

**Module Microondes et
antennes**

**Antennes
Chapitre 4**

**A. MAAOUNI
ESMAR
2017-2018**

Antennes réseaux

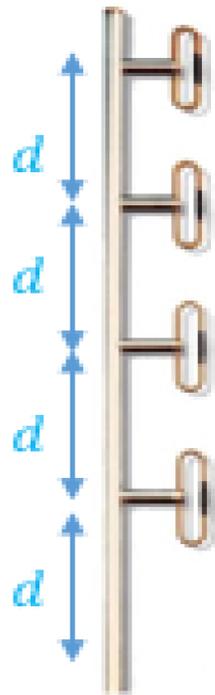
Chapitre 5

Afin de véhiculer de l'information par voies hertziennes, il est important de maîtriser la répartition spatiale de l'énergie électromagnétique rayonnée par les antennes. Cette répartition dépend de la nature de la transmission, ce qu'on peut illustrer par quelques exemples suivants :

- Pour une liaison point à point, on utilise une antenne directive car toute énergie qui s'écarte de la liaison est perdue.
- Pour des stations de bases de téléphonie mobile, on découpe parfois les 360 degrés de l'horizon en secteur de 120 degrés : le rayonnement de l'antenne devra alors être sectoriel dans le plan de l'horizon.
- Pour des applications radar, on utilisera un lobe de rayonnement cosécante permettant une illumination de l'objet détecté à puissance constante.
- Pour une émission de radio locale, on a besoin d'un rayonnement omnidirectionnel.

L'obtention du diagramme de rayonnement désiré n'est généralement pas possible à l'aide d'une seule Antenne. L'utilisation d'une association judicieuse de plusieurs antennes identiques permet d'approcher le diagramme recherché. Cet ensemble *d'antennes identiques (éléments)* porte le nom **d'antenne réseau**

L'antenne réseau s'adapte bien aux techniques de traitement de signal numérique qui la rend programmable et justifie sa popularité sans cesse grandissante

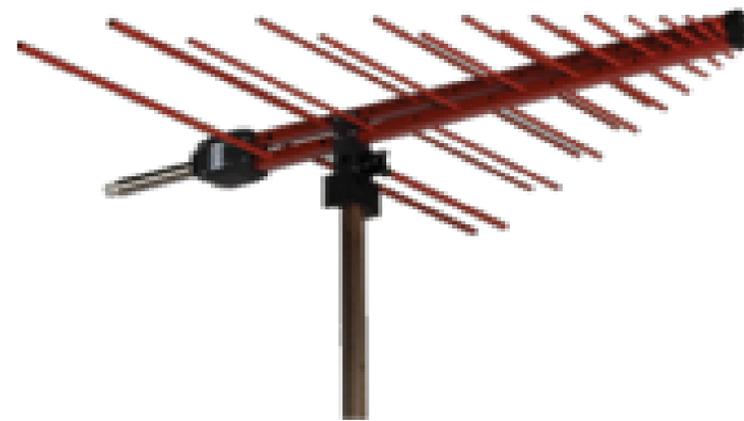


Antenne réseau à dipôles repliées

138-174 MHz, Gain 8.5 dBd, $d = \frac{\lambda}{4}$

0dB = 2.66dB

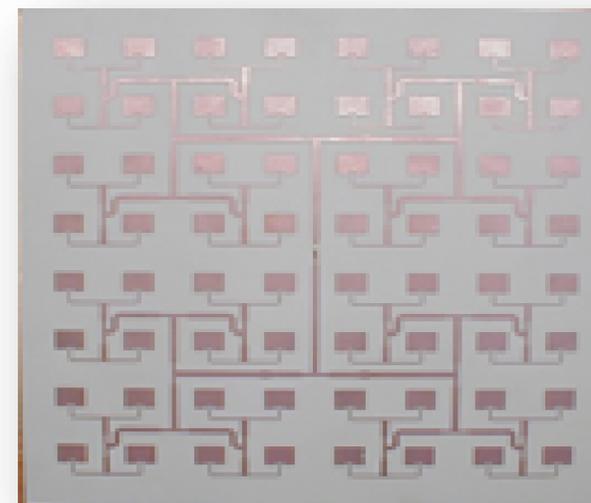
Antennex YDAF1384 Welded



Antenne réseau log périodique



Antenne réseau à fentes



Antenne type réseau plan de patch : 64 éléments, bande X Pour Radar Doppler



Le centre du 'Very Large Array Telescope' au Nouveau Mexique (radiotélescopic)

La forme du diagramme de rayonnement peut être contrôlée par :

- La configuration globale du réseau (linéaire, circulaire, rectangulaire, sphérique, etc.)
- L'espace entre éléments
- L'amplitude et la phase de l'excitation de chaque élément
- Le diagramme de rayonnement de chaque élément

Principe des antennes réseaux

Considérons N éléments identiques rayonnants dans l'espace et conservant la même orientation. Un élément typique est localisé dans l'espace libre comme indiqué à la fig. ci-dessous :

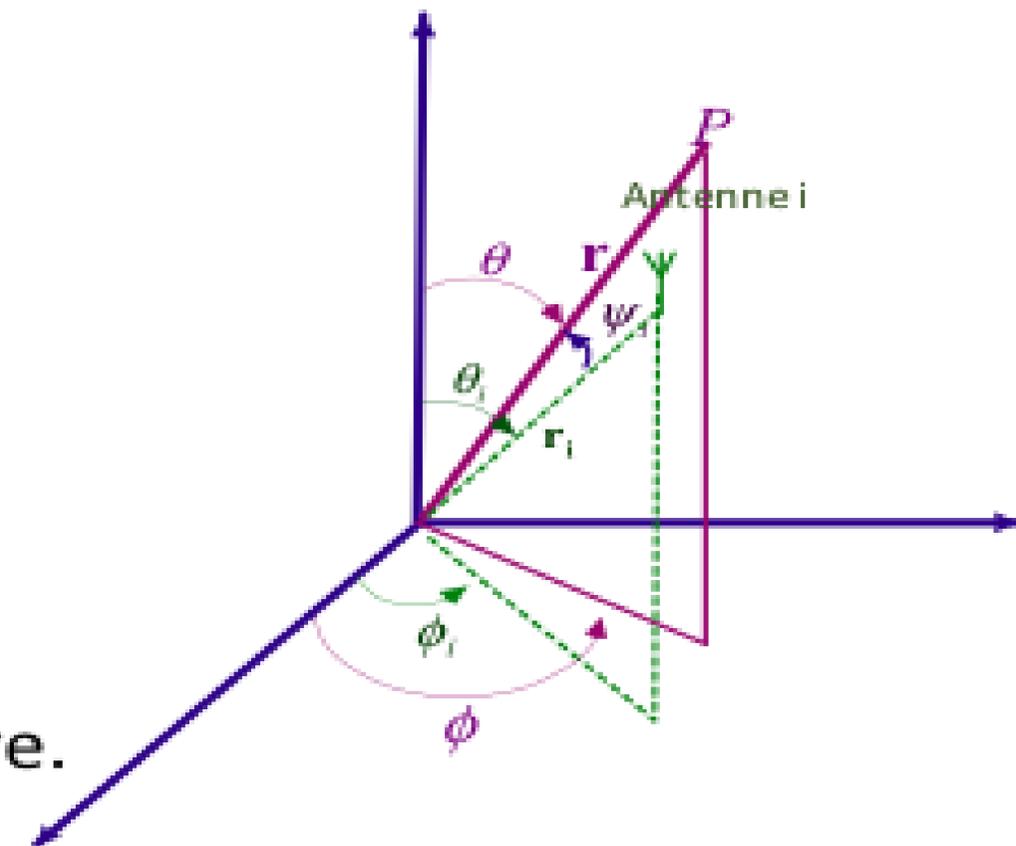
A grande distance, $R_i \sim r - \hat{r} \cdot \mathbf{r}_i = r - \cos(\psi_i) r_i$

Le champ au point P s'écrit :

$$E(\mathbf{r}) = f(\theta, \phi) \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sum_{i=1}^N \bar{I}_i e^{jk\hat{r} \cdot \mathbf{r}_i}, \bar{I}_i = I_i e^{j\alpha_i}$$

$$= f(\theta, \phi) \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sum_{i=1}^N I_i e^{j(kr_i \cos(\psi_i) + \alpha_i)}$$

$f(\theta, \phi)$ est la fonction caractéristique de rayonnement d'un élément d'antenne réseau placé au centre du repère.



Le champ résultant du groupement réseau est constitué de deux termes :

- Le champ créé par un élément.
- Le facteur du réseau $AF = \sum_{i=1}^N I_i e^{j(kr_i \cos(\psi_i) + \alpha_i)}$ qui dépend des courants des éléments et de la configuration géométrique du réseau.

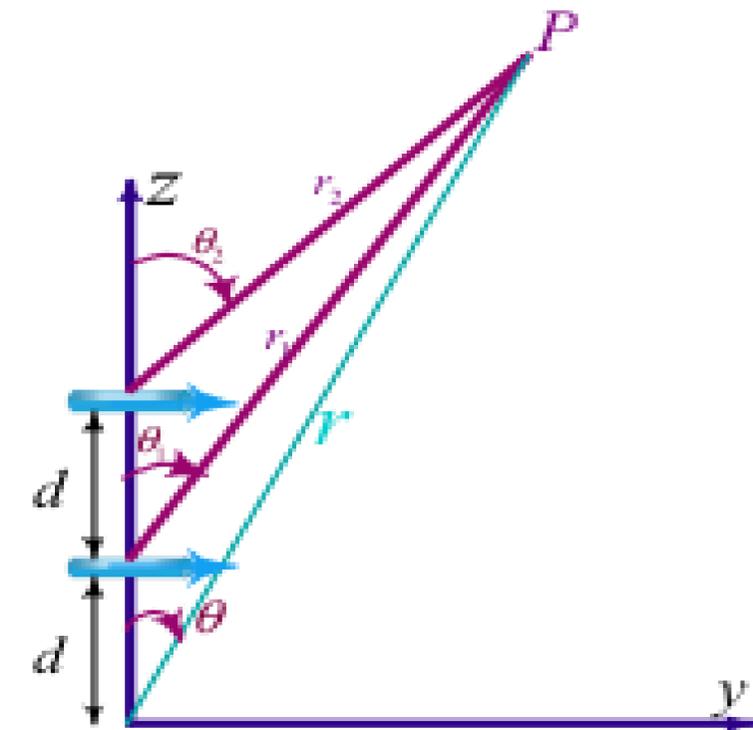
Exemple :

On suppose un réseau constitué de deux dipôles de longueur l disposés comme l'indique la figure ci-contre. Les phaseurs courants sont définis par :

$$\bar{I}_{1,2} = I_0 e^{j\alpha_{1,2}}, \quad \alpha_i = i\alpha, \quad i = 1, 2$$

En négligeant le couplage entre éléments :

- Déterminer l'expression du champ lointain résultant \bar{E}
- Etablir l'expression du facteur réseau $AF(\theta, \phi)$



Le champ total est la superposition des champs créés par les éléments :

$$\mathbf{E} = \mathbf{a}_{\theta_1} k\eta \frac{e^{-jkr_1}}{4\pi r_1} \bar{I}_1 l \cos(\theta_1) + \mathbf{a}_{\theta_2} k\eta \frac{e^{-jkr_2}}{4\pi r_2} \bar{I}_1 l \cos(\theta_2)$$

Compte tenu du fait que les champs sont lointains :

$$\theta_i = \theta, \quad r_2 \cong r_1 \cong r \text{ pour le module}$$

$$r_1 \cong r - \hat{r} \cdot d \hat{z} \text{ pour la phase}$$

$$r_2 \cong r - \hat{r} \cdot 2d \hat{z}$$

$$\mathbf{E} = \underbrace{-\mathbf{a}_\theta \frac{I_0 l e^{-jkr}}{4\pi r} \cos(\theta)}_{\text{facteur de réseau AF}} \left(e^{j(kd \cos(\theta) + \alpha)} + e^{2j(kd \cos(\theta) + \alpha)} \right)$$

Le facteur de réseau AF est donné par :

$$AF = e^{jk(d \cos(\theta) + \alpha)} + e^{2j(kd \cos(\theta) + \alpha)}$$

L'intensité de rayonnement $K(\theta, \phi)$ est proportionnelle à $16\pi^2 r^2 |E|^2$, ce qui entraîne :

$$K(\theta, \phi) \sim |f(\theta, \phi)|^2 |AF(\theta, \phi)|^2$$

Principe :

La fonction caractéristique de rayonnement de l'antenne réseau est le produit de la fonction caractéristique de rayonnement d'un élément pris individuellement et de la fonction caractéristique du facteur réseau.

Pour l'exemple précédent, prenons $\alpha = 120^\circ$ et $d = \lambda/4$. Le facteur réseau aura pour expression:

$$AF(\theta, \phi) = e^{j(kd \cos(\theta) + \alpha)} + e^{2j(kd \cos(\theta) + \alpha)}$$

Posons, $z = e^{-ju}$, $u = kd \cos(\theta) + \alpha$

$$AF = z^{-1} + z^{-2} = z^{-1}(1 + z^{-1})$$

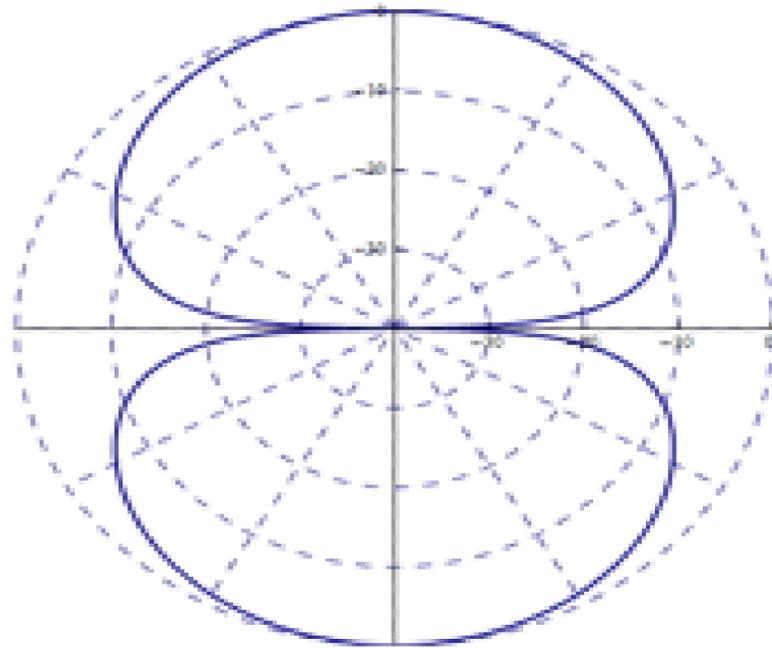
$$|AF|^2 = \frac{z^{-1}(1-z^{-2})}{1-z^{-1}} \frac{z(1-z^2)}{1-z} = \frac{(2-(z^{-2}+z^2))}{2-(z+z^{-1})} = \frac{2-2\cos(2u)}{2-2\cos(u)} = \left(\frac{\sin(u)}{\sin(u/2)}\right)^2$$

$$|AF| = \left| \frac{\sin(u)}{\sin(u/2)} \right| = \left| 2 \cos\left(\frac{1}{2}(kd \cos(\theta) + \alpha)\right) \right|$$

$$|AF_n| = |\cos(kd \cos(\theta) + \alpha)| = \left| \cos\left(\frac{\pi}{4} \cos(\theta) + \frac{\pi}{3}\right) \right|$$

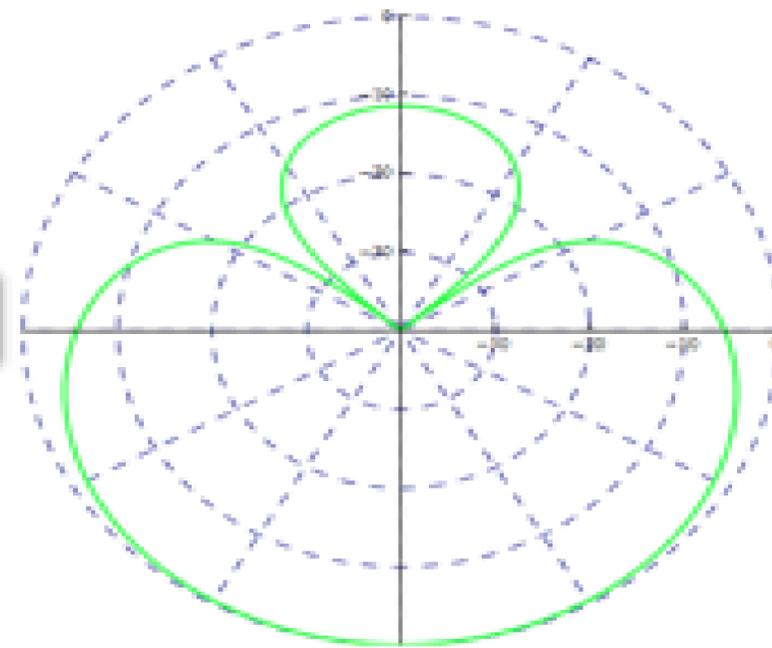
La fonction caractéristique normalisée de l'élément du réseau vaut :

$$f_n(\theta, \phi) = \cos(\theta)$$



$$f_n(\theta, \phi)$$

Diagramme de l'élément



$$AF_n(\theta, \phi) = \cos(\pi/4 \cos(\theta) + \pi/3)$$

Facteur réseau

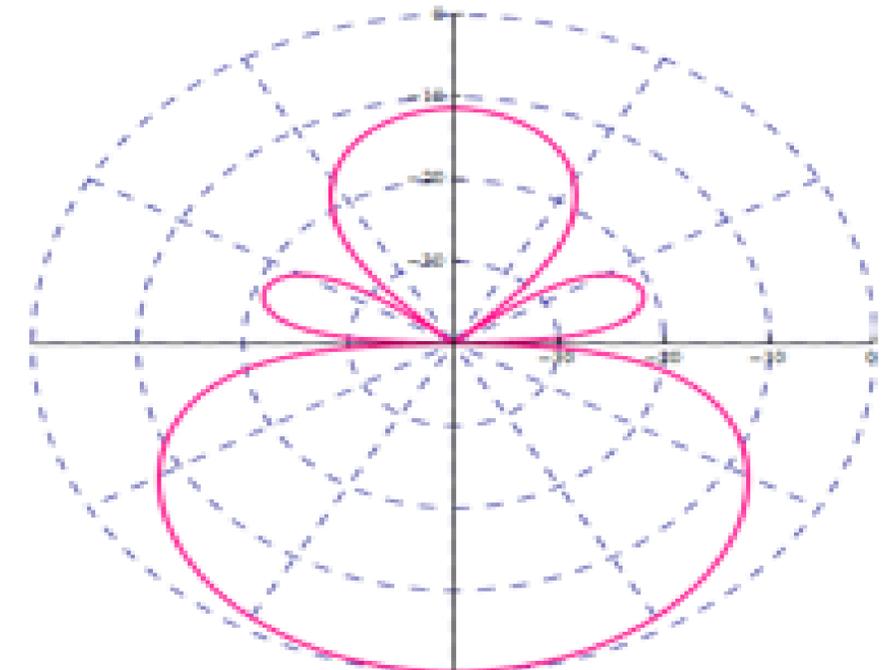


Diagramme de l'antenne réseau constituée de deux dipôles infinitésimaux et horizontaux

$$d = \frac{\lambda}{4}, \alpha = 120^\circ$$

Soit un réseau à N éléments identiques alignés et espacés par une distance uniforme. Les courants d'alimentation ont des déphasages progressifs :

$$\bar{I}_i = I_i e^{j\alpha_i}, \quad \alpha_i = i\alpha, \quad i = 0, 1, \dots, N-1$$

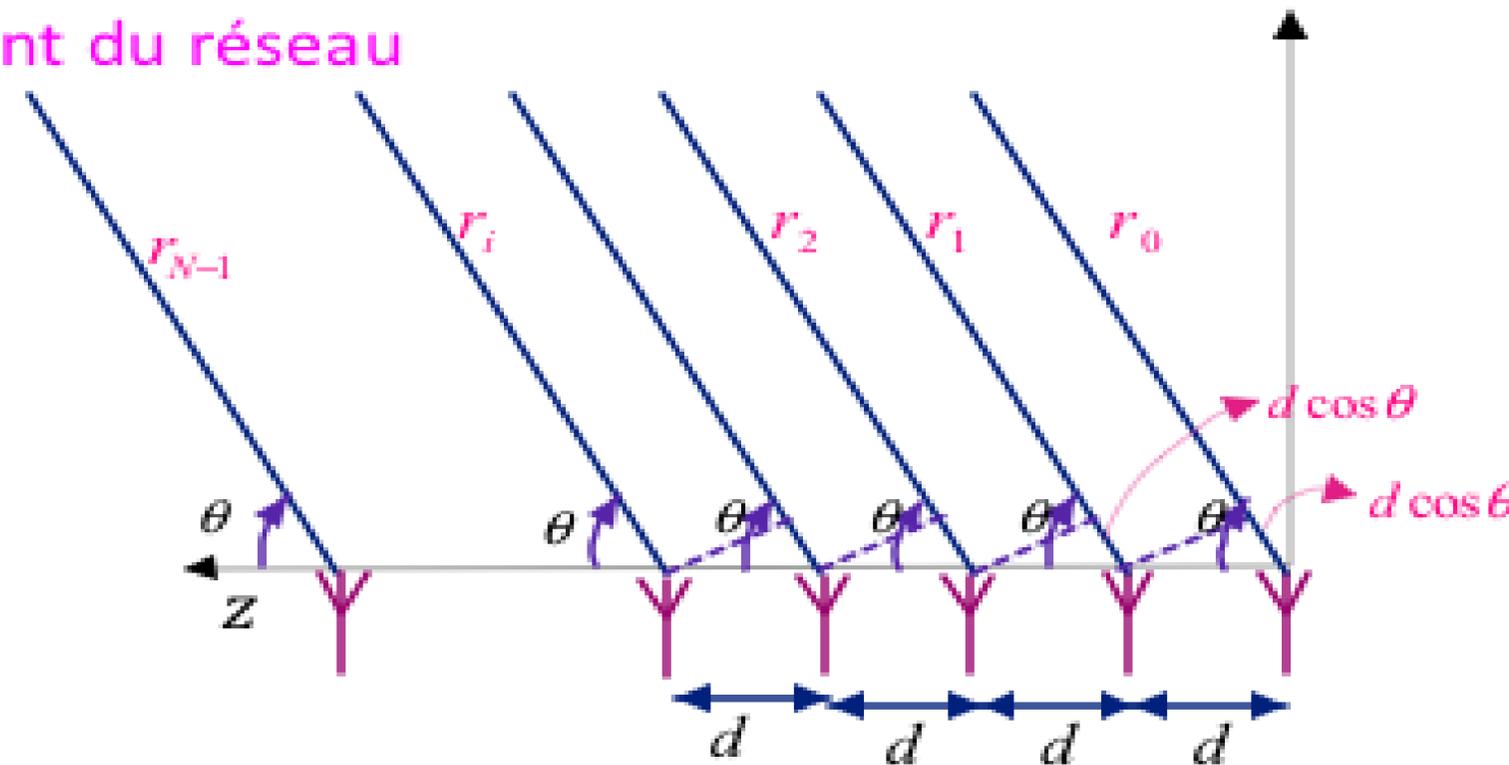
Posons : $\alpha = -kd \cos(\theta_0)$

θ_0 caractérise la direction du max de rayonnement du réseau

$$AF = (I_0 + I_1 e^{j(kd \cos(\theta) + \alpha)} + I_2 e^{j2(kd \cos(\theta) + \alpha)} + \dots + I_{N-1} e^{j(N-1)(kd \cos(\theta) + \alpha)})$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} I_i e^{ji kd(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}$$

$$= \sum_{i=0}^{N-1} I_i z^{-i} \quad \text{où : } z = e^{-ju}, \quad u = kd(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))$$



$AF = Z(I_i)$ Transformée en Z de la distribution discrète des amplitudes de courants.

Si on plus, les amplitudes des courants sont identiques, le réseau est **uniforme**.

Le réseau linéaire est très intéressant : il permet un balayage électronique de l'espace (sans rotation de l'antenne).

Rayonnement transversal (Broadside array) et longitudinal (end-fire array)

De toutes les possibilités de rayonnement d'une antenne réseau, on distingue deux cas à connaître :

- **Rayonnement transversal** : il s'agit d'un rayonnement où le lobe principal est normal à l'axe du réseau $\theta_0 = \pi/2$.
- **Rayonnement longitudinal** : Les lobes principaux sont dans l'axe du réseau $\theta_0 = 0$.
- Dans la version ordinaire, il n'y a qu'un seul Lobe principal ($d_{\max} < \lambda/2$).

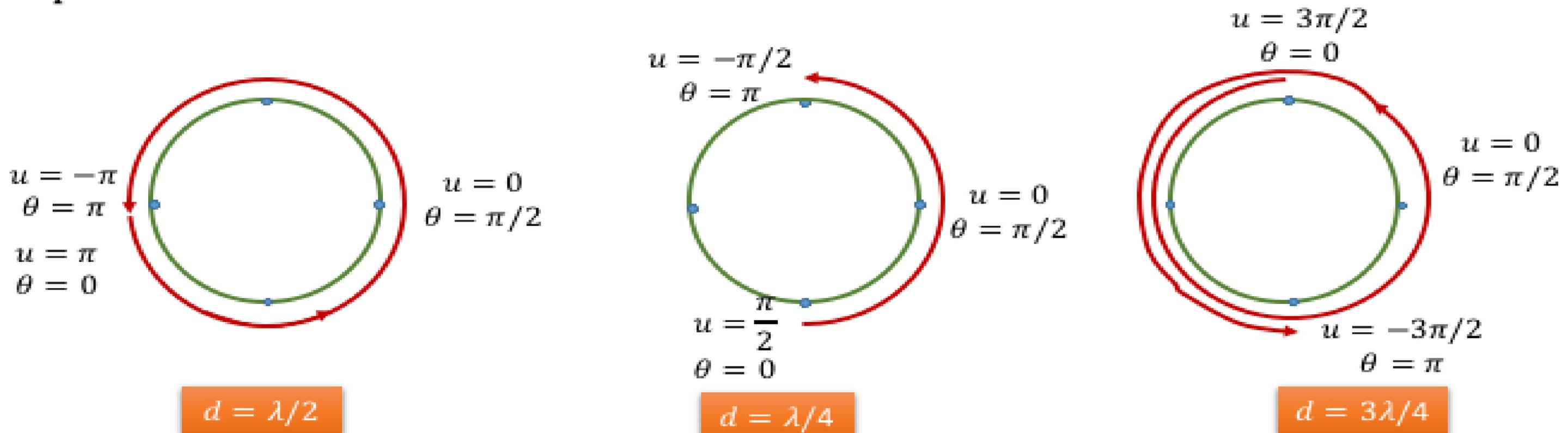
Zone de visibilité (visible region)

Compte tenu du fait que $|z| = 1$, le vecteur associé au nombre complexe z décrit le cercle unité dans le sens inverse des aiguilles d'une montre pour d, θ_0 fixés et θ variant de 0 à π .

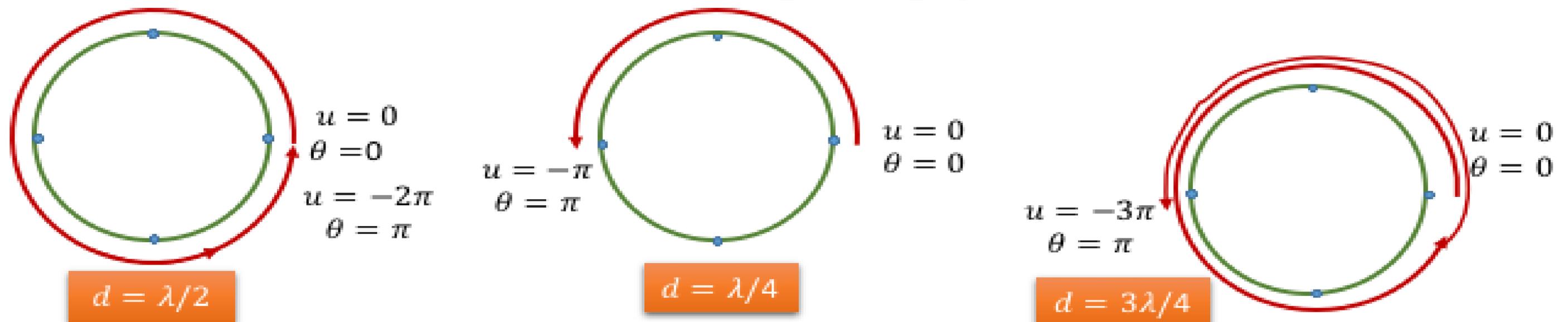
Pour :

- Le réseau à rayonnement transversal : $z = e^{jkd \cos(\theta)}$
 $-kd \leq \arg(z) \leq kd$, pour $0 \leq \theta \leq \pi$
- Le réseau à rayonnement longitudinal : $z = e^{jkd (\cos(\theta) - 1)}$
 $0 \leq \arg(z) \leq 2kd$, pour $0 \leq \theta \leq \pi$

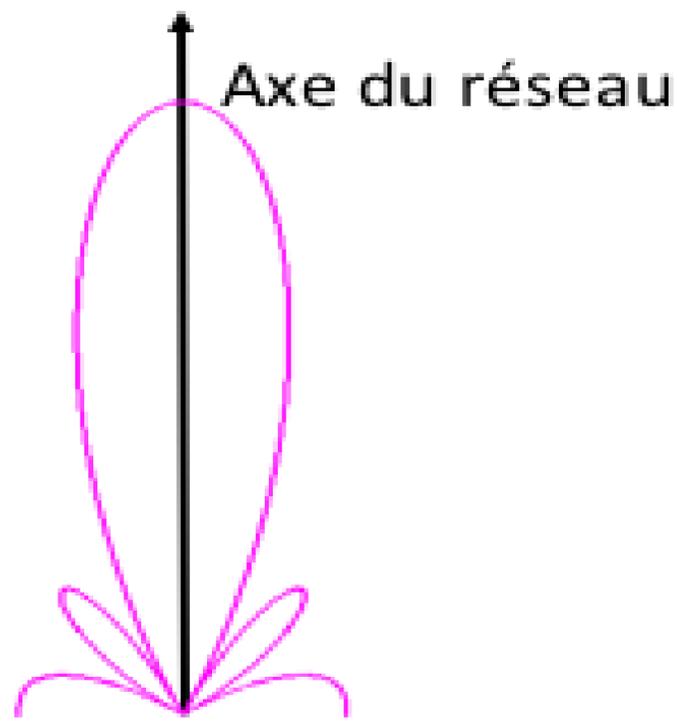
Dans les deux cas, la plage de variation de l'argument de z est $2kd$ (rad); elle porte le nom de *zone de visibilité*



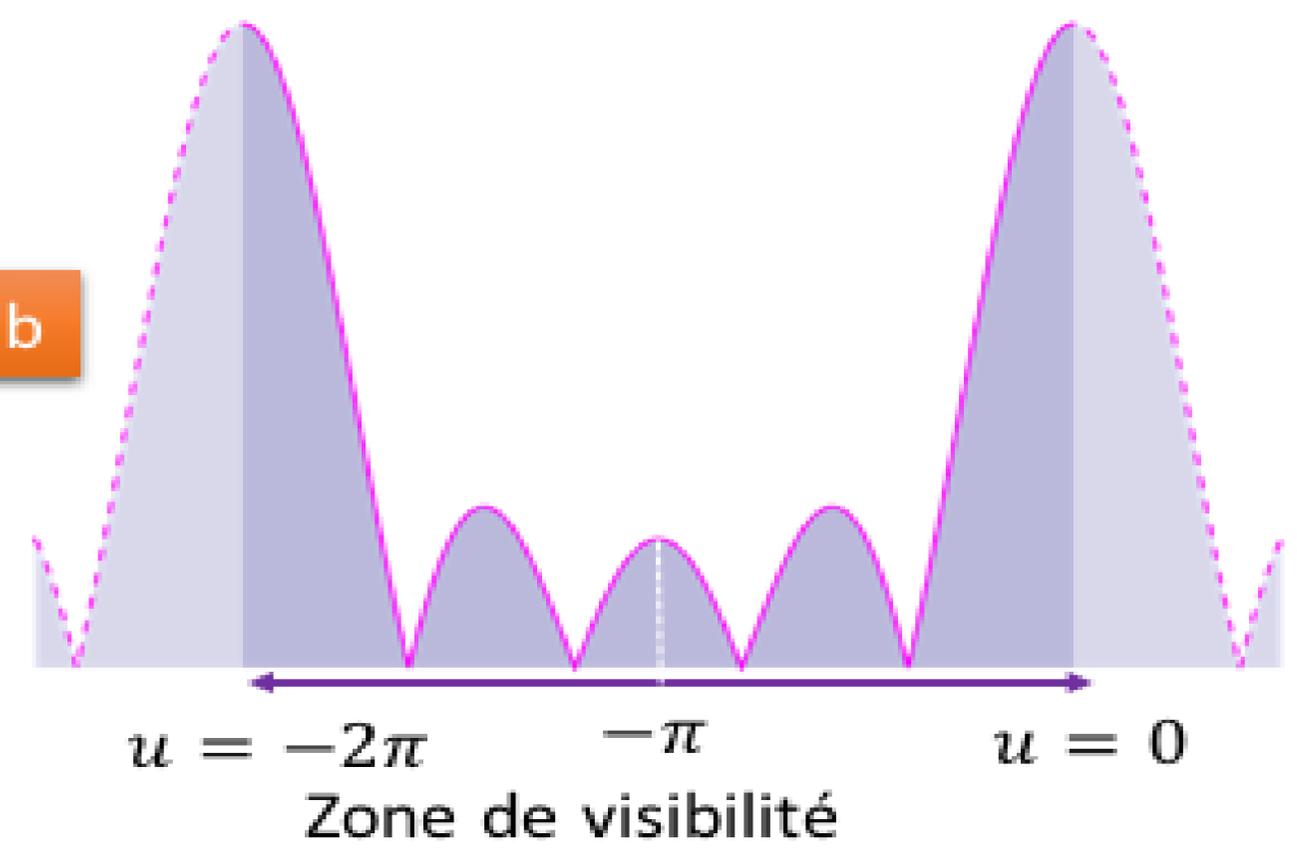
Zone de visibilité de z pour $\theta_0 = \frac{\pi}{2}, d = \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{4}, 3\lambda/4$.



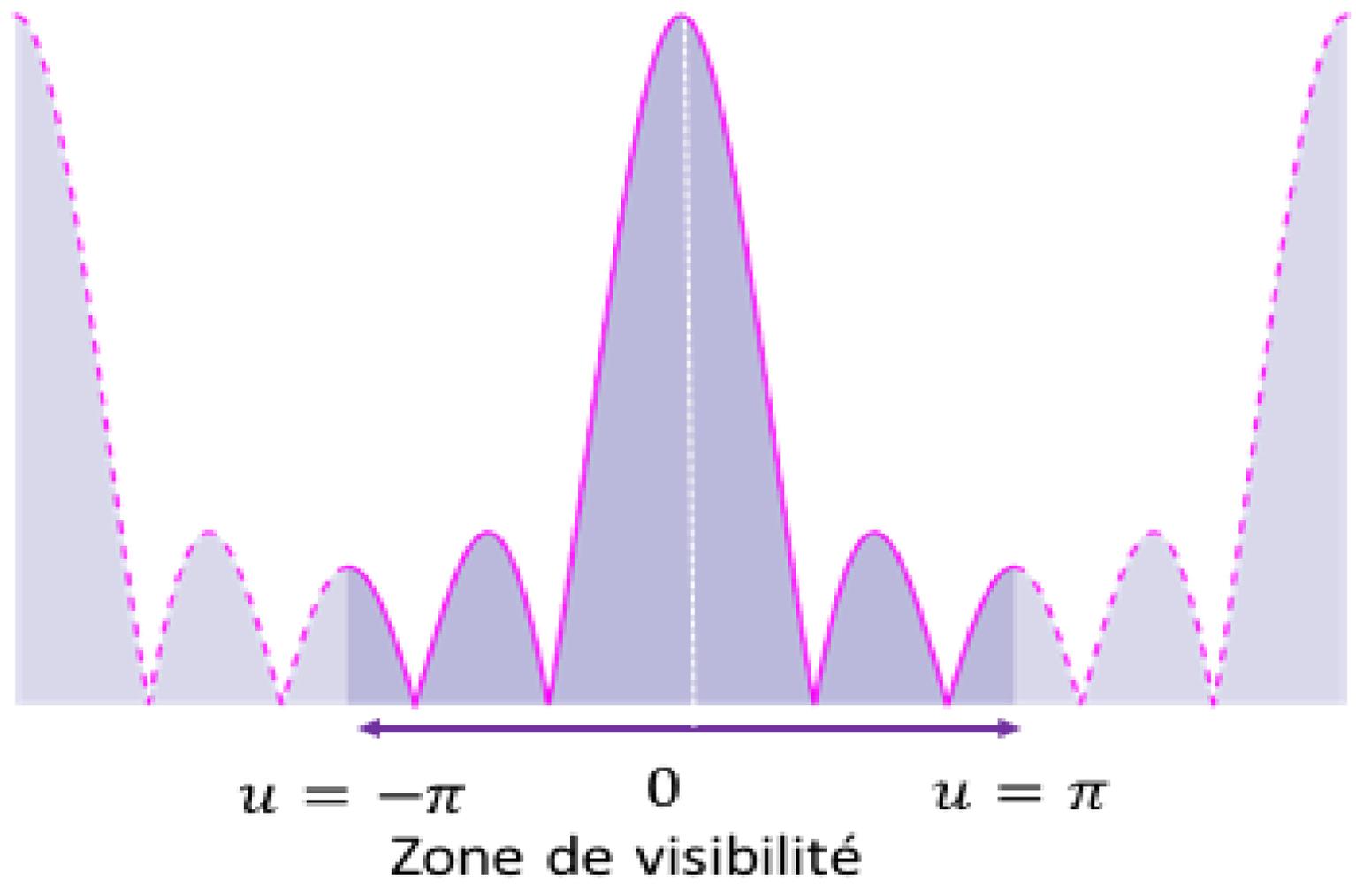
Zone de visibilité de z pour $\theta_0 = 0, d = \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{4}, 3\lambda/4$.



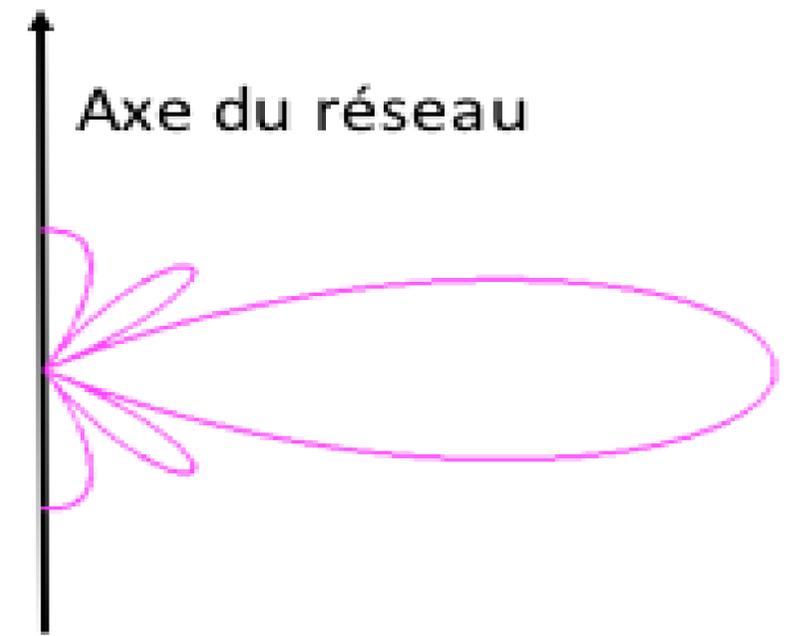
b



a



$|AF|$ pour $N = 5, d = \frac{\lambda}{2}$,
 a) $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$, b) $\theta_0 = 0$



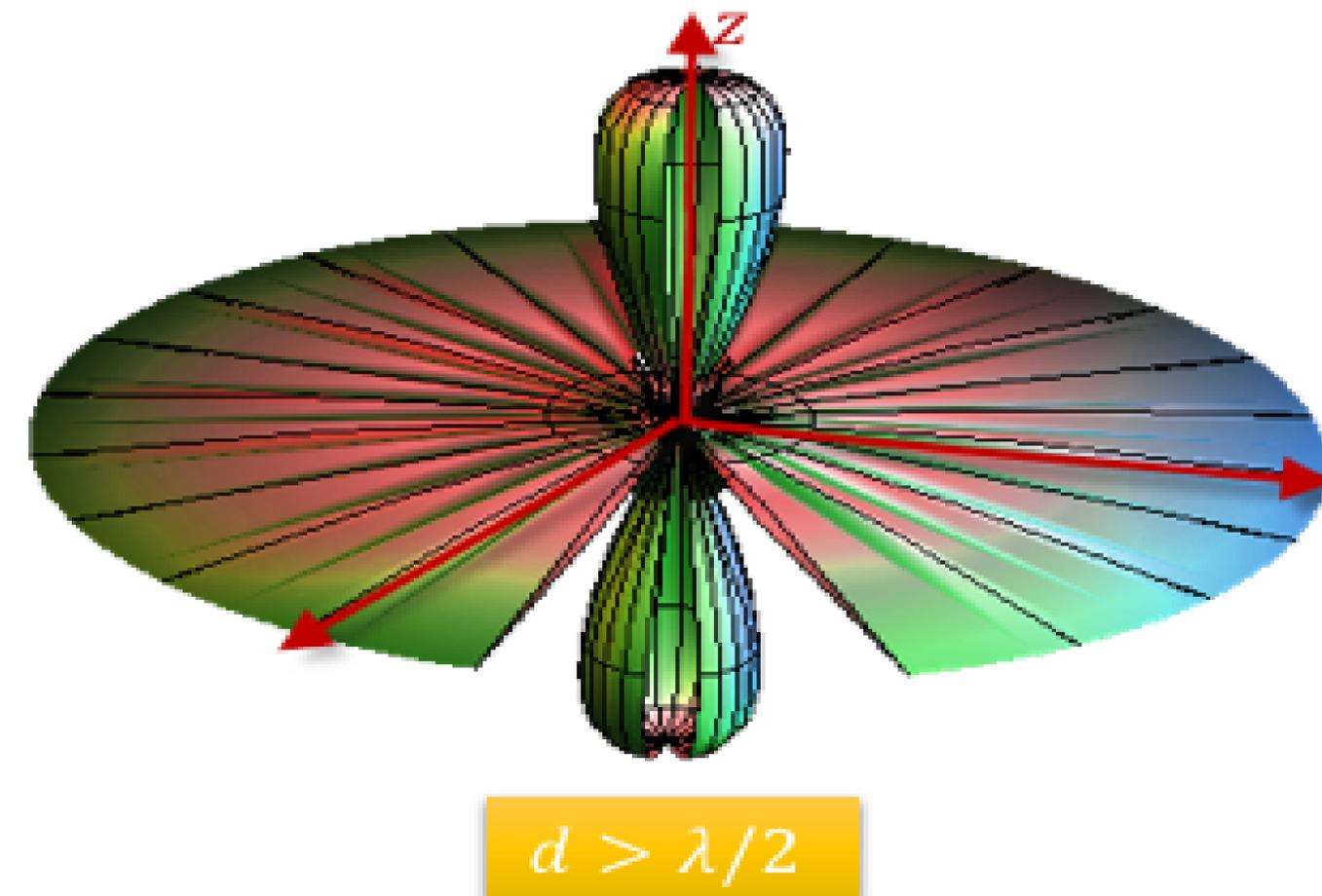
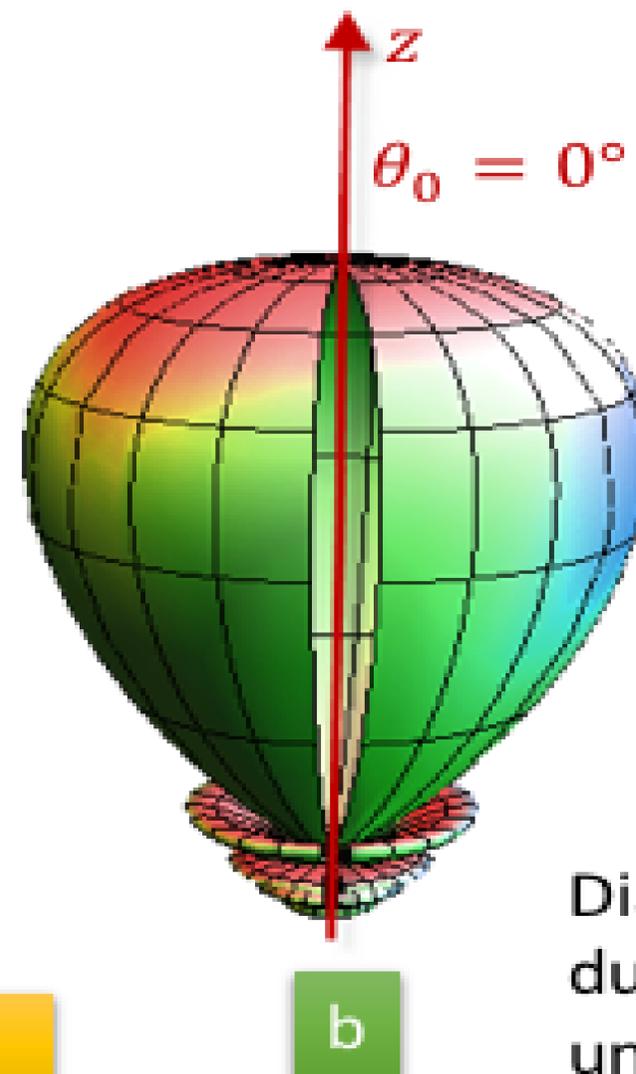
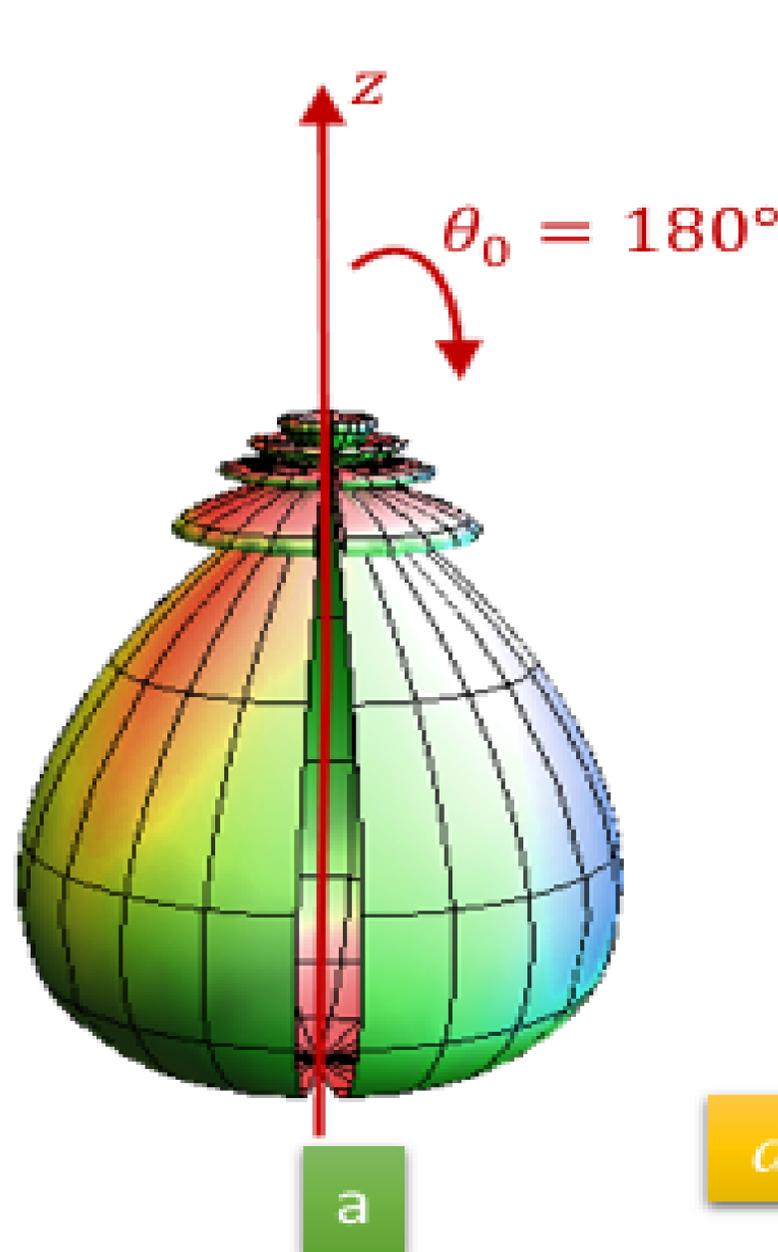


Diagramme de rayonnement du Facteur réseau d'une antenne réseau uniforme à $N = 10$, $d = \lambda$, $\theta_0 = 0^\circ$ à Rayonnement Longitudinal (**End-Fire Array**) et Transversal (**broadside array**).

Diagramme de rayonnement du Facteur réseau d'une antenne réseau uniforme à $N = 10$, $d = \frac{\lambda}{4}$ à rayonnement Longitudinal ordinaire (**Ordinary End-Fire Array**)
 a) $\theta_0 = 180^\circ$, b) $\theta_0 = 0^\circ$

Pour un réseau uniforme à N éléments, on a :

$$AF = \sum_{i=0}^{N-1} z^{-i} = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}$$

Le module de AF est définie par la relation :

$$\begin{aligned} &= \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \frac{1 - z^N}{1 - z} \\ &= \frac{2 - (z^{-N} + z^N)}{2 - (z^{-1} + z)} \\ &= \frac{1 - \cos(Nu)}{1 - \cos(u)} \\ &= \frac{\sin^2\left(\frac{Nu}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)} \end{aligned}$$

Soit :

$$|AF| = \left| \sin\left(\frac{Nu}{2}\right) / \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right|$$

Positions des maxima et des zéros de AF, Largeur du faisceau

- **Maximas**

Les max de AF correspondent à $z = 1$, soit :

$$u = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots \quad M$$

Le maximum $u = 0$ correspond au lobe principal. Les autres pour $u = \pm 2\pi, \pm 4\pi, \dots$ sont appelés lobes secondaires (*'grating lobes'*). Afin de privilégier un rayonnement à un seul lobe principal, d doit être choisie inférieure à λ .

En termes des valeurs de θ , l'équation M s'écrit :

$$kd (\cos(\theta_m) - \cos(\theta_0)) = 2m\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$kd \cos(\theta_m) + \alpha = 2m\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\theta_m = \arccos\left(\frac{\lambda}{2\pi d} (-\alpha + 2m\pi)\right), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- **Minimas**

Ils correspondent à $z^{-N} = 1$ (à l'exception de $z = 1$), Soit :

$$kd (\cos(\theta_n) - \cos(\theta_0)) = 2n\pi / N, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$
$$\theta_n = \arccos\left(\frac{\lambda}{2\pi d} \left(-\alpha + \frac{2n\pi}{N}\right)\right) \quad n \neq N, 2N, 3N, \dots$$

- **Largeur du faisceau**

Comme nous l'avons introduit précédemment, la largeur du lobe principal peut être définie soit entre les premiers nuls de chaque côté (Θ_{FNBW}) ou, ce qui est fréquent à 3dB (Θ_{HPBW}).

Θ_{HPBW} peut donc être calculé en prenant $AF = \frac{AF_{max}}{\sqrt{2}}$. En considérant le facteur de réseau normalisé, AF_n , nous obtenons :

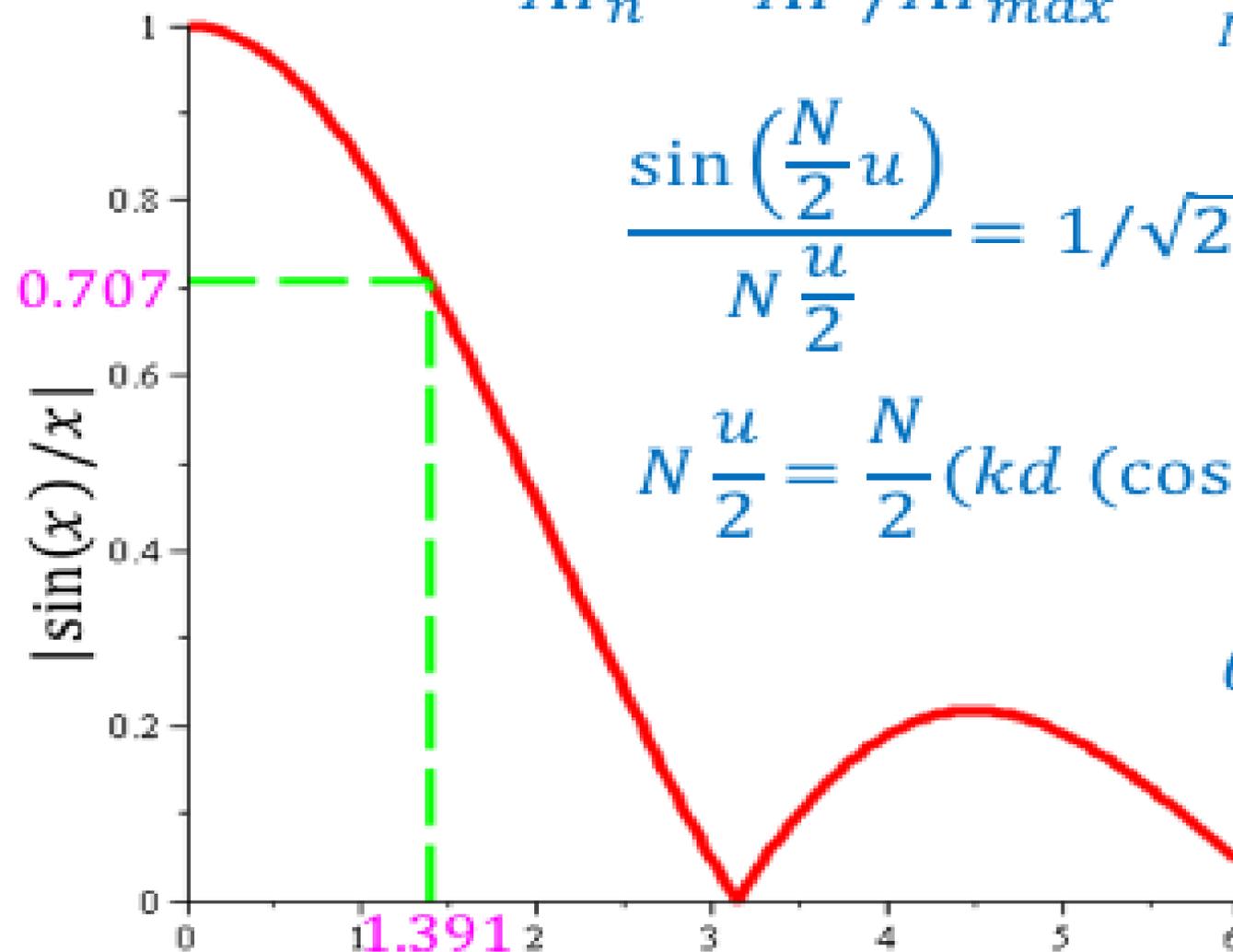
$$AF_n = AF / AF_{max} = \frac{\sin\left(\frac{N}{2}u\right)}{N \sin\left(\frac{u}{2}\right)} = 1/\sqrt{2}$$

$$\frac{\sin\left(\frac{N}{2}u\right)}{N \frac{u}{2}} = 1/\sqrt{2}$$

$$N \frac{u}{2} = \frac{N}{2} (kd (\cos(\theta_n) - \cos(\theta_0))) \cong \pm 1.391$$

$$\theta_n = \arccos\left(\frac{\lambda}{2\pi d} (-\alpha \pm 2.782/N)\right)$$

Soit :

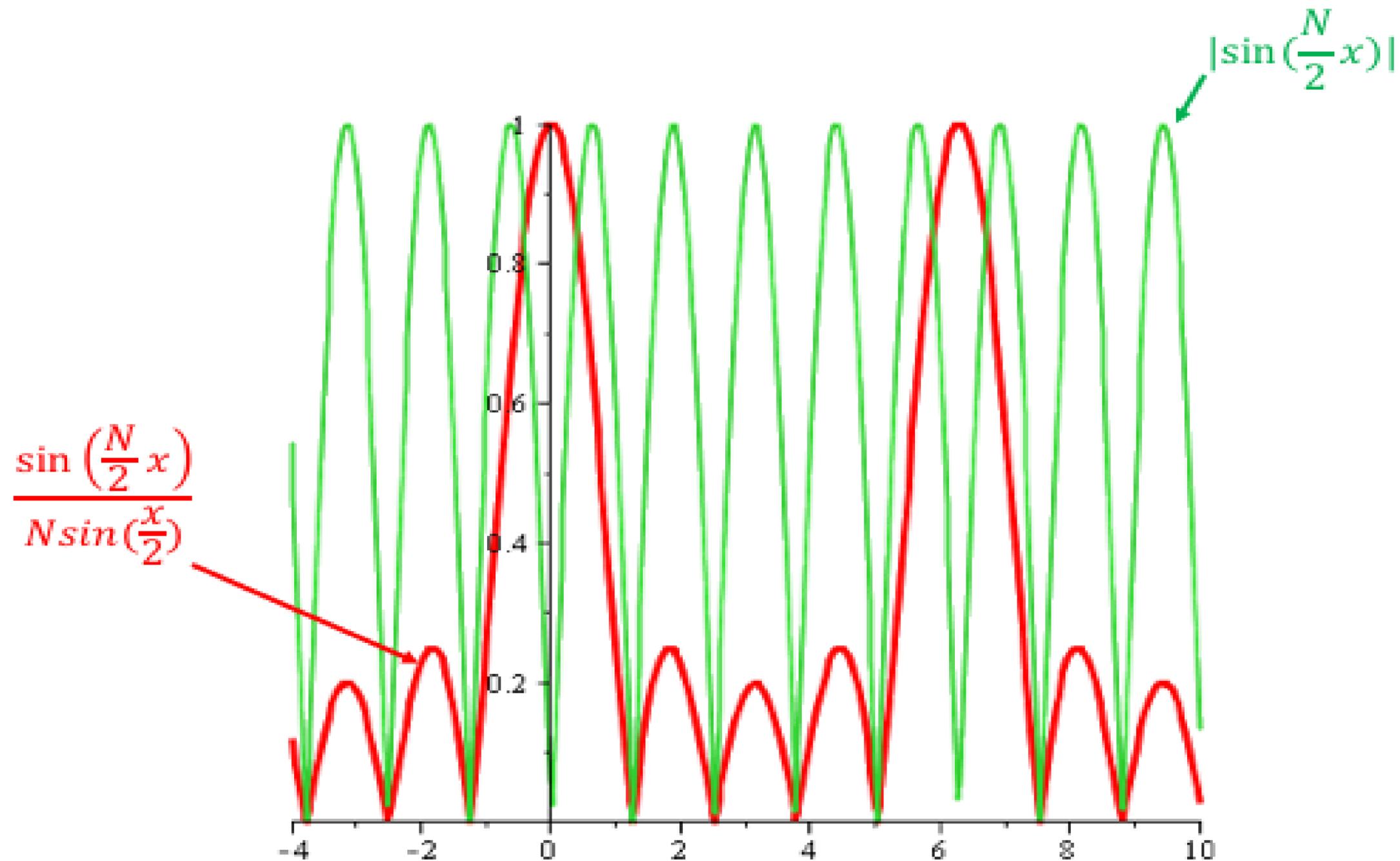


Pour des valeurs de u faibles

L'angle du faisceau à 3dB est donc pour un diagramme de rayonnement symétrique :

$$\Theta_{HPBW} = 2|\theta_n - \theta_0|$$

De l'examen de la figure ci-dessous, il ressort que les maxima secondaires correspondent, à peu près, aux valeurs de θ maximisant le numérateur de $|AF_n|$:



Soit :

$$\sin\left(\frac{N}{2}u\right) = \pm 1 \rightarrow \theta_s = \arccos\left(\frac{\lambda}{2\pi d}\left(-\alpha \pm \frac{2s+1}{N}\pi\right)\right)$$

ou

$$\theta_s = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{\lambda}{2\pi d}\left(-\alpha \pm \frac{2s+1}{N}\pi\right)\right)$$

Les maxima des deux premiers lobes secondaires (les plus proches du lobe principal) sont obtenus à partir des relations :

$$\frac{N}{2}u_{1,s} = \pm \frac{3\pi}{2}, \quad \frac{N}{2}u_{2,s} = \pm 5\pi/2$$

$$\theta_{1,s} = \arccos\left(\frac{\lambda}{2\pi d}\left(-\alpha \pm \frac{3}{N}\pi\right)\right)$$

$$\theta_{2,s} = \arccos\left(\frac{\lambda}{2\pi d}\left(-\alpha \pm \frac{5}{N}\pi\right)\right)$$

Le facteur de réseau normalisé pour $\theta_{i,s}$ ($i = 1,2$) est :

$$|AF_n(\theta_{1,s})| = \frac{2}{3\pi} \text{ ou } -13.5dB$$

$$|AF_n(\theta_{2,s})| = \frac{2}{5\pi} \text{ ou } -17.9dB$$

Effet de l'élément

Les performances de l'antenne réseau sont influencées non seulement par le comportement de son facteur réseau, mais aussi par le diagramme de rayonnement des éléments $f(\theta, \phi)$.

Nous allons considérer les réseaux linéaires uniformes à phases progressives constitués des éléments suivants :

- Éléments isotropes
 - Dipôles parallèles courts
 - Dipôles colinéaires courts
- **Antenne réseau linéaire uniforme à Éléments isotropes**

Pour ce réseau, on a : $I_i = 1, f(\theta, \phi) = 1$:

$$K_n(\theta, \phi) = |AF_n|^2 = \left(\frac{\sin\left(\frac{N}{2}u\right)}{N \sin\left(\frac{u}{2}\right)} \right)^2$$

La directivité du réseau est donnée par :

$$D = \frac{4\pi}{\int_{\Omega=4\pi} K_n(\theta, \phi) d\Omega} = \frac{2}{\int_0^\pi K_n(\theta, \phi) \sin(\theta) d\theta} \quad , \text{directivité Max}$$

Compte tenu de la relation :

$$\begin{aligned}
 K_n^2(\theta, \phi) &= \frac{1}{N^2} \left(\sum_{i=0}^{N-1} z^{-i} \right) \left(\sum_{i=0}^{N-1} z^i \right) \\
 &= \frac{1}{N^2} \left(N + \sum_{m=1}^{N-1} (N-m)(z^m + z^{-m}) \right) \\
 &= \frac{1}{N^2} \left(N + 2 \sum_{m=1}^{N-1} (N-m) \cos(mu) \right), \quad u = kd(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))
 \end{aligned}$$

On déduit l'expression de la directivité (max) :

$$\begin{aligned}
 D^{-1} &= \frac{1}{2N^2} \int_0^\pi \left(N + 2 \sum_{m=1}^{N-1} (N-m) \cos(mkd(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))) \right) \sin(\theta) d\theta \\
 &= \frac{1}{2N^2 kd} \int_a^b \left(N + 2 \sum_{m=1}^{N-1} (N-m) \cos(mu) \right) du \quad \begin{aligned} a &= -kd(1 + \cos(\theta_0)) \\ b &= kd(1 - \cos(\theta_0)) \end{aligned} \\
 &= \frac{1}{2N^2 kd} \left(N(b-a) + 2 \sum_{m=1}^{N-1} \frac{(N-m)}{m} (\sin(mb) - \sin(ma)) \right) \\
 &= \frac{1}{2N^2 kd} \left(2kd N + 4 \sum_{m=1}^{N-1} \frac{(N-m)}{m} \sin(mkd) \cos(mkdcos(\theta_0)) \right)
 \end{aligned}$$

$$D = \frac{kd N^2}{kd N + 2 \sum_{m=1}^{N-1} \frac{(N-m)}{m} \sin(mkd) \cos(mkd \cos(\theta_0))}$$

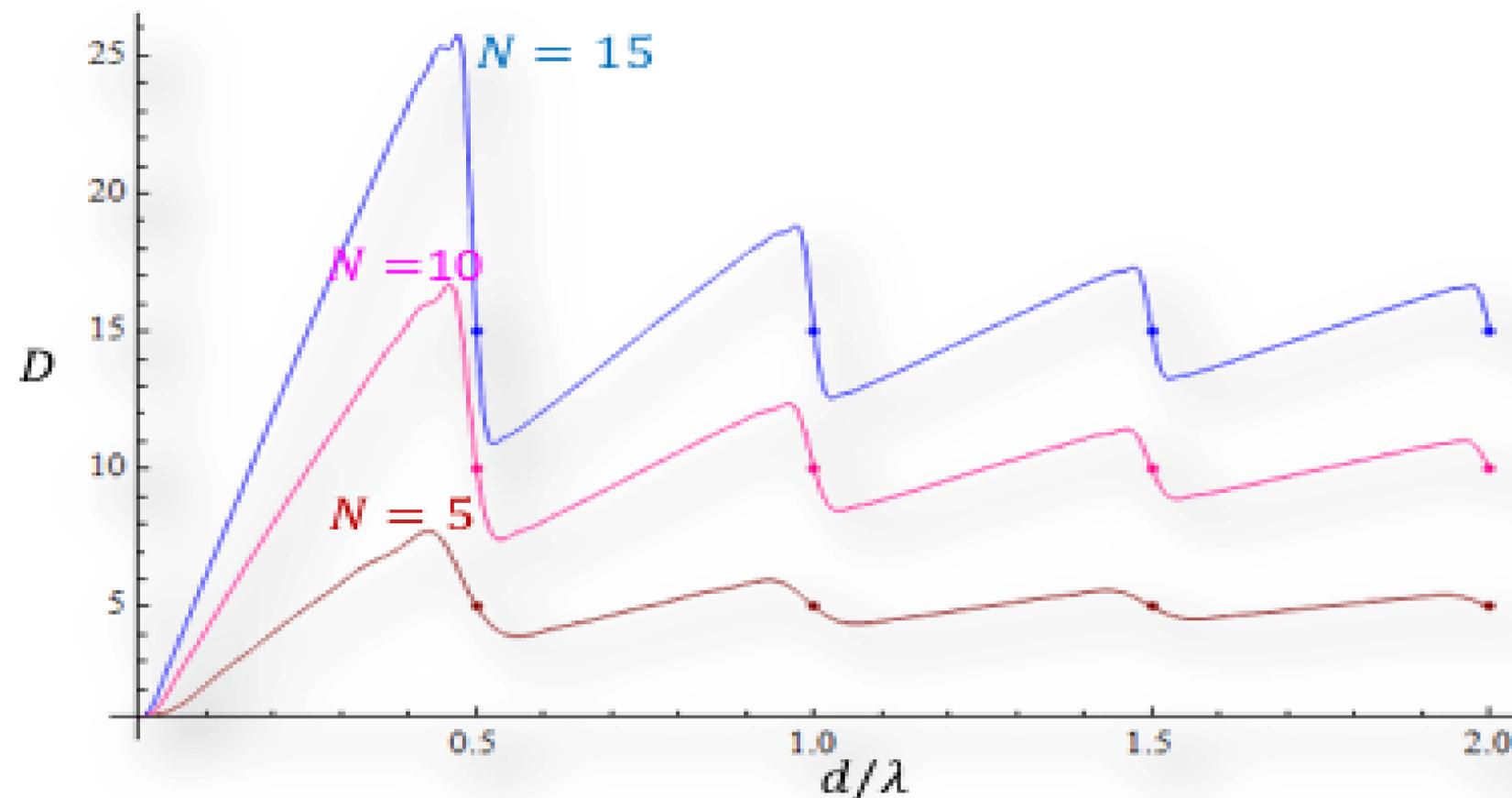
Le terme en Sin cos de la sommation s'annule pour :

- $\sin(mkd) = 0 \rightarrow d = p\lambda/2, p = 1, 2, 3 \dots$
- $\cos(mkd \cos(\theta_0)) = 0$

La directivité est indépendante de θ_0

La directivité dépend de θ_0

Dans les deux cas , la directivité vaut N (*nombre d'éléments*)



Directivité d'une antenne réseau linéaire et uniforme 'end-fire' à N éléments

- Antenne réseau linéaire uniforme à dipôles parallèles courts**

Le champ est la résultante des champs créés par les dipôles :

$$E(\theta, \phi) = \frac{-j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} (\bar{I}_0 l + \bar{I}_1 l e^{jk\hat{r} \cdot d \hat{z}} + \dots + \bar{I}_i e^{jk\hat{r} \cdot id \hat{z}} \dots) \hat{a}_{x,\perp}$$

$\hat{a}_{x,\perp}$ vecteur normal) \hat{r} :

$$\hat{a}_{x,\perp} = \hat{x} \cdot \hat{\theta} \hat{\theta} + \hat{x} \cdot \hat{\phi} \hat{\phi}$$

$$\hat{x} \cdot \hat{\theta} = \cos(\theta) \cos(\phi)$$

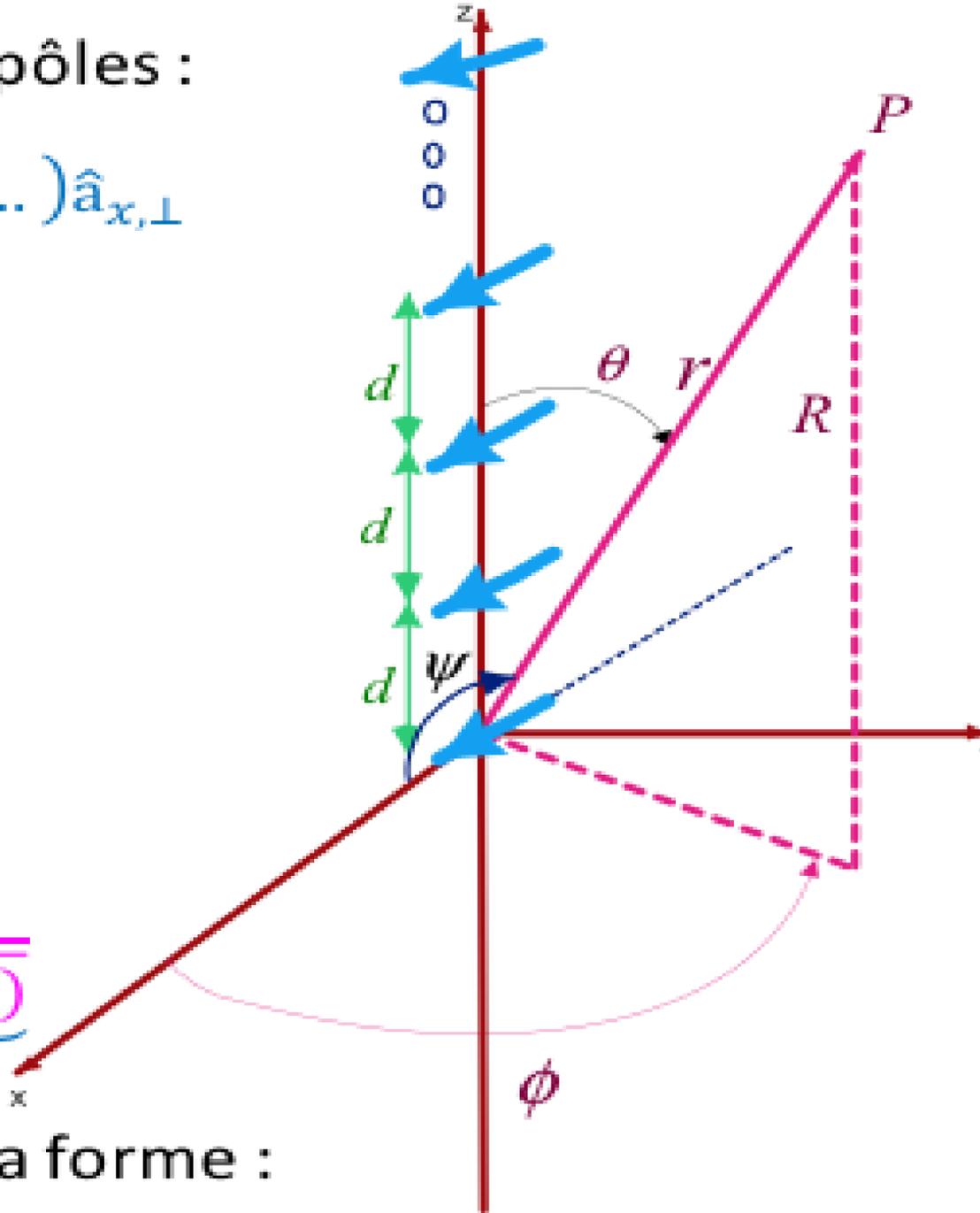
$$\hat{x} \cdot \hat{\phi} = -\sin(\phi)$$

$$\hat{a}_{x,\perp} = -\frac{\sqrt{1 - \sin^2(\theta) \cos^2(\phi)}}{\sin(\Psi)} \underbrace{\frac{-(\hat{x} \cdot \hat{\theta} \hat{\theta} + \hat{x} \cdot \hat{\phi} \hat{\phi})}{\sqrt{1 - \sin^2(\theta) \cos^2(\phi)}}}_{\hat{a}_\Psi}$$

Le champ total au point P en Z. L. peut être mis sous la forme :

$$E(\theta, \phi) = \frac{-j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} (\bar{I}_0 l + \bar{I}_1 l e^{jkd \cos(\theta)} + \dots + \bar{I}_i e^{jkid \cos(\theta)} \dots) \sin(\Psi) \hat{a}_\Psi$$

$$E(\theta, \phi) = \frac{jk\eta}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \sin(\Psi) \sum_{i=0}^{N-1} I_i e^{jkdi} (\cos(\theta) - \cos(\theta_0)) \hat{a}_\Psi$$



La fonction caractéristique de l'antenne réseau à dipôles parallèles courts s'écrit donc :

$$f_a(\theta, \phi) = f(\theta, \phi) AF(\theta, \phi)$$

$$AF = \sum_{i=0}^{N-1} e^{jkdi} (\cos(\theta) - \cos(\theta_0))$$

$$I_i = 1$$

$$f(\theta, \phi) = \sin(\Psi) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta) \cos^2(\phi)}$$

• **Antenne réseau linéaire uniforme à dipôles colinéaires courts**

Le même procédé de l'exemple ci-dessus nous permet d'écrire :

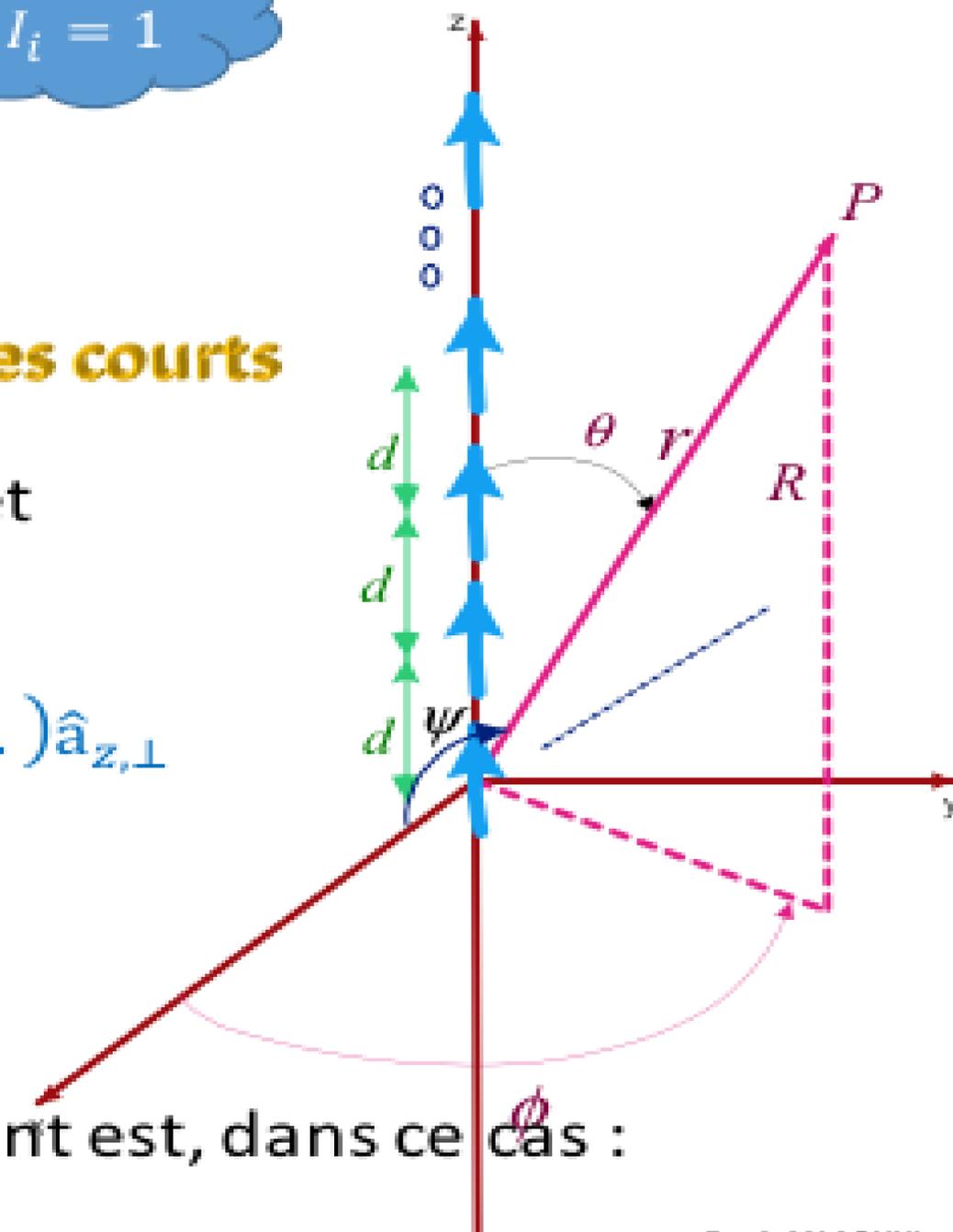
$$E(\theta, \phi) = \frac{-j\omega\mu}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} (\bar{I}_0 l + \bar{I}_1 l e^{jk\hat{r} \cdot d \hat{z}} + \dots + \bar{I}_i e^{jk\hat{r} \cdot id \hat{z}} \dots) \hat{a}_{z,\perp}$$

$$\hat{a}_{z,\perp} = \hat{z} \cdot \hat{\theta} \hat{\theta} = -\sin(\theta) \hat{\theta}$$

$$E(\theta, \phi) = \frac{jk\eta}{4\pi} \frac{e^{-jkr}}{r} \sin(\theta) \sum_{i=0}^{N-1} I_i e^{jkdi} (\cos(\theta) - \cos(\theta_0)) \hat{\theta}$$

La fonction caractéristique de rayonnement de l'élément est, dans ce cas :

$$f(\theta, \phi) = \sin(\theta)$$



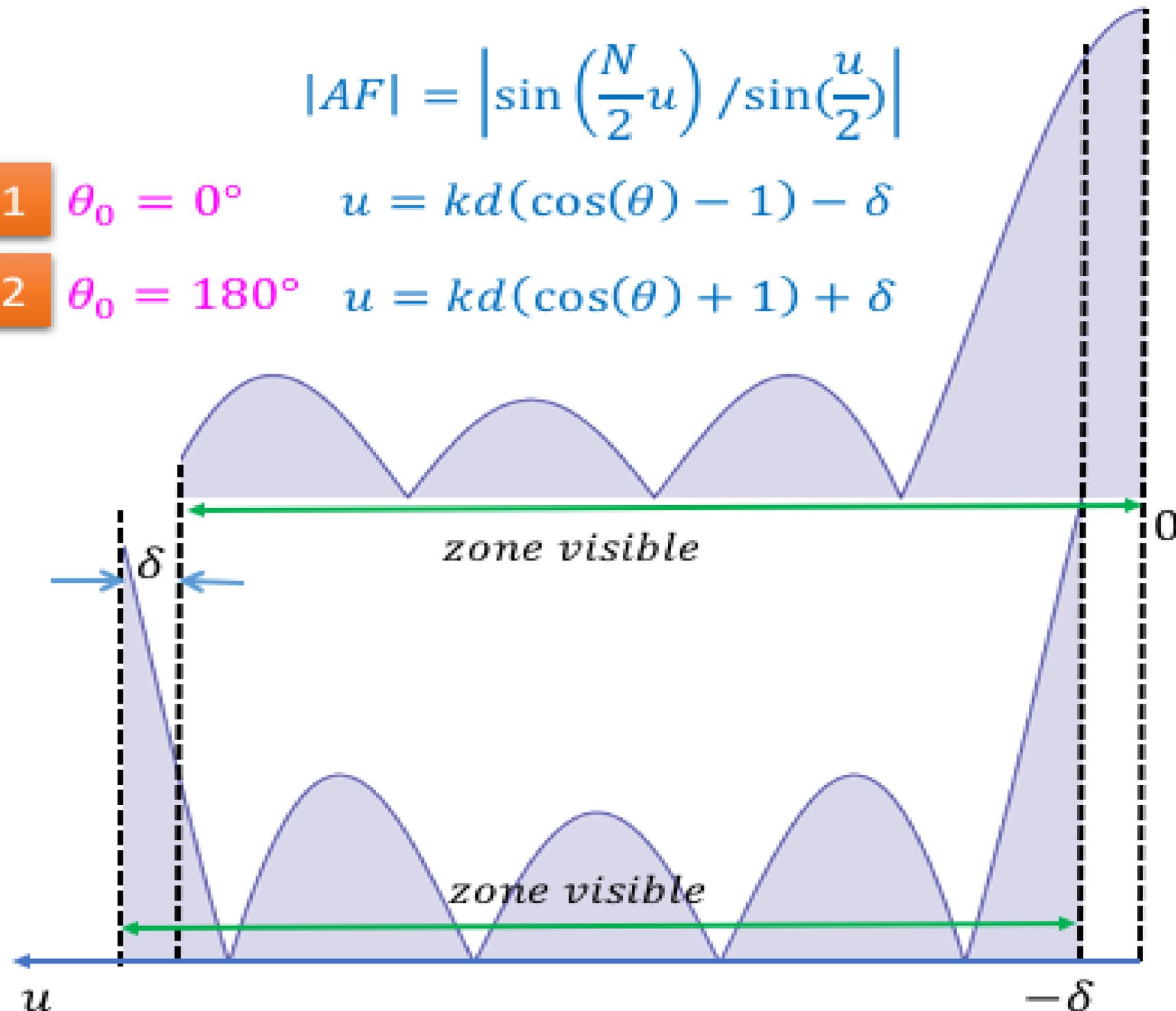
Rayonnement longitudinal Hansen-Woodyard

Pour augmenter la directivité au maximum, Hanssen et Woodyard (1938) ont proposés d'augmenter le déphasage inter-éléments de sorte à déplacer le

$$|AF| = \left| \sin\left(\frac{N}{2}u\right) / \sin\left(\frac{u}{2}\right) \right|$$

1 $\theta_0 = 0^\circ$ $u = kd(\cos(\theta) - 1) - \delta$

2 $\theta_0 = 180^\circ$ $u = kd(\cos(\theta) + 1) + \delta$



$|AF|^2$

$|AF|^2$

faisceau légèrement hors de la zone de visibilité en respectant la distance maximale inter-élément pour un rayonnement longitudinal ordinaire.

3 $\delta = \frac{\pi}{N}$

Les conditions 1, 2 et 3 sont Appelées conditions de Hanssen-Woodyard pour un rayonnement Longitudinal.

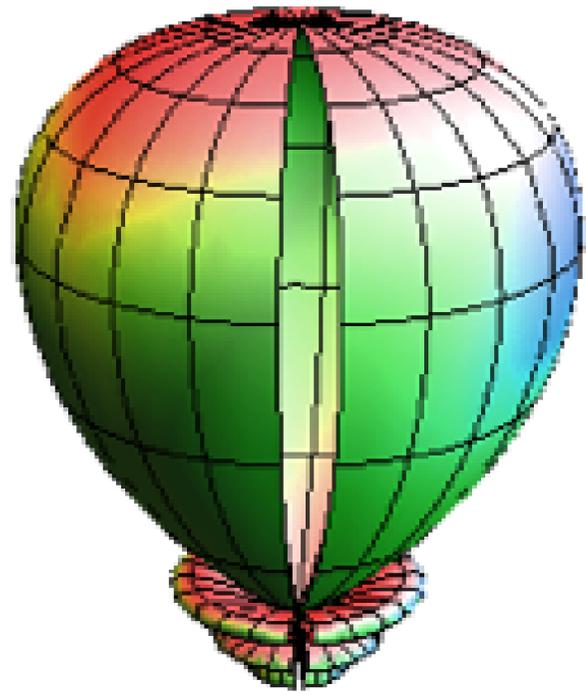


Diagramme de rayonnement longitudinal ordinaire

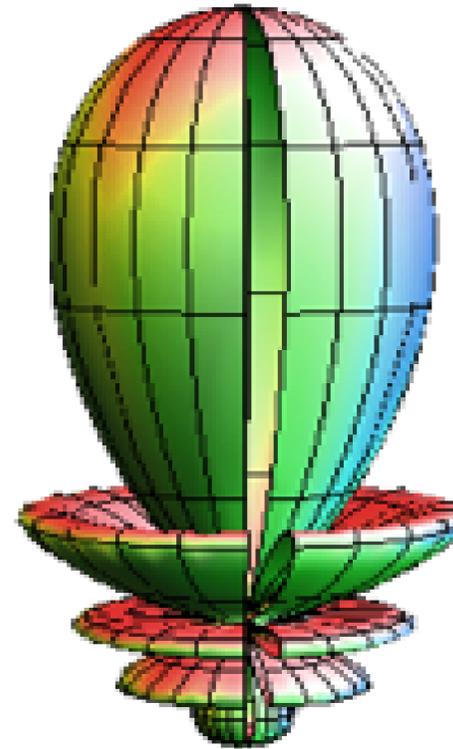


Diagramme de rayonnement Hansen-Woodyard

L'angle solide du faisceau pour le rayonnement Hansen- Woodyard devient plus étroit, d'où une plus grande directivité, au détriment cependant de l'importance accrue des lobes secondaires.

Réseau planaire uniforme

Considérons un réseau planaire constitué de $N_x \times N_y$ éléments placés dans le plan xy comme l'indique la figure ci-contre.

Le facteur réseau de l'antenne réseau planaire peut être mis sous la forme :

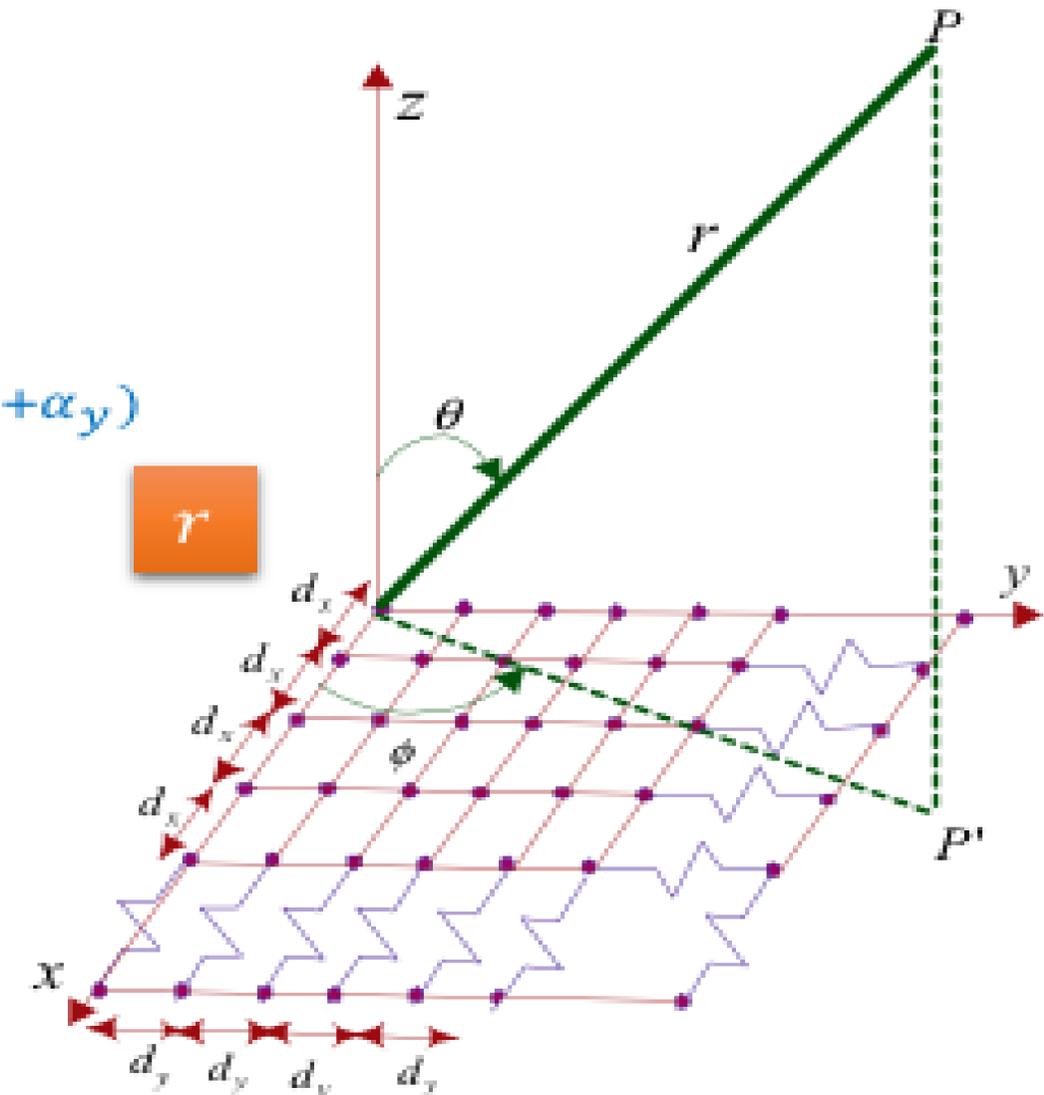
$$AF = \sum_{n=0}^{N_y-1} I_{1n} \left[\sum_{m=0}^{N_x-1} I_{m1} e^{jm(kd_x \cos(\psi_x) + \alpha_x)} \right] e^{jn(kd_y \cos(\psi_y) + \alpha_y)}$$

$$\cos(\psi_x) = \hat{x} \cdot \hat{r} = \sin(\theta) \cos(\phi)$$

$$\cos(\psi_y) = \hat{y} \cdot \hat{r} = \sin(\theta) \sin(\phi)$$

La relation r peut être réécrite ainsi:

$$AF = \sum_{m=0}^{N_x-1} I_{m1} e^{jm(kd_x \cos(\psi_x) + \alpha_x)} \sum_{n=0}^{N_y-1} I_{1n} e^{jn(kd_y \cos(\psi_y) + \alpha_y)}$$



Géométrie d'un réseau planaire uniforme

Dans le cas où le réseau est uniforme ($I_{1n} = I_{m1} = I_0$), le facteur réseau normalisé s'écrit :

$$AF_n(\theta, \phi) = \frac{\sin\left(\frac{N_x}{2}u_x\right) \sin\left(\frac{N_y}{2}u_y\right)}{N_x \sin\left(\frac{u_x}{2}\right) N_y \sin\left(\frac{u_y}{2}\right)}$$

$$u_x = kd_x \cos(\psi_x) + \alpha_x$$

$$u_y = kd_y \cos(\psi_y) + \alpha_y$$

- **Lobe Principal et lobes secondaires**

Les lobes secondaires et le lobe principal sont définis par θ et ϕ tels que :

$$u_x = kd_x \cos(\phi) \sin(\theta) + \alpha_x = \pm 2m\pi, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

$$u_y = kd_y \sin(\phi) \sin(\theta) + \alpha_y = \pm 2n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Pour avoir un lobe principal pointant dans la direction (θ_0, ϕ_0) , le déphasage progressif entre éléments doit satisfaire :

$$\alpha_x = -kd_x \cos(\phi_0) \sin(\theta_0)$$

$$\alpha_y = -kd_y \sin(\phi_0) \sin(\theta_0)$$

Les deux équations précédentes peuvent être réarrangées sous la forme :

$$\tan(\phi_0) = \frac{\alpha_y d_x}{\alpha_x d_y}$$

$$\sin(\theta_0) = \left(\frac{\alpha_x}{k d_x} \right)^2 + \left(\frac{\alpha_y}{k d_y} \right)^2$$

Alignement non uniforme d'antennes

Dans le cas d'une antenne réseau uniforme (équiamplitude), l'apparition des lobes secondaires est inévitable quand le nombre N d'éléments augmente. De plus le niveau de ces lobes ne descend jamais en dessous de $-13.3dB$.

Maximiser le gain (directivité) de l'antenne en augmentant le nombre des sources est limité par l'augmentation des niveaux des lobes secondaires. Afin de remédier à ce défaut, on utilise une loi différente pour les amplitudes des courants d'excitation.

Le réseau binomial

Considérons un réseau uniforme linéaire constitué de 2 éléments. Le facteur réseau s'écrit :

$$AF(\theta) = 1 + z^{-1}, \quad z = e^{-ju}, \quad u = kd(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

Dans le cas d'un rayonnement longitudinal (*endfire*), ($\theta_0 = 0$), il n'y aura pas de directions à champ nul si $kd < \pi$.

Compte tenu du fait que la puissance d'une fonction non nulle pour certaines valeurs de la variable est aussi non nulle, on peut donc synthétiser un réseau à :

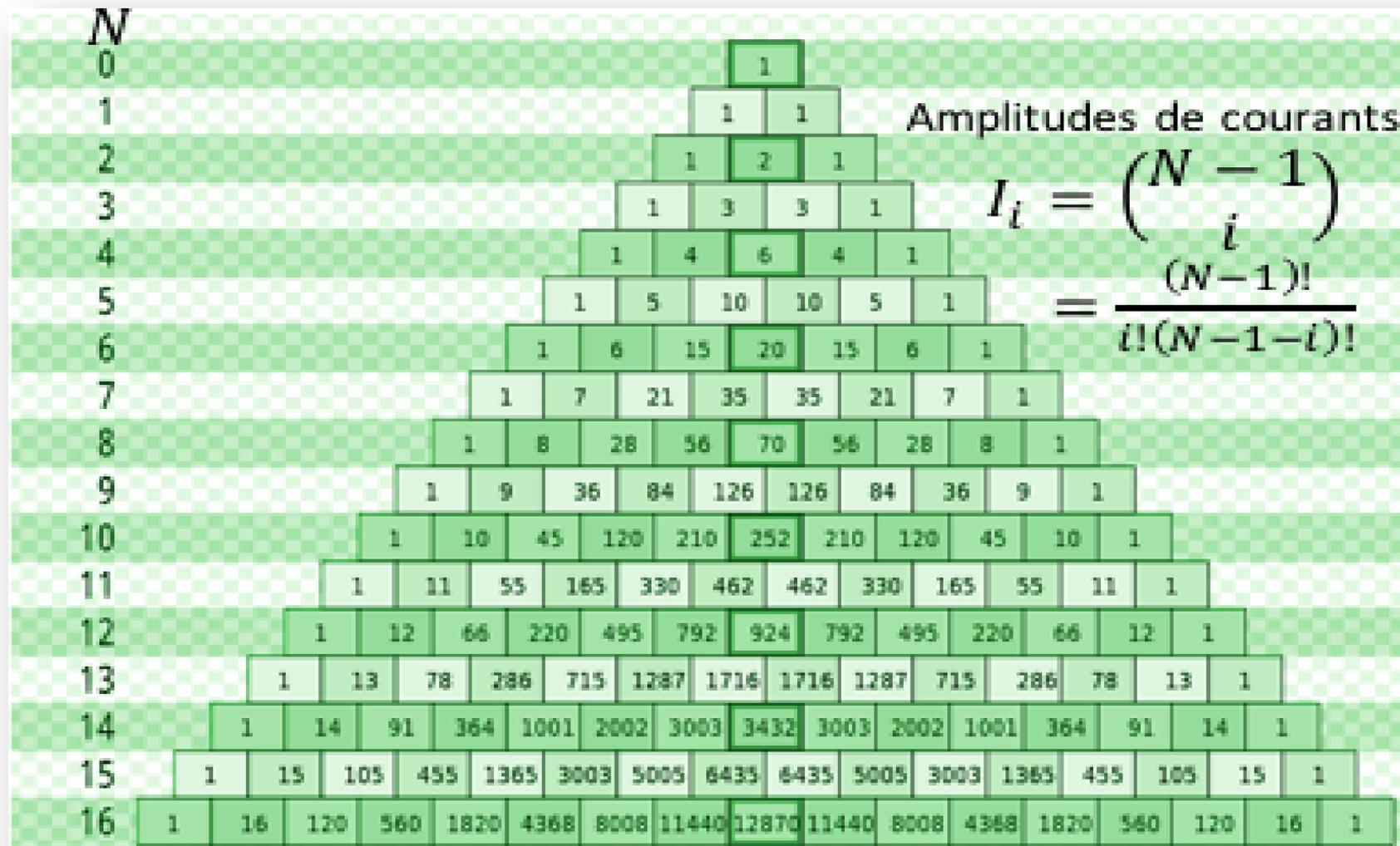
3 éléments en prenant : $AF = (1 + z^{-1})(1 + z^{-1}) = 1 + 2z^{-1} + z^{-2}$

4 éléments en prenant : $AF = (1 + z^{-1})(1 + z^{-1})(1 + z^{-1})$
 $= 1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + 1z^{-3}$

N éléments en prenant : $AF = (1 + z^{-1})^{N-1} = \sum_{i=0}^{N-1} \binom{N-1}{i} z^{-i}$

Les amplitudes des courants d'excitation des éléments correspondent aux coefficients du binôme de Newton, d'où la nomination **Réseau binomial**

Les coefficients de l'excitation de l'antenne réseau binomial sont déterminés à l'aide du triangle de Pascal.



Triangle de Pascal

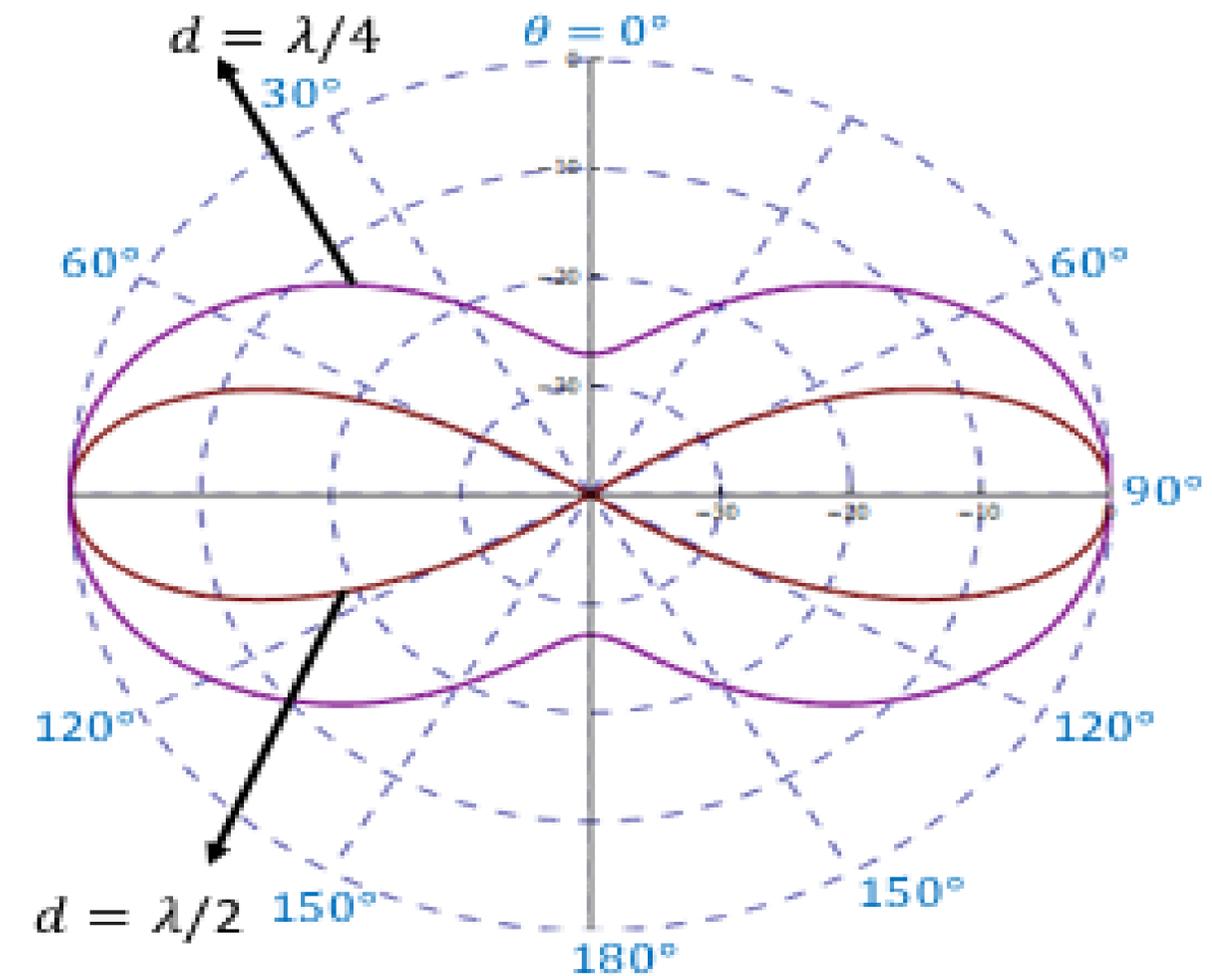


Diagramme de rayonnement du Facteur réseau d'une antenne réseau binomial à $N = 10$, $d = \frac{\lambda}{4}, \frac{\lambda}{2}$, $\theta_0 = 90^\circ$

Largeur du faisceau à mi puissance et directivité

Pour un réseau binomial dont la distance inter-élément est $d = \lambda/2$ la largeur du faisceau et la directivité maximale sont définies par:

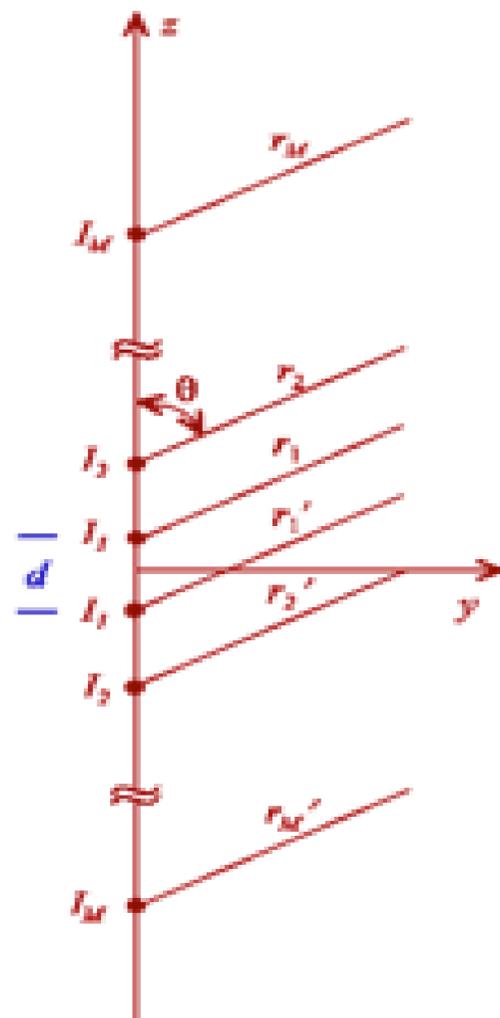
$$\begin{aligned}\Theta_{HPWB} &\approx \frac{1.06}{\sqrt{N-1}} = \frac{1.75}{\sqrt{L/\lambda}} \\ D_{max} &= \frac{2}{\int_0^\pi \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos(\theta)\right) \right)^{2(N-1)} d\theta} \\ &= \frac{(2N-2)(2N-4) \dots 2}{(2N-3)(2N-5) \dots 1} \\ &\approx 1.77\sqrt{N} = 1.77\sqrt{1 + 2L/\lambda}\end{aligned}$$

Où : $L = (N - 1)d$

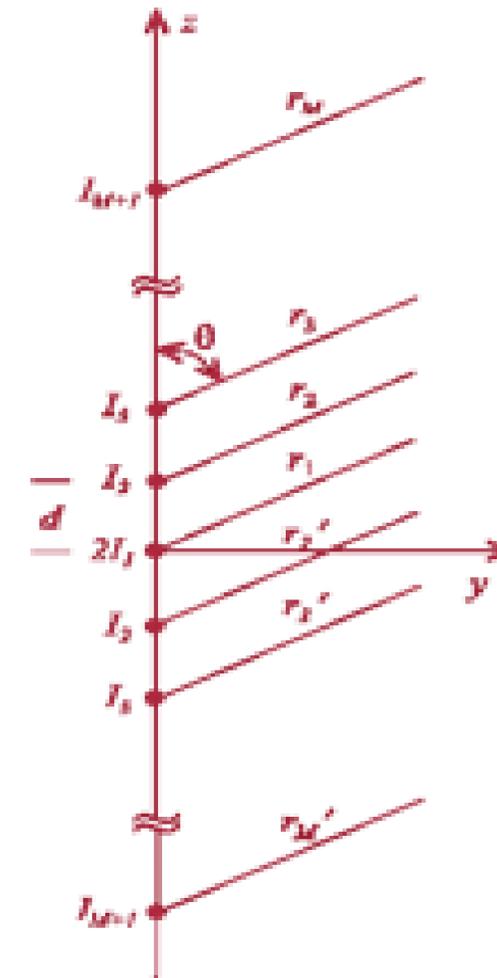
Réseaux Symétriques

les réseaux linéaires équidistants et à déphasage linéaire ont une loi d'excitation symétrique, avec $I_0 = I_{N-1}$, $I_1 = I_{N-2}$, etc. En pratique, pour étudier ces réseaux, l'origine de coordonnées est choisie au centre géométrique du réseau plutôt que sur son premier élément. On distingue alors deux possibilités :

Cas N pair : $N = 2M$



Cas N impair : $N = 2M + 1$



Le facteur réseau pour un rayonnement transversal (Broadside Array) est donné par :

Cas $N = 2M$

$$\begin{aligned} AF &= I_1 z^{-\frac{1}{2}} + I_2 z^{-\frac{3}{2}} + \dots + I_M z^{-\frac{2M-1}{2}} + I_1 z^{\frac{1}{2}} + I_2 z^{\frac{3}{2}} + I_M z^{\frac{2M-1}{2}} \\ &= I_1 (z^{-\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}}) + I_2 (z^{-\frac{3}{2}} + z^{\frac{3}{2}}) \dots + I_M (z^{-\frac{2M-1}{2}} + z^{\frac{2M-1}{2}}) \\ &= 2I_1 \cos\left(\frac{u}{2}\right) + 2I_2 \cos\left(\frac{3u}{2}\right) \dots + 2I_M \cos\left(\frac{2M-1}{2}u\right) \\ &= 2 \sum_{i=1}^M I_i \cos\left(\frac{2i-1}{2}u\right), \quad u = kd \cos(\theta), \quad z = e^{-ju} \end{aligned} \quad \boxed{1s}$$

Cas $N = 2M + 1$

$$\begin{aligned} AF &= 2I_1 + I_2 z^{-1} + \dots + I_{M+1} z^{-(M+1)} + I_2 z^1 + I_2 z^2 + I_M z^{(M+1)} \\ &= 2I_1 + 2I_2 \cos(u) + \dots + 2I_{M+1} \cos((M+1)u) \\ &= 2 \sum_{i=1}^{M+1} I_i \cos((i-1)u), \quad u = kd \cos(\theta), \quad z = e^{-ju} \end{aligned} \quad \boxed{2s}$$

Réseau Dolph-Tschebysheff

Compte tenu des relations :

$$\cos(0u) = 1$$

$$\cos(1u) = \cos(u)$$

$$\cos(2u) = 2 \cos^2(u) - 1$$

$$\cos(3u) = 4 \cos^3(u) - 3 \cos(u)$$

$$\cos(4u) = 8 \cos^4(u) - 8 \cos^2(u) + 1$$

$$\cos(5u) = 16 \cos^5(u) - 20 \cos^3(u) + 5 \cos(u)$$

$$\cos(6u) = 32 \cos^6(u) - 48 \cos^4(u) + 18 \cos^2(u) - 1$$

⋮

3s

Il est possible d'exprimer les expressions (1s) et (2s) sous forme polynomiale en $\cos(u/2)$ et en $\cos(u)$ respectivement.

En posant $x = \cos(u)$, on aura:

$$\cos(0u) = 1 = T_0(x)$$

$$\cos(1u) = x = T_1(x)$$

$$\cos(2u) = 2x^2 - 1 = T_2(x)$$

$$\cos(3u) = 4x^3 - 3x = T_3(x)$$

$$\cos(4u) = 8x^4 - 8x^2 + 1 = T_4(x)$$

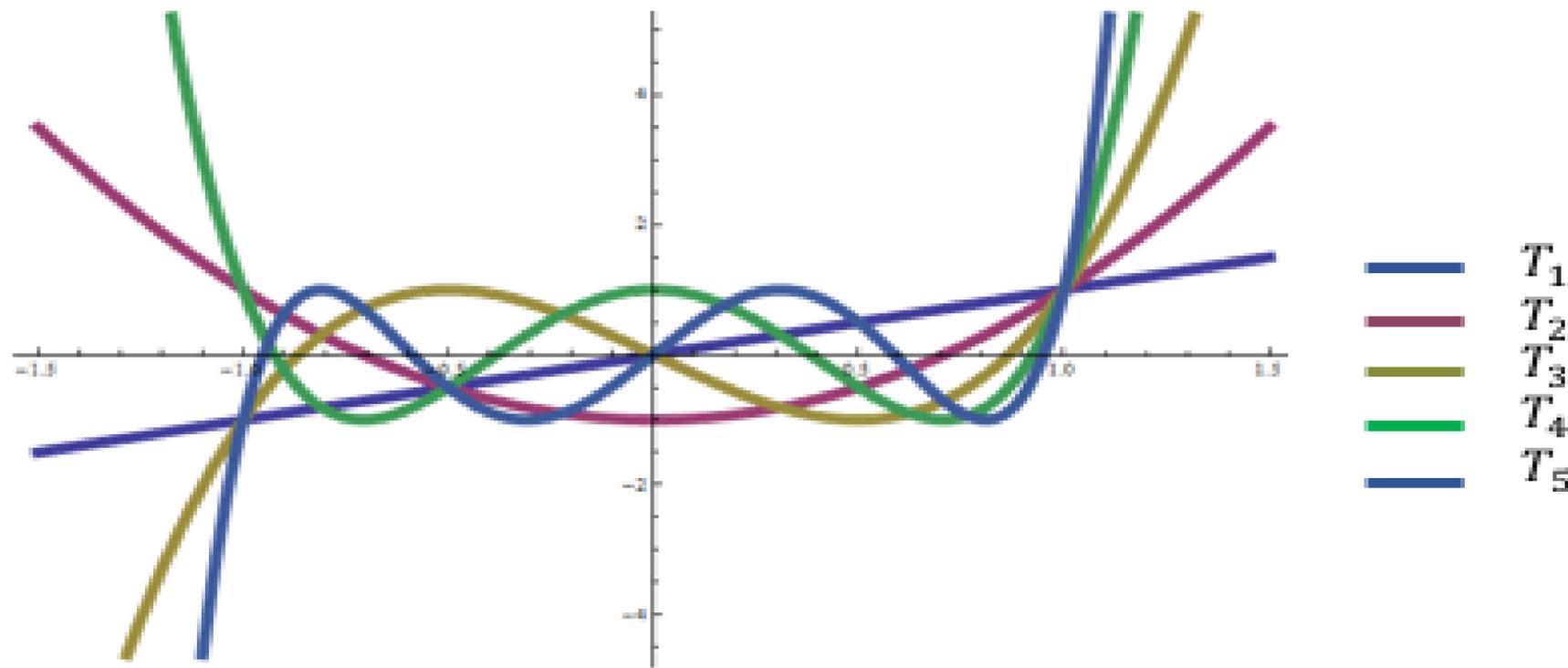
$$\cos(5u) = 16x^5 - 20x^3 + 5x = T_5(x)$$

$$\cos(6u) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 = T_6(x)$$

⋮

4s

T_n désigne le **polynôme de Tschébyssheff** de degré n



Les polynômes de Tschébyssheff sont définis par :

$$T_n(x) = \begin{cases} \cos(n \cos^{-1}(x)), & |x| \leq 1 \\ \cosh(n \cosh^{-1}(x)), & |x| > 1 \end{cases}$$

Ils obéissent à la loi de récurrence suivante :

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad T_0(x) = 1, T_1(x) = x$$

Procédure de synthèse Dolph-Tschebysheff

- 1- Utiliser l'une des formes (1s) ou (2s) selon la parité du nombre N d'éléments du réseau
- 2- Développer $\cos(mu)$ sous forme polynomiale en $\cos(u)$
- 3- Déterminer le point $x = x_0$ correspondant à $T_{N-1}(x_0) = R_0$ où R_0 est le niveau des lobes secondaires défini par :

$$R_0 = \frac{\text{Amplitude du lobe principal}}{\text{Amplitude du premier lobe secondaire}} = T_{N-1}(x_0)$$
$$= \cosh((N - 1) \cosh^{-1}(x_0))$$

x_0 est donc défini par :

$$x_0 = \cosh((\cosh^{-1}(R_0)) / (N - 1))$$

- 4- Substituer $\cos(u)$ par x/x_0 , normalisation du niveau des lobes secondaires à 1.
- 5- Egaliser le facteur réseau à $T_{N-1}(x)$ et déterminer les coefficients (amplitudes des courants)

Exemple :

Concevoir un réseau Dolph-Tschebysheff de 5 éléments espacés de $d = 0.5\lambda$
Le niveau des lobes secondaires R_0 est de 20 dB.

1- $N = 5, M = 2$

Sous forme normalisée, nous avons :

$$AF_5 = \sum_{n=1}^3 I_n \cos(2(n-1)u) \quad \text{où } u = kd\lambda/2$$

2-

$$\cos(0u) = 1$$

$$\cos(2u) = 2\cos^2(u) - 1$$

$$\cos(4u) = 8\cos^4(u) - 8\cos^2(u) + 1$$

3-

$$20dB = 20 \log_{10}(R_0) \rightarrow R_0 = 10$$

$$x_0 = \cosh(\cosh^{-1}(R_0)/4) = 1.293$$

4-

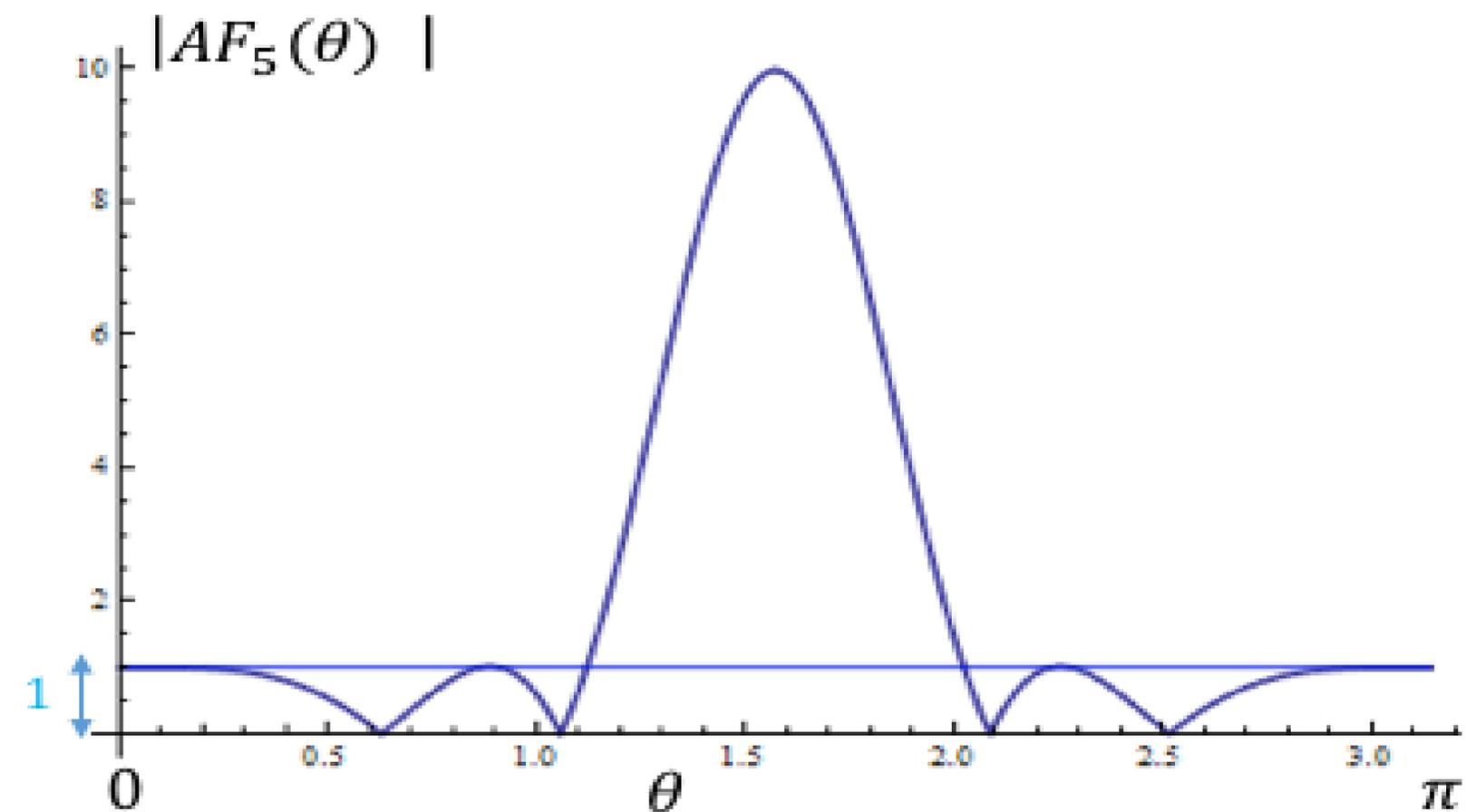
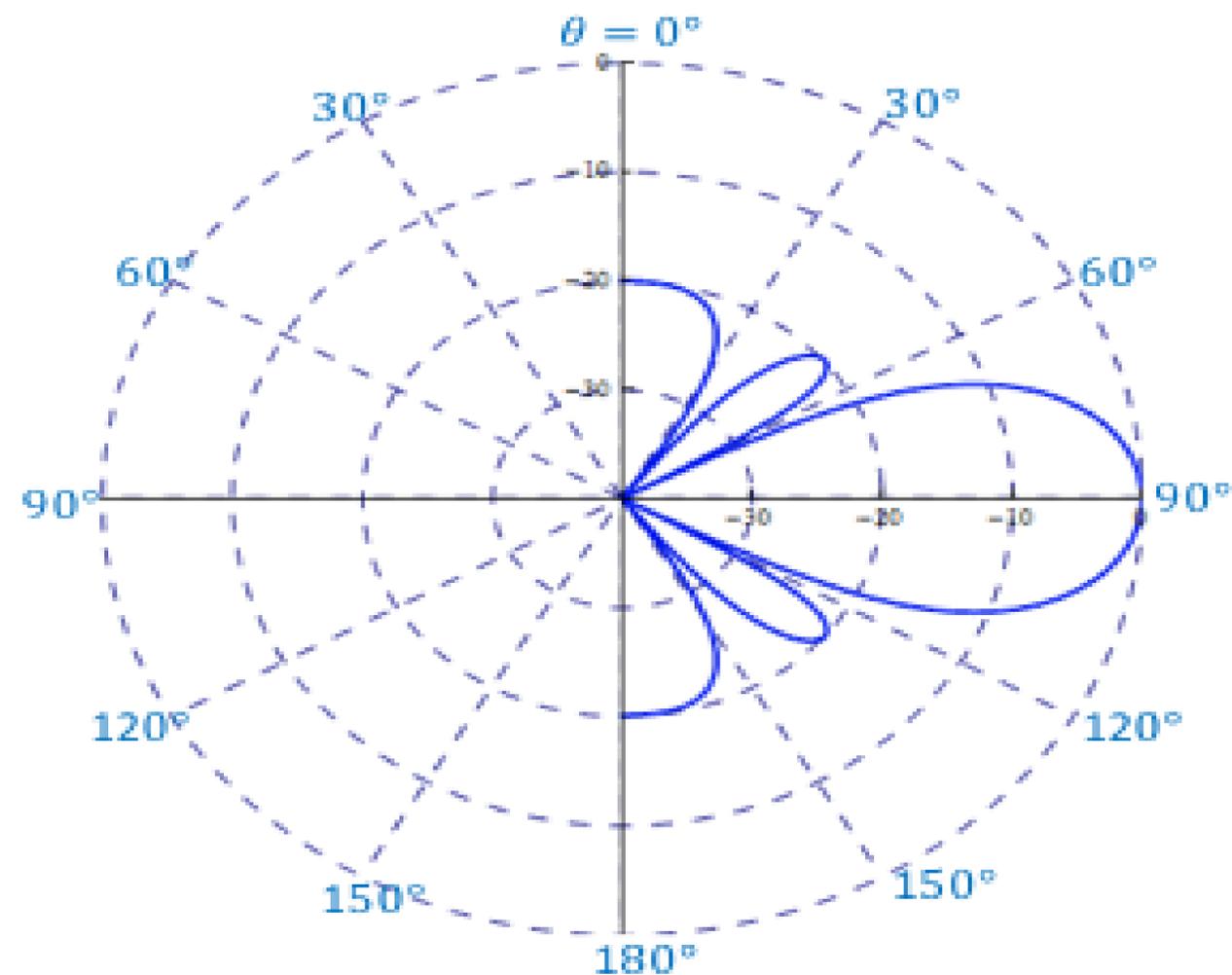
$$AF_5 = \sum_{n=1}^3 I_n \cos(2(n-1)u) = I_1 + I_2 \left(2 \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 - 1 \right) + I_3 \left(8 \left(\frac{x}{x_0} \right)^4 - 8 \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 - 1 \right)$$

$$= T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

5- La résolution du système d'équations en I_i se traduit par :

$$I_1 = 2.698, \quad I_2 = 4.493, \quad I_3 = 2.795$$

$$AF_5 = 2.689 + 4.493 \cos(\pi \cos(\theta)) + 2.795 \cos(2\pi \cos(\theta))$$



Largeur du faisceau à mi puissance et directivité (Réseau Dolph-Tschebysheff: DCA)

Pour un réseau Dolph-Tschebysheff large à lobes secondaires entre -20dB et -60dB
La largeur du faisceau à mi puissance et la directivité peuvent être obtenues en introduisant le facteur f défini par :

$$f = \frac{\Theta_{HPWB,DCA}}{\Theta_{HPWB,UA}} = 1 + 0.636 \left(\frac{2}{R_0} \cosh(\sqrt{(\cosh^{-1}(R_0))^2 - \pi^2}) \right)^2$$

- $\Theta_{HPWB,UA}$ est la largeur du faisceau pour le réseau uniforme *correspondant*.
- R_0 est le niveau des lobes secondaires (voltage ratio).

La directivité du facteur réseau pour un rayonnement proche du rayonnement transversal est donnée par l'expression suivante , valable dans la bande -20dB et -60dB des niveaux des lobes secondaires:

$$D_0 = \frac{2R_0^2}{1 + (R_0^2 - 1)f \frac{\lambda}{L + d}}$$