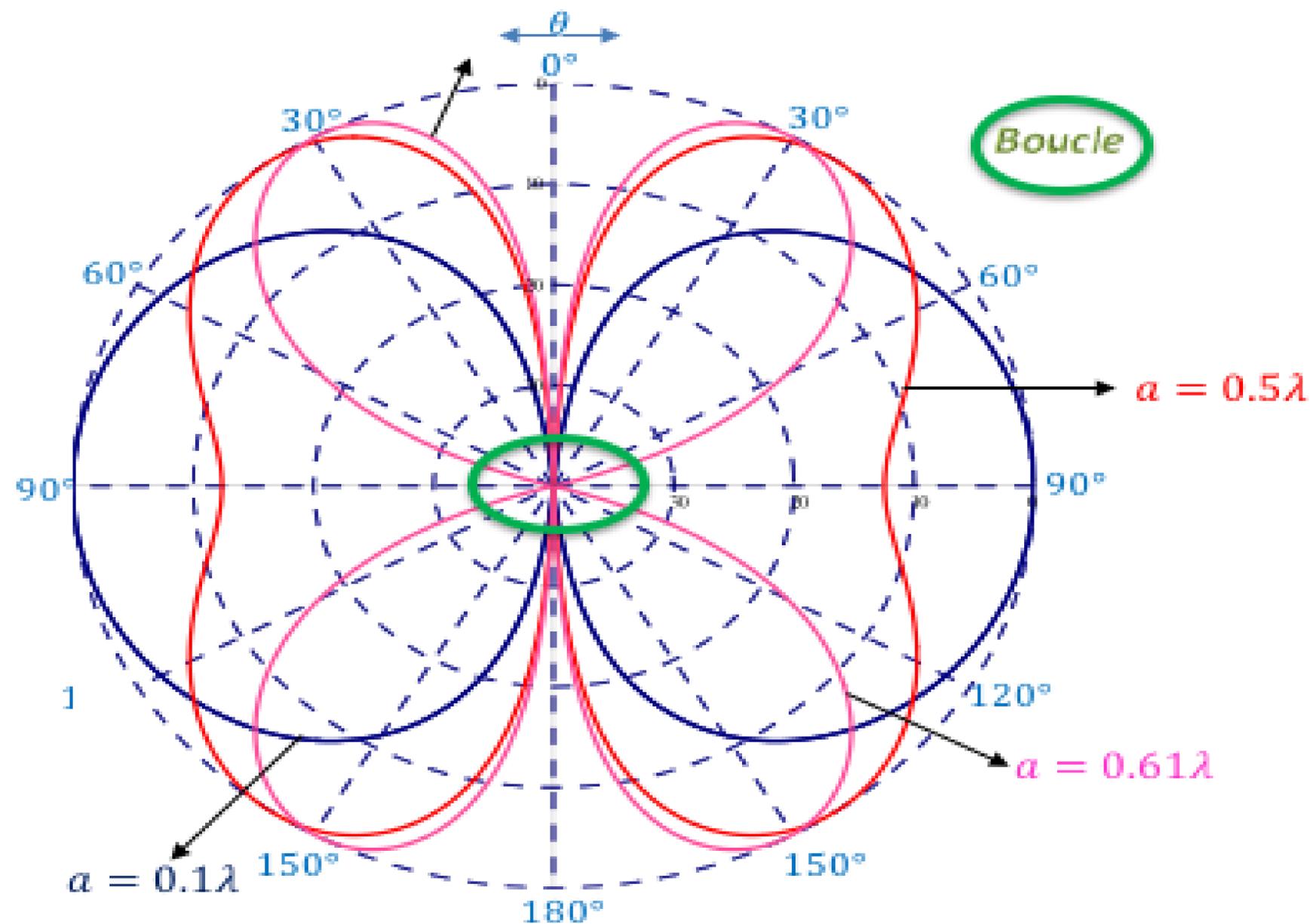
$$\bar{\mathbf{H}} = \frac{1}{\eta} \mathbf{a}_r \times \bar{\mathbf{E}} = \underbrace{-\frac{\omega \mu a I_0}{2\eta} \frac{e^{-jkr}}{r} J_1(ka \sin(\theta))}_{\bar{H}_\theta} \mathbf{a}_\theta$$

La densité de puissance moyenne est radiale et vaut :

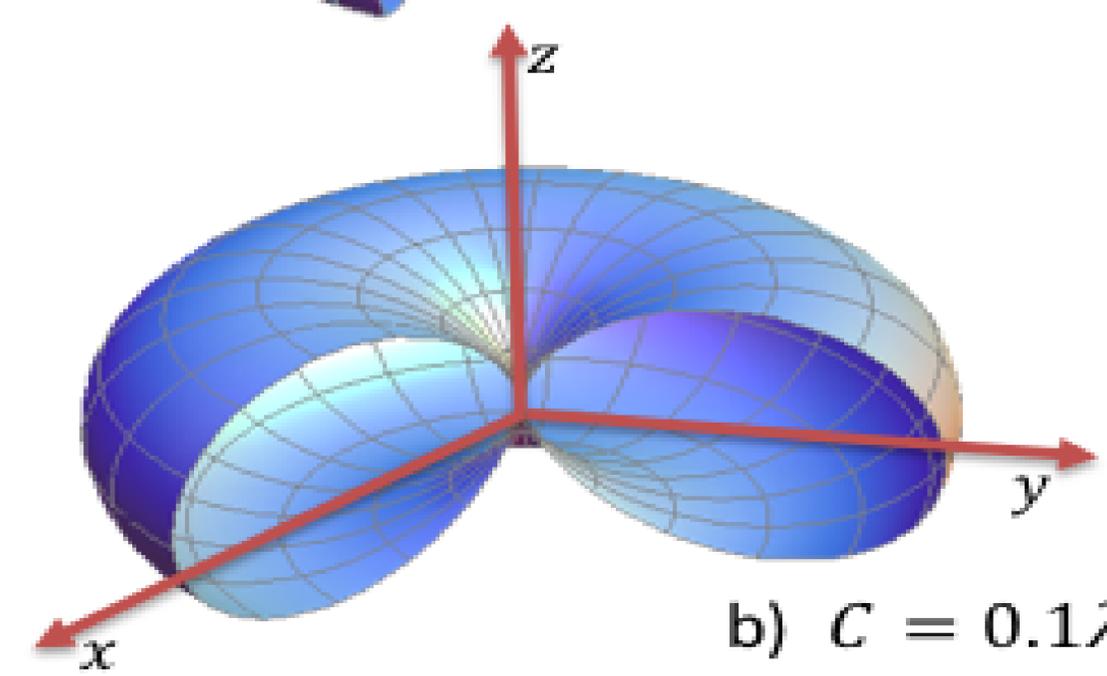
$$W = \underbrace{\frac{|\bar{E}_\phi|^2}{2\eta}}_{W_r} \mathbf{a}_r$$
$$W_r = \underbrace{\frac{|\bar{E}_\phi|^2}{2\eta}}_{W_r} = \frac{(\omega \mu a)^2 I_0^2}{8\eta r^2} J_1^2(ka \sin(\theta))$$

ce qui entraîne l'expression suivante pour la densité de rayonnement :

$$K(\theta, \phi) = r^2 W_r = \frac{(ka)^2 \eta I_0^2}{8} J_1^2(ka \sin(\theta))$$



a) $C = 5\lambda$



b) $C = 0.1\lambda$

Le diagramme de rayonnement de la boucle pour $a = 0.1\lambda, 0.5\lambda, 0.61\lambda$ est représenté ci-dessus. De l'examen de ce dernier, il ressort que :

- Pas de rayonnement le long de l'axe de la boucle ($\theta = 0^\circ$).
- Dans le plan de la boucle ($\theta = 90^\circ$), l'augmentation du rayon a s'accompagne d'une diminution de l'intensité du champ électrique qui s'annule pour $a = 0.61\lambda$
- Pour les valeurs de a faibles ($a \sim 0.1\lambda$), le diagramme de rayonnement est celui de $\sin \theta$

- Lorsque $a > 0.61\lambda$, le rayonnement dans le plan de la boucle s'intensifie et le diagramme de rayonnement exhibe une forme multi lobes.