ETUDE
DES VIBRATIONS

Chapitre I -
Présentation et définitions

- **Les objectifs** à atteindre:

1) Savoir décrire le modèle de *l'oscillateur harmonique* et savoir l'appliquer à l'étude des *systèmes physiques oscillants*.

- 2) Savoir étudier les *réponses* de ces systèmes, en tenant compte des paramètres caractéristiques et des conditions initiales,

- 3) Savoir étudier l'*énergie* de tels systèmes.

Pour cela, il est recommandé d'aborder, **dans l'ordre**, les thèmes suivants :

- ***L'oscillateur harmonique.***
- ***L'oscillateur harmonique amorti.***
- ***L'oscillateur harmonique forcé***

L'étude de ces thèmes nécessite certaines connaissances préalables en mathématiques et en physique :

En physique,

- **Le principe fondamental de la dynamique**
- **Les théorèmes généraux** (de l'énergie cinétique, du moment cinétique).
- **Les définitions des énergies** cinétique, potentielle, énergie totale mécanique ou électrique.

En mathématiques :

- il faut savoir résoudre les *équations différentielles* (du second ordre, linéaires, à coefficients constants, sans et avec second membre)

- il faut connaître la représentation complexe d'une grandeur sinusoïdale fonction du temps.
- Développement en série de Fourrier / transformée de fourrier

I) Introduction générale et Définitions

a) Exemples d'Oscillateurs

Ils peuvent être de types différents : mécanique, électrique, acoustique,

- la masse accrochée à un ressort, le pendule,
- le circuit électrique RLC,
- un enfant sur une balançoire,
- le balancier d'une horloge,
- Sismographe,
- haut-parleur, microphone,
- instruments de musique à vent ou à cordes,
- amortisseurs d'un véhicule,
- structure d'une molécule diatomique

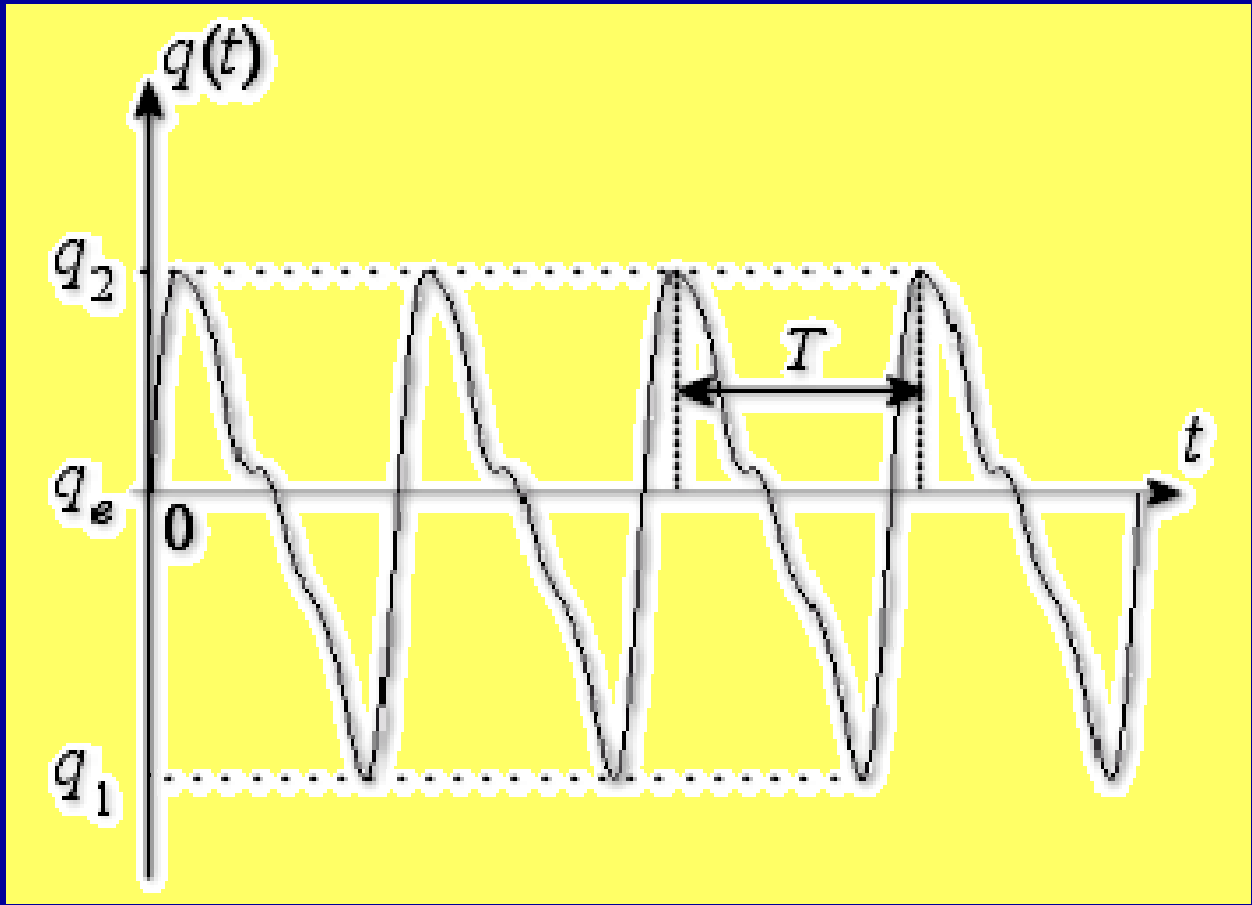
b) Définitions

α) Vibrations : Petites variations provoquées par une excitation d'une grandeur **q** autour d'une valeur moyenne $\mathbf{q_e}$.

- La fonction **q(t)** décrit la ***réponse*** du système à l'***excitation*** appliquée.
- Quand l'évolution de l'oscillateur peut-être décrite par n variables indépendantes, l'oscillateur possède *n degrés de liberté.*
- Le système physique est appelé ***oscillateur*** lorsque ***q(t)*** *varie périodiquement*
- Un oscillateur est linéaire si son mouvement est décrit par une équation différentielle linéaire.
- L 'oscillateur élémentaire linéaire possède un seul degré de liberté.
- Un oscillateur est **libre** s'il oscille sans interventions extérieures pendant son retour à l'équilibre.
- Un oscillateur est **forcé** si une action extérieure lui communique de l'énergie.
- Un oscillateur **dissipe de l'énergie** quand il retourne vers son état d'équilibre : il est **amorti**

Exemple de réponse d'un oscillateur :

- L'oscillation est de forme quelconque et de période *T*. *La fonction de réponse est telle que : $q(t) = q(t+T)$*



β) Oscillateur Harmonique

- La forme des oscillations est *sinusoïdale*
- L'*excitation* appliquée au système est **très *brève***, elle disparaît dès que le système oscille,
- Les oscillations sont dites *libres*.
-L'énergie totale du système se conserve au cours du temps

χ) Oscillateur Harmonique amorti

- Le système physique dissipe de l'énergie : l'énergie totale ne se conserve pas dans le temps. Le système est ***amorti.***
- Les oscillations sont ***libres*** (l'excitation initiale n'est pas entretenue).

δ) L'oscillateur harmonique forcé

Le système est soumis à une ***excitation*** *permanente* produite par un dispositif extérieur. Les oscillations sont dites *forcées*.

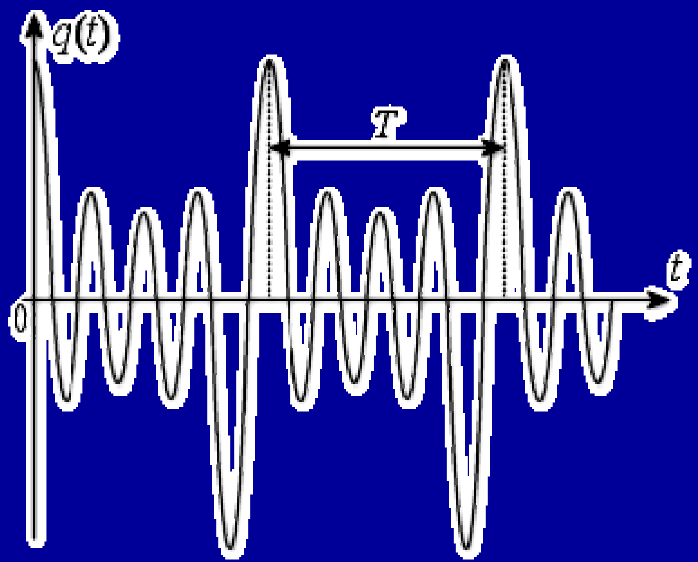
ϕ) L'oscillateur anharmonique

- Le système évolue suivant une loi périodique de forme quelconque (non sinusoïdale)

- Pour des petites variations (approximation des petites oscillations), certains systèmes se comportent comme des oscillateurs harmoniques. L'oscillateur est dit anharmonique.

- On montre mathématiquement que toute oscillation périodique se décompose en une somme d'oscillations harmoniques (décomposition de Fourrier).

la ***réponse*** de ce système physique est celle d'un ***un oscillateur anharmonique***.
Car *q(t)* :
- est une fonction périodique du temps,
- elle est de forme quelconque,



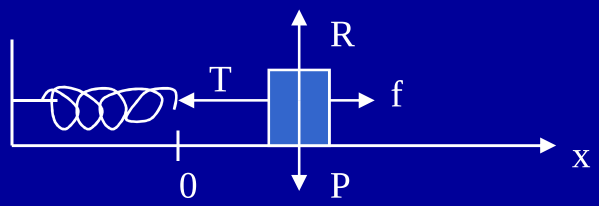
γ) **Forces de Frottement :**

- Frottement visqueux: *Les forces de frottement sont proportionnelles à la vitesse et de sens contraire.*

$$\vec{f} = -\mu.\vec{v} \qquad \text{pour un oscillateur rectiligne}$$

$$\bar{M}_f = -\mu\frac{d\theta}{dt} \qquad \text{pour un systeme en rotation}$$

Exemple de dispositif :



la relation fondamentale s'écrit: $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f} = m\vec{\gamma}$

Frottements solides : *La force de frottement est constante et opposée au mouvement*

μ) Espace des phases, orbites

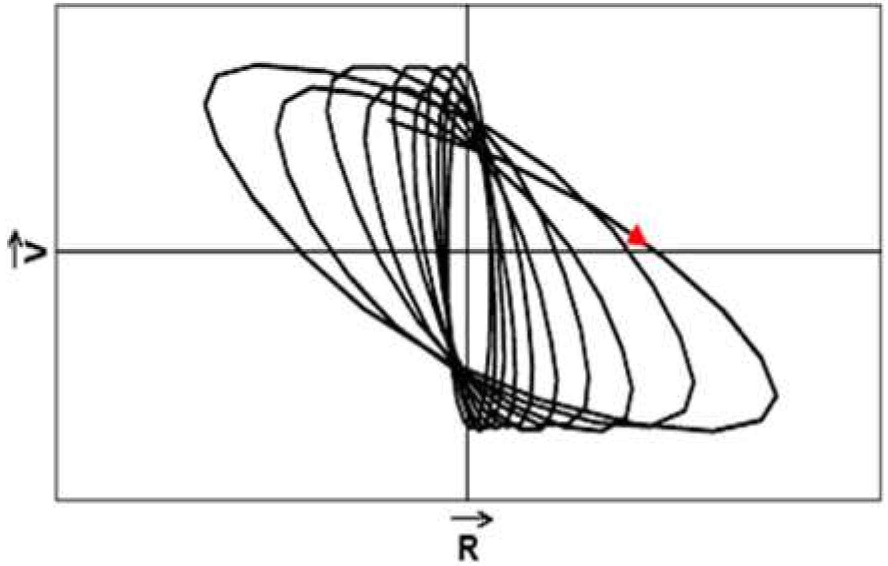
- En cinématique, l'espace des phases est un espace de dimension 6 construit à partir de l'espace des positions et l'espace des vitesses.

- Un point de l'espace des phases représente l'état du système à l'instant t.

- Il possède 6 coordonnées, 3 pour la position [x(t), y(t), z(t) en coordonnées cartésiennes] et 3 pour la vitesse $[\dot{x}(t)=\frac{dx}{dt}, \dot{y}(t)=\frac{dy}{dt}, \dot{z}(t)=\frac{dz}{dt}]$

- L'orbite est, dans l'espace des phases, la trajectoire décrite par le point représentatif entre l'instant initial et l'instant final.

- L'orbite est orientée dans le sens de l'évolution



II) Démarche générale

1) Définir et décrire le système physique oscillant.

2) Appliquer le « principe fondamental de la dynamique »

3) Résoudre les équations différentielles du second ordre, linéaires, à coefficients constants

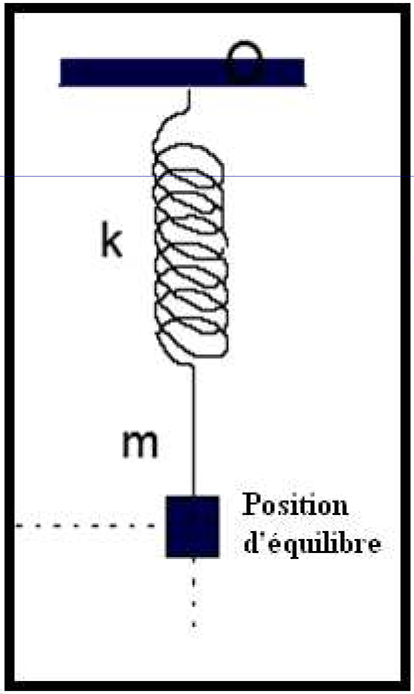
4) Déterminer les expressions des énergies cinétique, potentielle élastique et mécanique.

Chapitre II - L'Oscillateur Harmonique

I. Equation du mouvement : exemple du pendule élastique

1. Description du système

On considère un solide ponctuel de masse ***m*** suspendu à un ressort vertical de masse négligeable et de raideur (ou constante d'élasticité) ***k***. La position d'équilibre du système constitué du solide correspond à l'instant initial.



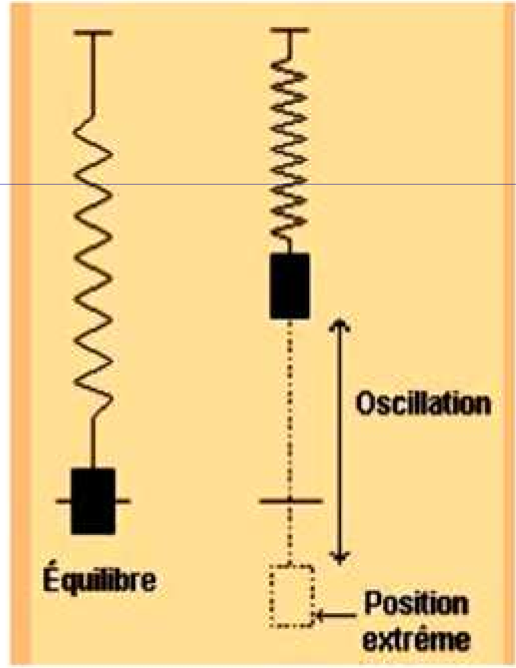
On étire ou on comprime le ressort, puis on lâche le solide.

2. Mise en équation

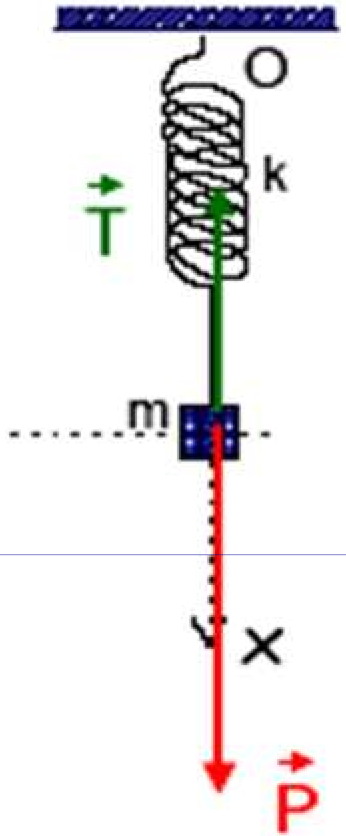
On utilise la relation fondamentale de la dynamique :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$$

Dans le repère (Ox) considéré, on fait le bilan des forces qui s'exercent sur m



Ces forces sont :



- **Le poids** $\vec{P} = m\vec{g}$

- **La force de rappel du ressort**

$$\vec{T} = -k(\ell - \ell_0)\,\vec{e_x}$$

- **Relation fondamentale de la dynamique:**

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}}$$

- **A l'équilibre,** $\ell = \ell_e$

$$k(\ell_e - \ell_0) = mg$$

$$ma = m\frac{d^2\ell}{dt^2} = mg - k(\ell - \ell_0) = mg - k(\ell - \ell_e) - k(\ell_e - \ell_0)$$

où a est l'accélération de la masse m.

On appelle x(t) l'élongation du ressort à partir de sa position d'équilibre : $x = (\ell - \ell_e)$

$$\frac{d^2\ell}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

L'équation devient :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

C'est une équation différentielle du deuxième ordre

3 - Solution de l'équation différentielle

L'étude mathématique des équations différentielles permet de montrer que la forme générale des solutions est

$x(t) = Ae^{rt}$ où r et A sont des constantes.

- $\dot{x}(t) = rAe^{rt}$ et $\ddot{x}(t) = r^2Ae^{rt}$

en reportant dans l'équation différentielle :

- $r^2Ae^{rt} + \frac{k}{m}Ae^{rt} = 0$ *Soit :* $\boxed{r^2 + \frac{k}{m} = 0}$

dont les deux solutions sont :

$r_1 = +j\omega_0 = j\sqrt{\frac{k}{m}}$ et $r_2 = -j\omega_0$

La solution *x(t)* est alors une combinaison linéaire des deux solutions particulières :

$x_1(t) = e^{j\omega_0 t}$ et $x_2(t) = e^{-j\omega_0 t}$

$$x(t) = A_1 x_1(t) + A_2 x_2(t)$$

Les deux constantes A_1 et A_2 sont déterminées à partir des conditions initiales $x(t=0)$ et $v(t=0)$.

Pour obtenir une forme simplifiée de $x(t)$, on choisit d'utiliser 2 autres constantes A_0 et φ qui sont reliées à A_1 et A_2 par les relations

$$2A_1 = A_0 e^{j\varphi} \quad \text{et} \quad 2A_2 = A_0 e^{-j\varphi}$$

On obtient alors l'équation horaire du mouvement:

$$x(t) = \frac{1}{2}[A_0 e^{(j\omega_0 t + \varphi)} + A_0 e^{-(j\omega_0 t + \varphi)}]$$

soit

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

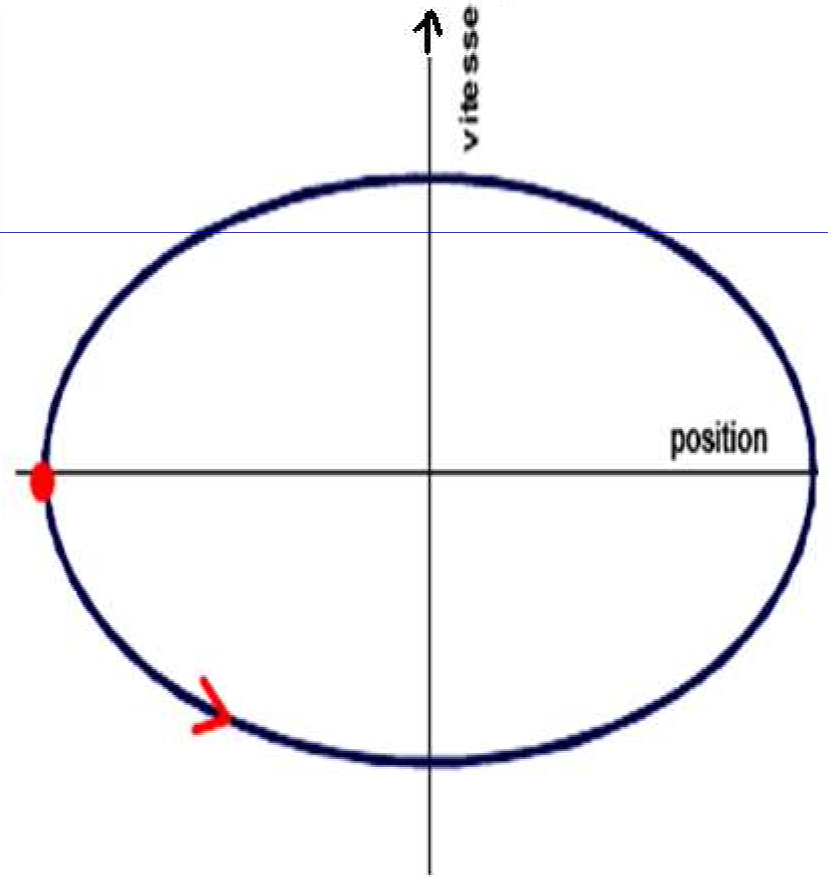
* $x(t)$ est une fonction sinusoïdale du temps
* A_0 est l'amplitude du mouvement
* ω_0 est la pulsation des oscillations
* φ est le déphasage à l'origine

4 - Orbite de l'Oscillateur harmonique

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{et} \quad v(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 A_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

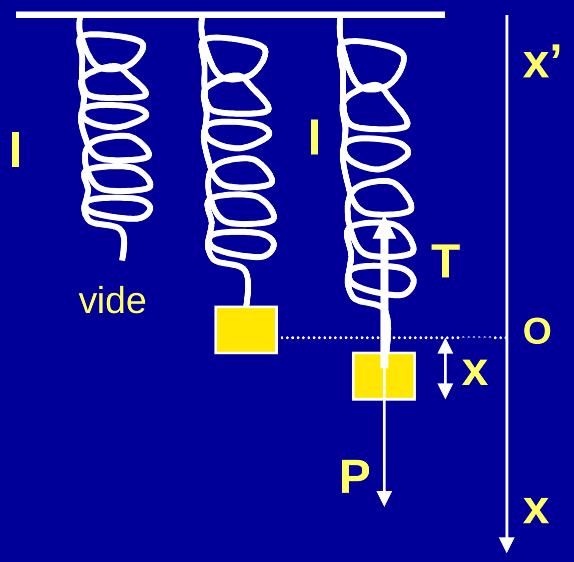
$$\frac{1}{A_0^2} x^2(t) + \frac{1}{A_0^2 \omega_0^2} v^2(t) = 1$$

C'est l'équation d'une ellipse.



Autres Oscillateurs Harmoniques

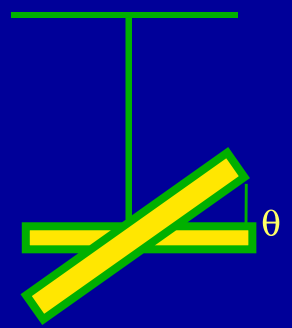
Pendule élastique :



Période d'oscillation

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Pendule de Torsion:

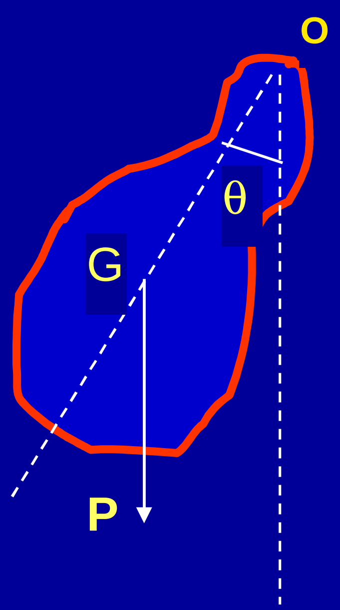


I moment d'inertie / Δ

C: Constante de torsion

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}}}$$

Pendule pesant



OG = a

M: masse du pendule

$\mathbf{I}_\Delta$: moment d'inertie / Δ

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{M\,g\,a}}}$$

Pour le pendule simple:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

Résumé : Oscillateur libre

1. *Oscillateur non amorti*

On appelle ***oscillateur harmonique*** un système évoluant dans le temps suivant la loi :

$$x = a \sin(\omega_o t + \varphi)$$

ω_o est la pulsation propre de l'oscillateur

2. *Équation différentielle caractéristique*

$$\boxed{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \omega^2 x = 0}$$

Inversement : tout système obéissant à l'équation ci-dessus est un oscillateur harmonique.

II - Étude énergétique

***1**) pendule élastique :*

On a : $x = a \sin(\omega t + \varphi)$ et $v = a\,\omega \cos(\omega t + \varphi)$

l'énergie cinétique : $$Ec = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

L'énergie potentielle: $$0 - Ep(x) = \int_0^x -k.x.dx$$

$$\Rightarrow \quad Ep = \frac{1}{2} k.x^2 = \frac{1}{2} k a^2 \sin^2(\omega t + \varphi)$$

L'énergie Mécanique de vibration s'écrit :

$$E = Ec + Ep = \frac{a^2}{2}\left[m\omega^2 \cos^2(\omega t + \varphi) + k \sin^2(\omega t + \varphi)\right]$$

$$\text{Soit :} \quad \boxed{E = \frac{1}{2} k.a^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2} \quad \text{avec} \quad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

L'Energie mécanique totale est constante

2) *Autres oscillateurs harmoniques*

Pendule de torsion:

$$Ec = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \quad ; \quad Ep = \frac{1}{2}C\theta^2 \quad \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2}C\theta_m^2 = \frac{1}{2}J\omega^2\theta_m^2 = \frac{1}{2}J\dot{\theta}_m^2}$$

Pendule pesant :

$$Ec = \frac{1}{2}I.\dot{\theta}^2 \quad ; \quad Ep = \frac{1}{2}M.g.a.\theta^2 \quad \Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2}M.g.a.\theta_m^2}$$

Circuit LC: $\boxed{E = \frac{1}{2}\frac{Q_m^2}{C}}$

L’oscillateur harmonique non amorti est un système à énergie mécanique constante: C’est un système conservatif

III) Équation différentielle à partir de l'énergie mécanique

$$E_m = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m \, . \dot{x}^2 + C^{te}$$

$$\frac{dE_m}{dt} = k \, . x \frac{dx}{dt} + m \, . \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dt} = 0$$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m} x = 0}$$

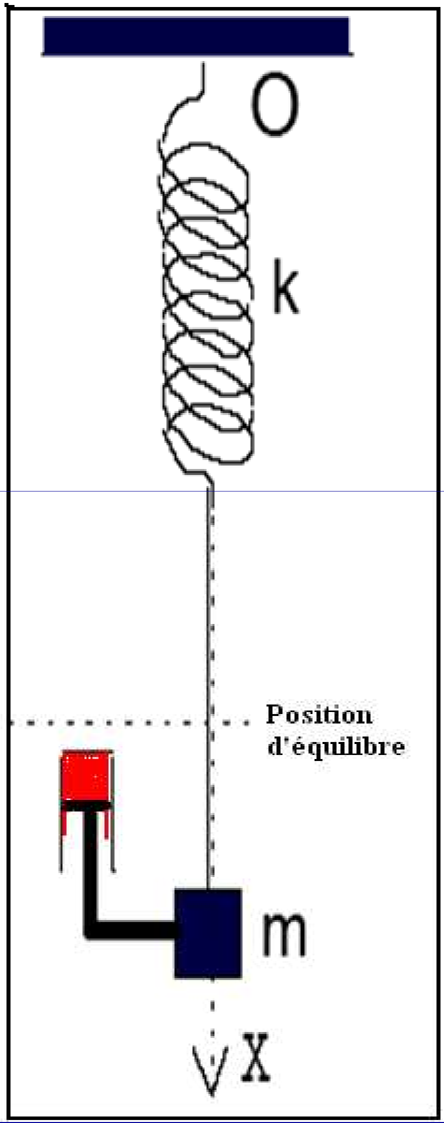
Qui est l'équation différentielle du mouvement pour un oscillateur harmonique

IV) Ce qu'il faut savoir

- Un oscillateur est libre s'il oscille sans interventions extérieures pendant son retour à l'équilibre. Il est **amorti** s'il dissipe de l'énergie quand il retourne vers son état d'équilibre et il est forcé si une action extérieure lui communique de l'énergie.
- En cinématique, l'espace des phases est un espace de dimension 6 construit à partir de l'espace des positions et l'espace des vitesses.
- L'orbite est, dans l'espace des phases, la trajectoire décrite par le point représentatif entre l'instant initial et l'instant final.
- L'équation différentielle qui régit le mouvement d'un oscillateur harmonique s'écrit : $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$.
- L'équation horaire du mouvement d'un oscillateur harmonique est: $x(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$.
- L'énergie totale d'un oscillateur est constante. Dans le cas du pendule élastique, elle s'écrit : $E_m = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2$.
- On peut retrouver l'équation différentielle du mouvement en dérivant l'expression de l'énergie mécanique.

Chapitre III -
L'Oscillateur Harmonique Amorti

I. Equation du mouvement : exemple du pendule élastique



1. Description du système

Le solide ponctuel de masse m est suspendu au ressort vertical de raideur k et est soumis à une force de frottement.

Si le frottement est solide, la force de frottement est constante et opposée au mouvement.

Lorsque le frottement est fluide, la force de frottement est proportionnelle à la norme de la vitesse et opposée au mouvement.

$$\vec{F}_f = -\alpha\vec{v} = -\alpha\vec{\dot{x}}$$

2 . Mise en équation (frottement fluide)

On utilise la relation fondamentale de la dynamique: $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

On obtient :

$$m\frac{d^2l}{dt^2}\vec{i} = -k(l - l_o)\vec{i} + mg\vec{i} - \alpha\frac{dl}{dt}\vec{i}$$

Avec $x = (l - l_e)$ l'équation devient :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0}$$

Avec $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ et $\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_o^2 x = 0}$$

II. Solution de l'équation différentielle

1. Forme générale

La forme générale des solutions de l'équation différentielle est : $x(t)=Ae^{rt}$ où r et A sont des constantes.

$$\Rightarrow \dot{x}(t)=rAe^{rt} \quad \text{et} \quad \ddot{x}(t)=r^2Ae^{rt}$$

$$\Rightarrow r^2Ae^{rt}+2\lambda rAe^{rt}+\omega_0^2Ae^{rt}=0$$

$$\Longrightarrow \quad r^2+2\lambda r+\omega_0^2=0$$

équation caractéristique dont la résolution donnera les valeurs de r, donc la forme de x(t).

le discriminant réduit est $\Delta'=\lambda^2-\omega_o^2$

les solutions de l'équation caractéristique sont $r_1=-\lambda+\sqrt{\Delta'}$ et $r_2=-\lambda-\sqrt{\Delta'}$

- Si Δ' est >0 , c'est dire si $\lambda>\omega_o$ les solutions sont réelles
- Si $\Delta'=0$, c'est dire si $\lambda=\omega_o$ $r_1=r_2=-\lambda$
- Si Δ' est <0 , c'est dire si $\lambda<\omega_o$ les solutions r_1 et r_2 sont imaginaires

- Si $\lambda > \omega_o$ ***régime apériodique***

- Si $\lambda = \omega_o$: ***régime critique***

- Si $\lambda < \omega_o$: ***régime pseudopériodique***

La solution $x(t)$ est alors une combinaison linéaire des deux solutions particulières:

$$x_1(t) = e^{r_1 t} \qquad x_2(t) = e^{r_2 t}$$

$$x(t) = A_1 x_1(t) + A_2 x_2(t)$$

L'expression de x(t) dépend donc de la constante d'amortissement λ :

2. Régime apériodique

On pose $\eta = \dfrac{\lambda}{\omega_0}$ Pour le régime apériodique $\eta > 1$

ce qui implique : $\sqrt{\Delta} = \omega_0\sqrt{\eta^2 - 1}$

Donc $r_1 = -\lambda - \omega_0\sqrt{\eta^2 - 1}$ et $r_2 = -\lambda + \omega_0\sqrt{\eta^2 - 1}$.

$$x(t) = e^{-\lambda t}\left(A_1 e^{+\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\,t} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}\,t}\right)$$

$$\boxed{x(t) = e^{-\lambda t}\left(A\cosh\left(\sqrt{(\lambda^2 - \omega_0^2}\,t\right) + B\sinh\left(\sqrt{(\lambda^2 - \omega_0^2}\,t\right)\right)}$$

Les constantes A_1 et A_2 ou A et B sont déterminées à partir des conditions initiales

Remarque : la fonction de réponse x(t) n'est ni sinusoïdale ni périodique

3. Régime apériodique critique

Pour le régime critique : $r_1=r_2=-\lambda$ donc $x_1(t)=e^{-\lambda t}$ est une des solutions.

montrons que $x_2(t)=te^{-\lambda t}$ est aussi solution quand $\lambda=\omega_0$.

$$\dot{x}_2(t)=e^{-\lambda t}-\lambda te^{-\lambda t} \qquad \ddot{x}_2(t)=-\lambda e^{-\lambda t}-\lambda e^{-\lambda t}+\lambda^2 te^{-\lambda t}$$

reportons dans l équation $\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x=0$

$$-\lambda e^{-\lambda t}-\lambda e^{-\lambda t}+\lambda^2 te^{-\lambda t}+2\lambda e^{-\lambda t}-2\lambda^2 te^{-\lambda t}+\lambda^2 te^{-\lambda t}=0$$

La solution est donc: $\boxed{x(t)=e^{-\lambda t}(A_1t+A_2)}$

Solution qui peut aussi s'écrire :

$$x = Ae^{-\lambda t}(1 + Bt)$$

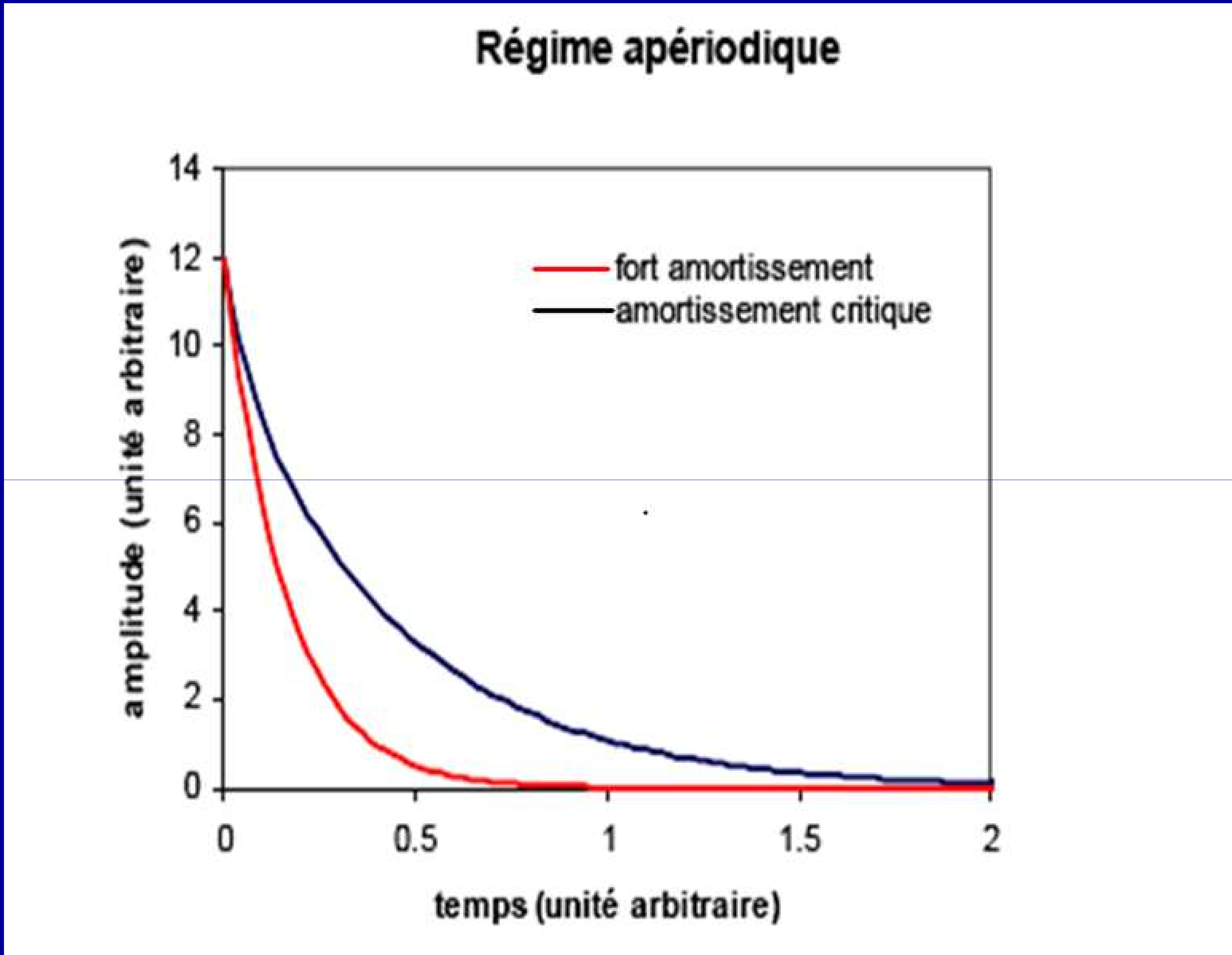
Si on suppose qu' à l'instant t = 0, x = x_o et *v* = 0 , on a :

$$\boxed{x = x_o e^{-\lambda t}(1 + \lambda t)}$$

et

$$\boxed{v = -\lambda^2 x_o t.e^{-\lambda t}}$$

On constate que x est toujours positif et la vitesse v est toujours négative, donc x décroît de x_o à 0 en un temps théoriquement infini: Il n'y a plus d'oscillations.



Régime apériodique
fort amortissement
amortissement critique
amplitude (unité arbitraire)
14
12
10
8
6
4
2
0
0
0.5
1
1.5
2
temps (unité arbitraire)

4. Régime pseudopériodique

L'amortissement est faible. $\lambda < \omega_0 \rightarrow \eta < 1 \quad (\eta = \frac{\lambda}{\omega_0})$

Les solutions r_1 et r_2 sont complexes.

$$r_1 = -\lambda - j\omega_0\sqrt{1-\eta^2} \quad \text{et} \quad r_2 = -\lambda + j\omega_0\sqrt{1-\eta^2}$$

On pose $\omega = \omega_0\sqrt{1-\eta^2}$

La solution de l'équation différentielle est donc :

$$x(t) = e^{-\lambda t}(A_1 e^{+j\omega t} + A_2 e^{-j\omega t})$$

$$x(t) = e^{-\lambda t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$$

$$\boxed{x(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi)}$$

Les constantes A et φ sont déterminées par les conditions initiales.

Par exemple, si à $t = 0$ on a : $X = X_o$; $V = -\lambda X_o$

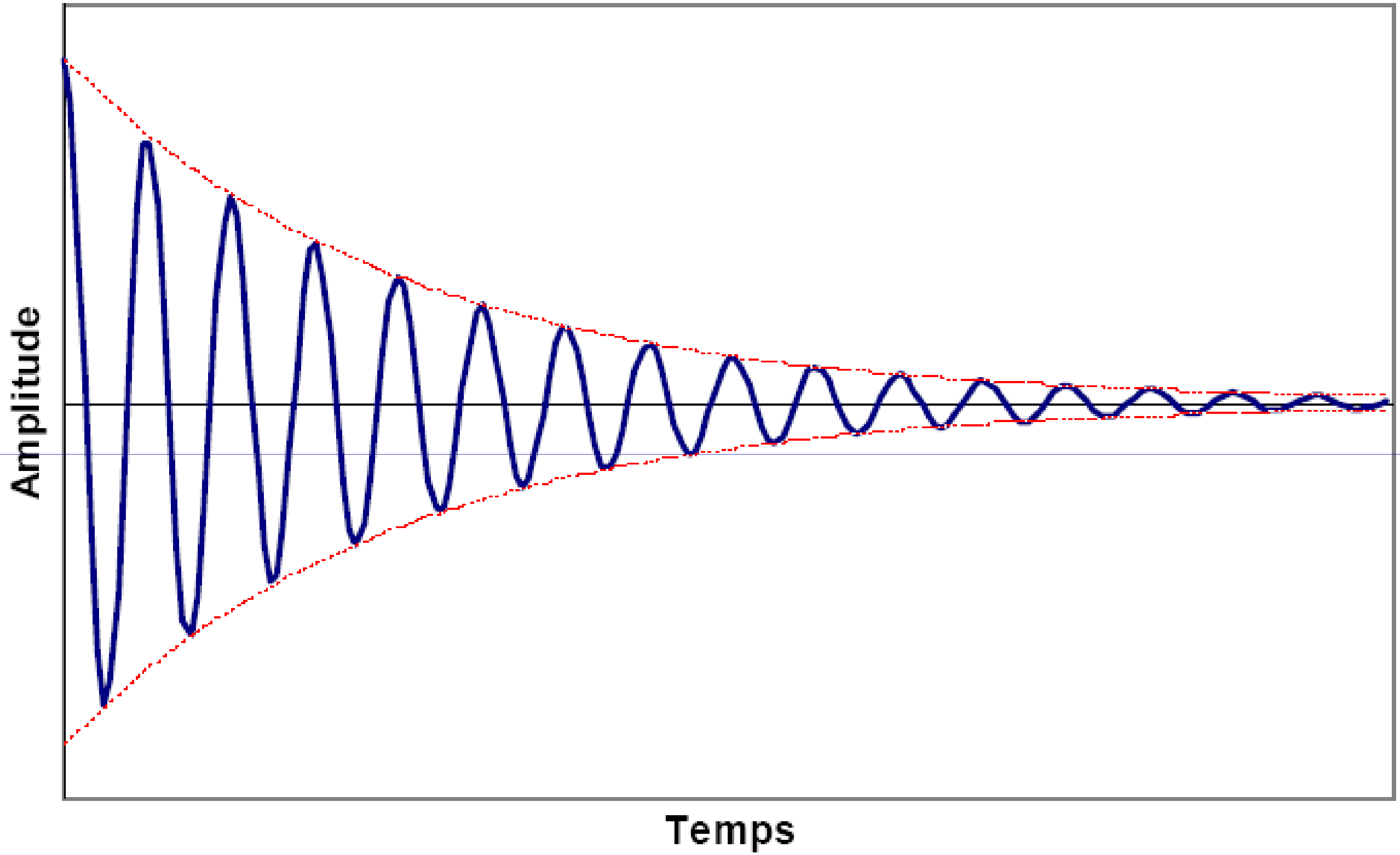
nous obtenons : $A = X_o$ *et* $\varphi = \pi/2$

Soit

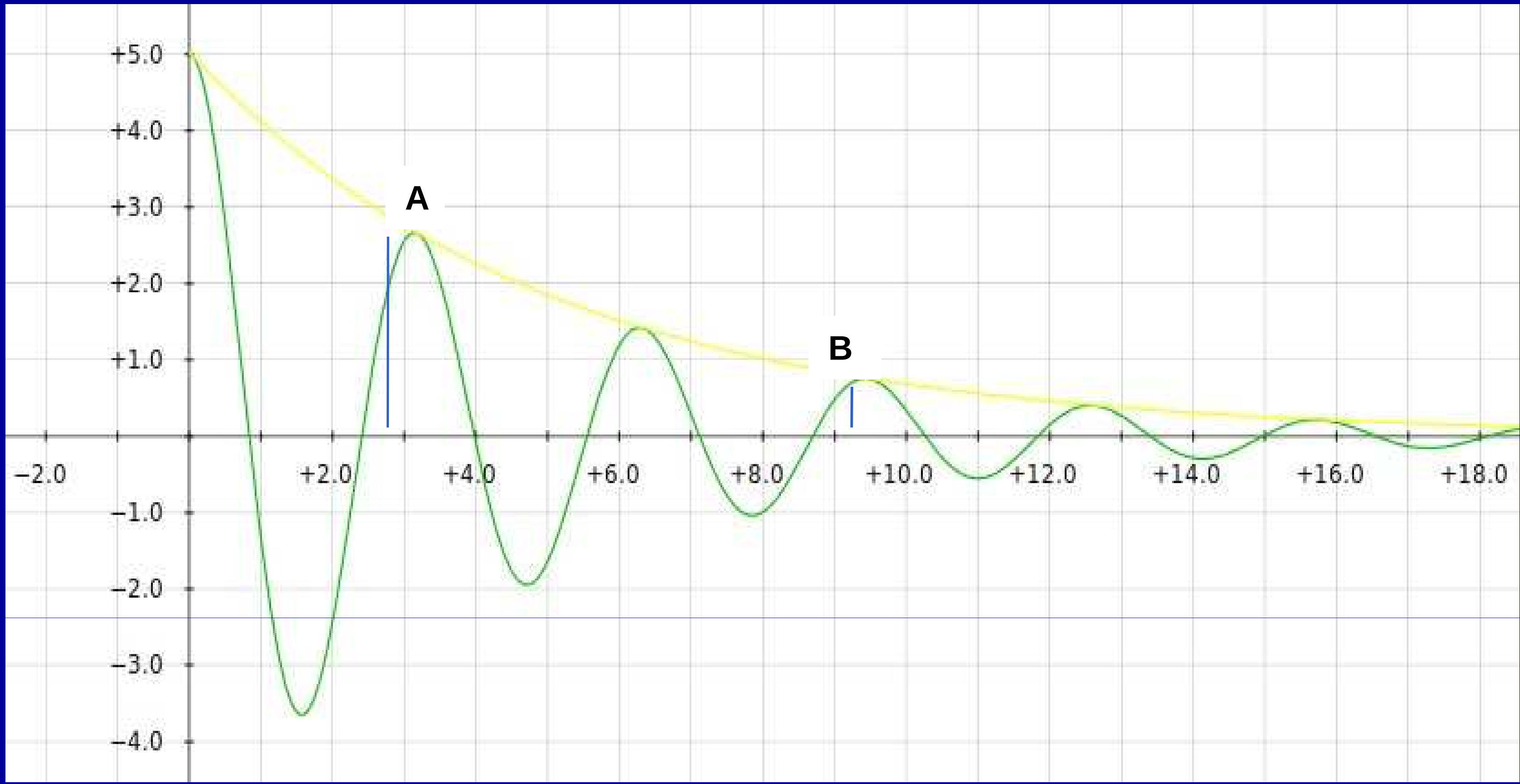
$$\boxed{x = x_o e^{-\lambda t} \cos \omega t}$$

Le système effectue des oscillations d'amplitude décroissante et de « pseudo-période » $T = 2\pi/\omega$

Régime pseudopériodique



$$x(t) = A e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi)$$


+5.0
+4.0
+3.0
+2.0
+1.0
−1.0
−2.0
−3.0
−4.0
−2.0
+2.0
+4.0
+6.0
+8.0
+10.0
+12.0
+14.0
+16.0
+18.0
A
B

III. Etude du régime pseudopériodique

1. Pseudopériode

L'élongation du ressort passe par des maximums à des intervalles de temps égaux. Mais ces maximums ont des valeurs décroissantes. Ce mouvement n'est pas périodique mais pseudopériodique.

La pseudopériode est :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1-\eta^2}}$$

Si l'amortissement est très faible ($\eta \ll 1$), on obtient une expression approchée :

$$\boxed{T \cong T_0\left(1+\frac{\eta^2}{2}\right)}$$

2. Décrément logarithmique

La décroissance de l'amplitude des oscillations est caractérisée par le décrément logarithmique :

$$\boxed{\Lambda = \frac{1}{n}\ln\left[\frac{x(t)}{x(t+nT)}\right]}$$

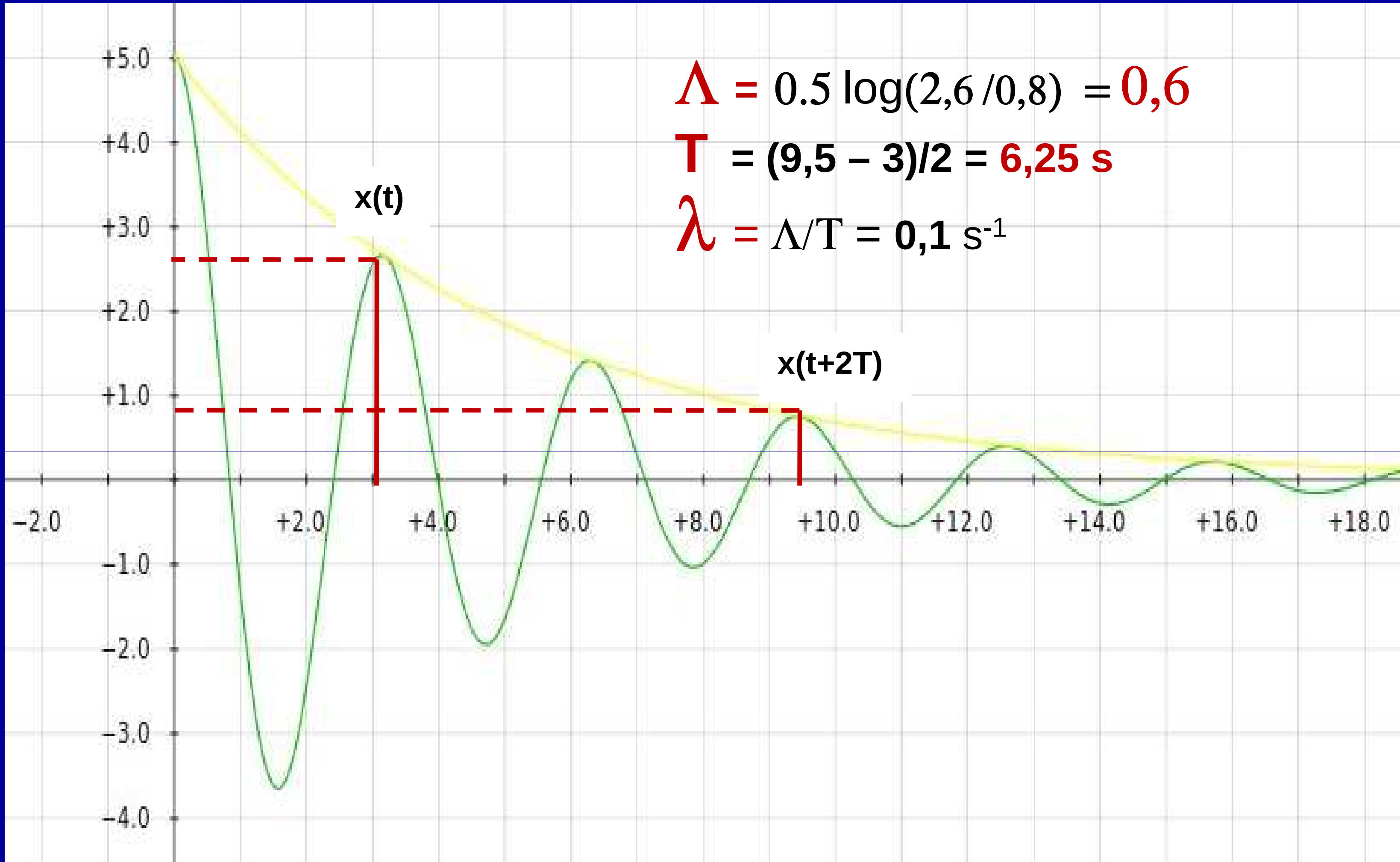
$$\Lambda = \frac{1}{n}\ln\left[\frac{Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t+\varphi)}{Ae^{-\lambda(t+nT)}\cos(\omega(t+nT)+\varphi)}\right] = \frac{1}{n}\ln\left[\frac{\cos(\omega t+\varphi)}{e^{-n\lambda T}\cos(\omega t+\varphi)}\right]$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\Lambda = \lambda T}$$

Si l'amortissement est très faible (η<<1), on obtient une expression approchée :

$$\Lambda = \lambda\frac{T_0}{\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\eta^2}}\frac{\lambda}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\eta^2}}\eta \approx 2\pi\eta$$

$$\boxed{\Lambda = \lambda T \approx 2\pi\eta}$$



Λ = $0.5\,\log(2{,}6/0{,}8)$ = $0{,}6$

T = (9,5 – 3)/2 = 6,25 s

λ = Λ/T = **0,1** s^{-1}

3. Orbite d'un oscillateur linéaire soumis à un frottement fluide

$$x(t) = A_0\, e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi)$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$= -A_0 e^{-\lambda t}\left[\lambda \cos(\omega t + \varphi) + \omega \sin(\omega t + \varphi)\right]$$

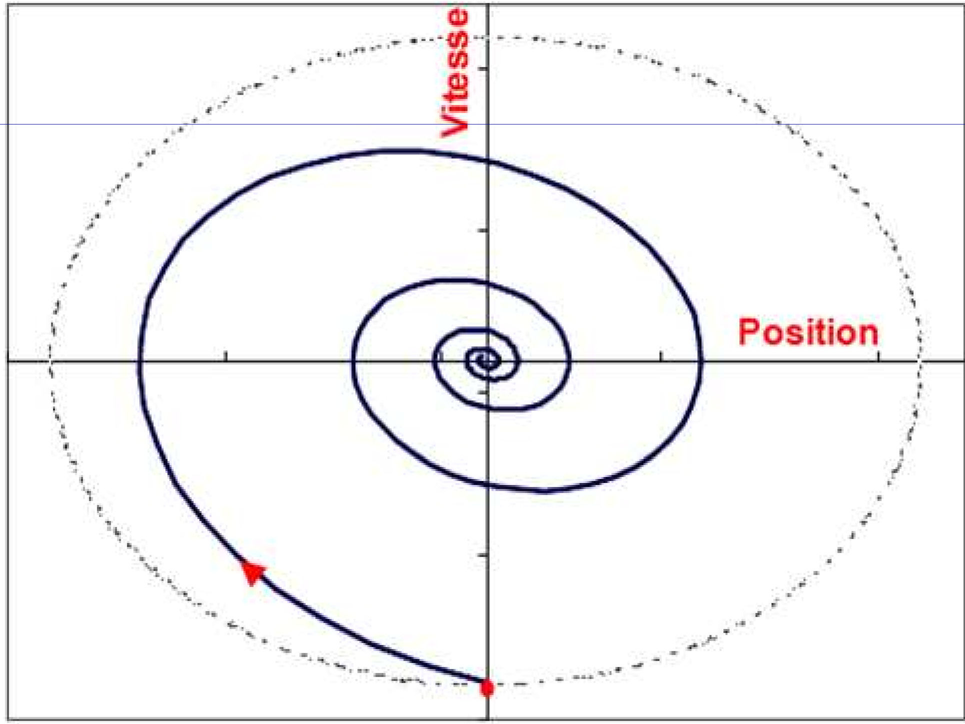
On pose $C \sin\alpha = \lambda$

et $C \cos\alpha = \omega$

$\rightarrow C = \omega_0$

$\rightarrow \sin\alpha = \eta$

$$\dot{x}(t) = -A_0\omega_0 e^{-\lambda t} \sin(\omega t + \varphi + \alpha)$$



4. Etude énergétique   Energie Mécanique

L'énergie mécanique du pendule élastique est la somme des énergies potentielles de la masse et du ressort et de l'énergie cinétique de la masse.

On a vu que cette énergie mécanique peut se mettre sous la forme $E_m = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\,\dot{x}^2 + C^{te}$

$$x(t) = A_0\, e^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi) \quad \text{et} \quad \dot{x}(t) = -A_0\omega_0 e^{-\lambda t}\sin(\omega t + \varphi + \alpha)$$

$C \sin\alpha = \lambda$ et $C \cos\alpha = \omega$ $\rightarrow C = \omega_0$ $\rightarrow \sin\alpha = \eta$ avec

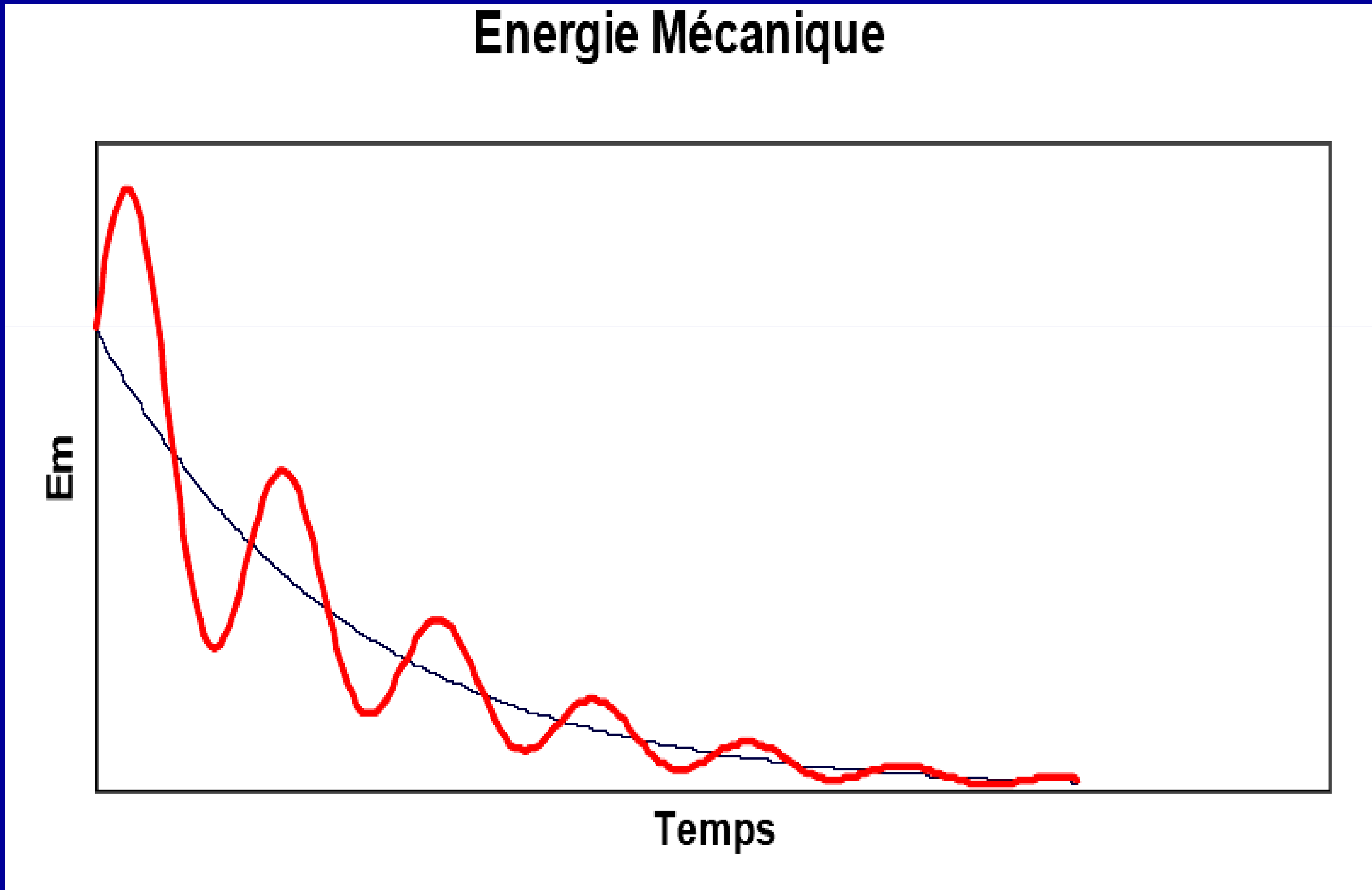
$$Em(t) = \frac{1}{2}kA_0^2\, e^{-2\lambda t}\left[\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi + \alpha)\right]$$

$$Em(t) = \frac{1}{2}kA_0^2\, e^{-2\lambda t}\left[1 + \sin^2(\omega t + \varphi + \alpha) - \sin^2(\omega t + \varphi)\right]$$

$$Em(t) = \frac{1}{2}kA_0^2\, e^{-2\lambda t}\left[1 + [\sin(\omega t + \varphi + \alpha) + \sin(\omega t + \varphi)][\sin(\omega t + \varphi + \alpha) - \sin(\omega t + \varphi)]\right]$$

$$\boxed{Em(t) = \frac{1}{2}kA_0^2\, e^{-2\lambda t}\left[1 + \sin\alpha\,\sin 2(\omega t + \varphi + \frac{\alpha}{2})\right]}$$

$$Em(t)=\frac{1}{2}kA_0^2\,e^{-2\lambda t}\left[1+\eta\,\sin 2\left(\omega t+\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$



Facteur de Qualité

Un oscillateur est un réservoir d'énergie. Si les pertes d'énergie sont faibles, l'oscillateur est de bonne qualité.

On appelle **Facteur de Qualité Q** le rapport entre l'énergie mécanique à l'instant t et la perte d'énergie entre les instants t et t+T.

$$\boxed{Q = 2\pi \frac{E_m(t)}{(E_m(t) - E_m(t+T))}}$$

$$E_m(t) = \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-2\lambda t}\left[1+\eta \sin 2(\omega t+\varphi+\frac{\alpha}{2})\right]$$

$$E_m(t+T) = \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-2\lambda(t+T)}\left[1+\eta \sin 2(\omega t+\varphi+\frac{\alpha}{2})\right]$$

$$E_m(t)-E_m(t+T) = \frac{1}{2}kA_0^2 e^{-2\lambda t}\left[1+\eta \sin 2(\omega t+\varphi+\frac{\alpha}{2})\right](1-e^{-2\lambda T})$$

$$\boxed{Q = \frac{2\pi}{(1-e^{-2\lambda T})}}$$

Si l'amortissement est faible : $\boxed{Q \approx \frac{2\pi}{(1-e^{-2\Lambda})} \approx \frac{1}{2\eta}}$

IV. Ce qu'il faut savoir

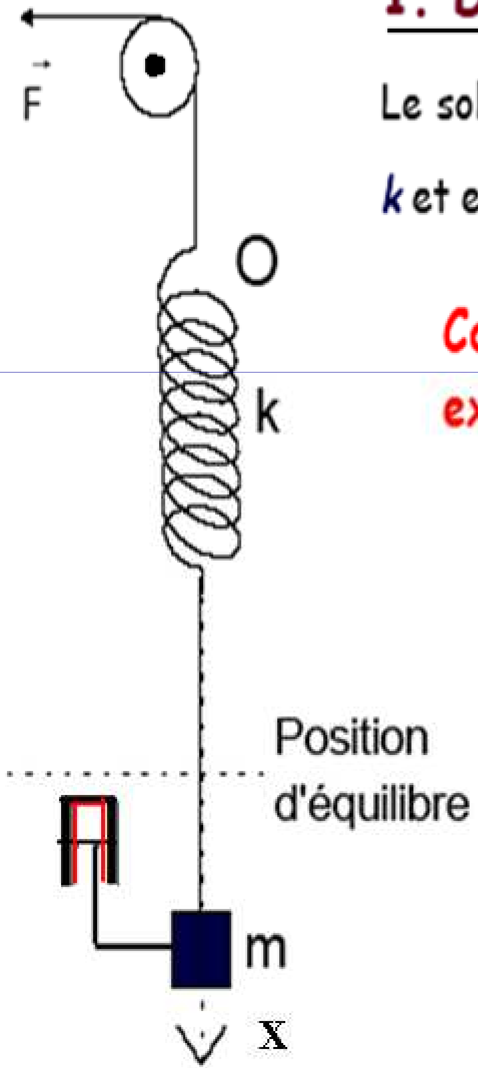
- L'équation différentielle d'un oscillateur amorti est : $\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$
  où λ est un paramètre caractéristique de l'amortissement.
- On distingue 3 régimes :
  - Le régime apériodique : $\lambda > \omega_0$.
  - Le régime apériodique critique : $\lambda = \omega_0$.
  - Le régime pseudopériodique : $\lambda < \omega_0$.
- La solution du régime apériodique, $(\eta = \dfrac{\lambda}{\omega_0} > 1)$ est:

$$x(t) = e^{-\lambda t}(A\cosh(\sqrt{(\lambda^2 - \omega_0^2}\,t) + B\sinh(\sqrt{(\lambda^2 - \omega_0^2}\,t).$$

- La solution du régime apériodique critique, $(\eta = 1)$ est: $x(t) = e^{-\lambda t}(A_1 t + A_2)$
- La solution du régime pseudopériodique, $(\eta < 1)$ est: $x(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi)$ avec $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \eta^2}$
- La décroissance de l'amplitude des oscillations est caractérisée par le décrément logarithmique :
- L'énergie totale d'un oscillateur harmonique amorti décroît en oscillant autour d'une valeur moyenne.
- On appelle **Facteur de Qualité Q** le rapport entre l'énergie mécanique à l'instant t et la perte d'énergie entre les instants t et t+T.

Chapitre IV - Oscillateur Harmonique Forcé

I. Equation du mouvement : exemple du pendule élastique



1. Description du système

Le solide ponctuel de masse ***m*** est suspendu au ressort vertical de raideur ***k*** et est soumis à une force de frottement $\vec{\mathcal{F}} = \alpha \dot{\vec{x}}$.

Comment se comporte t'il lorsqu'on lui applique une force excitatrice sinusoïdale ?

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F_o} \sin(\omega_e t + \varphi)}$$

L'excitation est plus générale qu'il y paraît car une excitation peut se décomposer en une somme d'excitations sinusoïdales par l'analyse de Fourier.

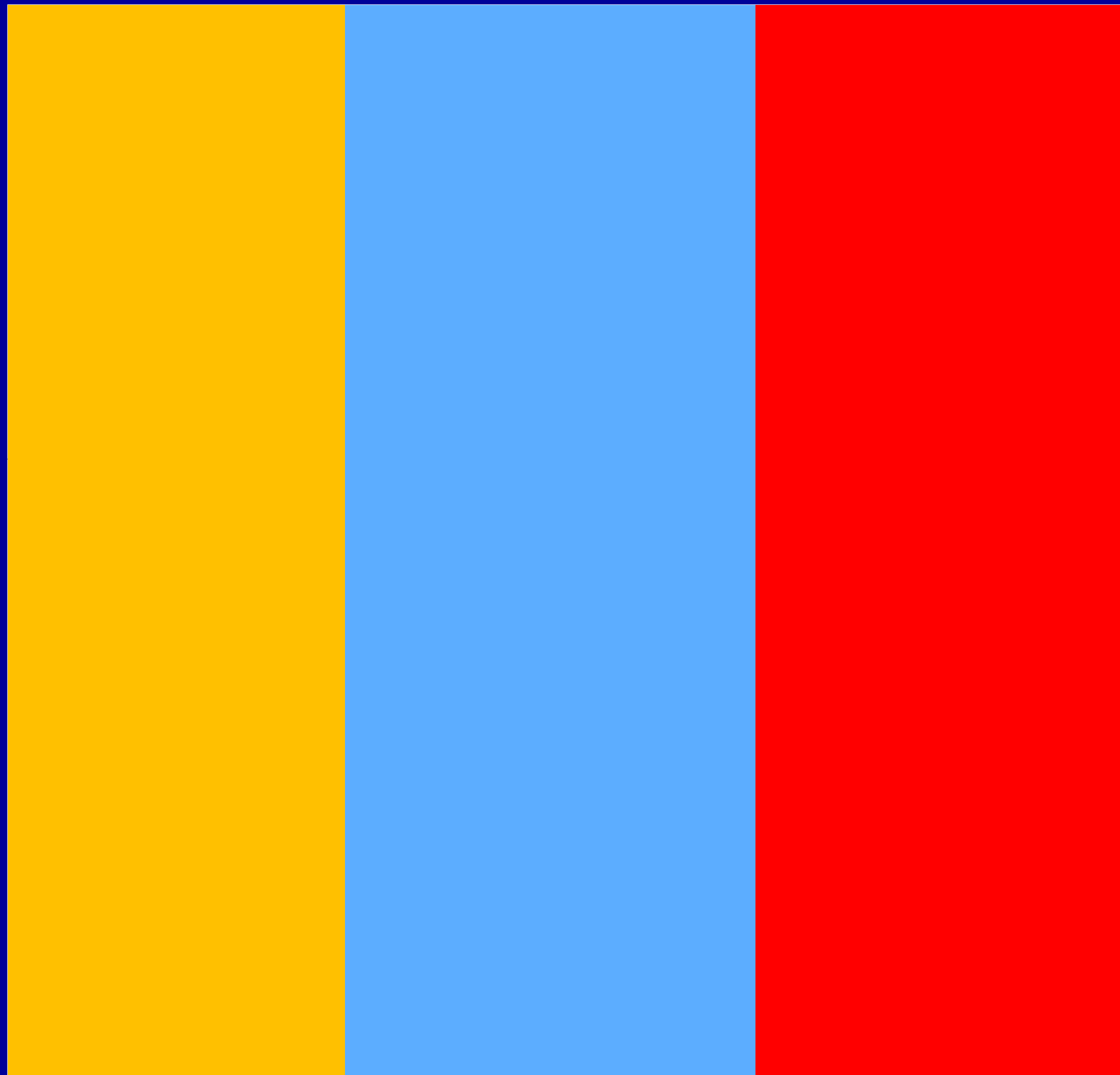
Réponse d'un oscillateur à une force excitatrice pour différentes valeurs de la fréquence d'excitation.

La fréquence naturelle de l'oscillateur est:

$$f_0 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = 1Hz$$

La force excitatrice s'écrit:

$$F = F_0 \cos(2\pi . f . t)$$



2. Mise en équation (frottement fluide (ou visqueux)

On utilise la relation fondamentale de la dynamique : $\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{a}$

$$m\vec{a} = m\ddot{x}\vec{i} = -k(l - l_e)\vec{i} + mg\vec{i} - \alpha\dot{x}\vec{i} + F_0 \cos\omega_E t\,\vec{i}$$

avec $x = l - l_e$

et en prenant l'instant initial t=0 quand la force est maximum (=F_0) et dirigée vers le bas (vers les x positifs).

L'équation devient :

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_E t$$

avec $\lambda = \dfrac{\alpha}{2m}$, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, $A_0 = \dfrac{F_0}{m}$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = A_0 \cos\omega_E t}$$

II. Solution de l'équation différentielle

1. Forme générale

Pendant le **régime transitoire**, la forme générale de la solution de l'équation différentielle est la somme de la solution de l'équation sans second membre et d'une solution particulière.

$$\boxed{x(t) = Ae^{-\lambda t}\cos(\omega\ t + \phi) + X_0\cos(\omega_e t + \varphi_a)}$$

où $\omega\ = \omega_0\sqrt{1-\eta^2}$

- $Ae^{-\lambda t}\cos(\omega\ t + \phi)$ est la solution de l'équation sans second membre. On a vu que cette solution s'amorti et devient négligeable au bout d'un certain temps.

- $X_0\cos(\omega_e t + \varphi_a)$ est la solution particulière, qui correspond au **régime forcé** car l'oscillateur oscille avec la même fréquence que l'excitation. φ_a est le déphasage entre x(t) et la force excitatrice. D'une manière générale, c'est le déphasage entre la « réponse » et l' « excitation ».

2 - Étude du régime Forcé

On utilise la méthode des complexes.

$$x(t) = x_o \cos(\omega_e t + \varphi_a) = \Re_e\left(x_o.e^{j(\omega_e t+\varphi_a)}\right)$$

$$x(t) = \Re_e\left(\overline{x_o}.e^{j\omega_e t}\right)$$

$$\text{avec} \quad \boxed{\overline{x_o} = x_o.e^{j\varphi_a}}$$

amplitude complexe de l'oscillateur

Pour la force d'excitation on obtient :

$$F_E(t) = \Re_e\left(F_o.e^{j\omega_e t}\right)$$

L’équation différentielle appliquée à la solution du régime forcé donne :

$$-\omega_e^2 \overline{x}_o . e^{j\omega_e t} + 2 j\lambda\omega_e . \overline{x}_o . e^{j\omega_e t} + \omega_o^2 \overline{x}_o . e^{j\omega_e t} = A_o e^{j\omega_e t}$$

$$\overline{x}_o \left(\omega_o^2 - \omega_e^2 + 2 j\lambda\omega_e \right) = A_o \quad \Rightarrow \Rightarrow$$

$$\boxed{\overline{x}_o = \frac{A_o}{\left(\omega_o^2 - \omega_e^2 + 2 j\lambda\omega_e \right)}}$$

On pose :

$$\mu = \frac{X_0 \omega_0^2}{A_0}, \qquad \Omega = \frac{\omega_E}{\omega_0} \qquad \text{et} \qquad \eta = \frac{\lambda}{\omega_0}$$

μ est l'amplitude réduite et Ω est la pulsation réduite.

$$\mu\, e^{j\varphi_a} = \mu(\cos\varphi_a + j\sin\varphi_a) = \frac{1}{(1-\Omega^2) + 2j\eta\Omega}$$

L'utilisation de variables réduites rend l'étude plus générale.
Il suffira de connaître les relations entre les grandeurs caractéristiques de cet oscillateur et les variables réduites.

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + 4\eta^2\Omega^2}} \qquad \text{et} \qquad \tan\varphi_a = -\frac{2\eta\Omega}{(1-\Omega^2)}$$

L'amplitude réduite μ et le déphasage φ_a dépendent de la pulsation réduite Ω.

III. Etude de la résonance

L'amplitude réduite μ et le déphasage φ sont des fonctions de la fréquence de l'excitation. On va étudier leurs variations en fonction de la pulsation réduite Ω.

1. Résonance en amplitude

a. Etude de l'amplitude réduite μ

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + 4\eta^2\Omega^2}}$$

On pose $f(\Omega) = (1-\Omega^2)^2 + 4\eta^2\Omega^2$

L'amplitude réduite est extremum quand cette fonction est extremum.

$$\frac{\partial f}{\partial \Omega} = -\ 4\Omega(1-\Omega^2) + 8\eta^2\Omega \ = \ 4\Omega(2\eta^2 + \Omega^2 - 1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \Omega^2} = 4(2\eta^2 + 3\Omega^2 - 1)$$

Si $\eta < \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors $\frac{\partial f}{\partial \Omega}$ s'annule pour $\Omega_e = \sqrt{1-2\eta^2}$.

Pour cette valeur particulière de Ω, la dérivée seconde est positive. L'extremum est un minimum.

- lim μ (Ω→0)=1
- L'amplitude réduite passe donc par un maximum lorsque $\Omega=\Omega_e$. C'est le phénomène de résonance en amplitude.
- La valeur maximale de μ est : $\frac{1}{2\eta\sqrt{1-2\eta^2}} \simeq \frac{1}{2\eta} \simeq Q$

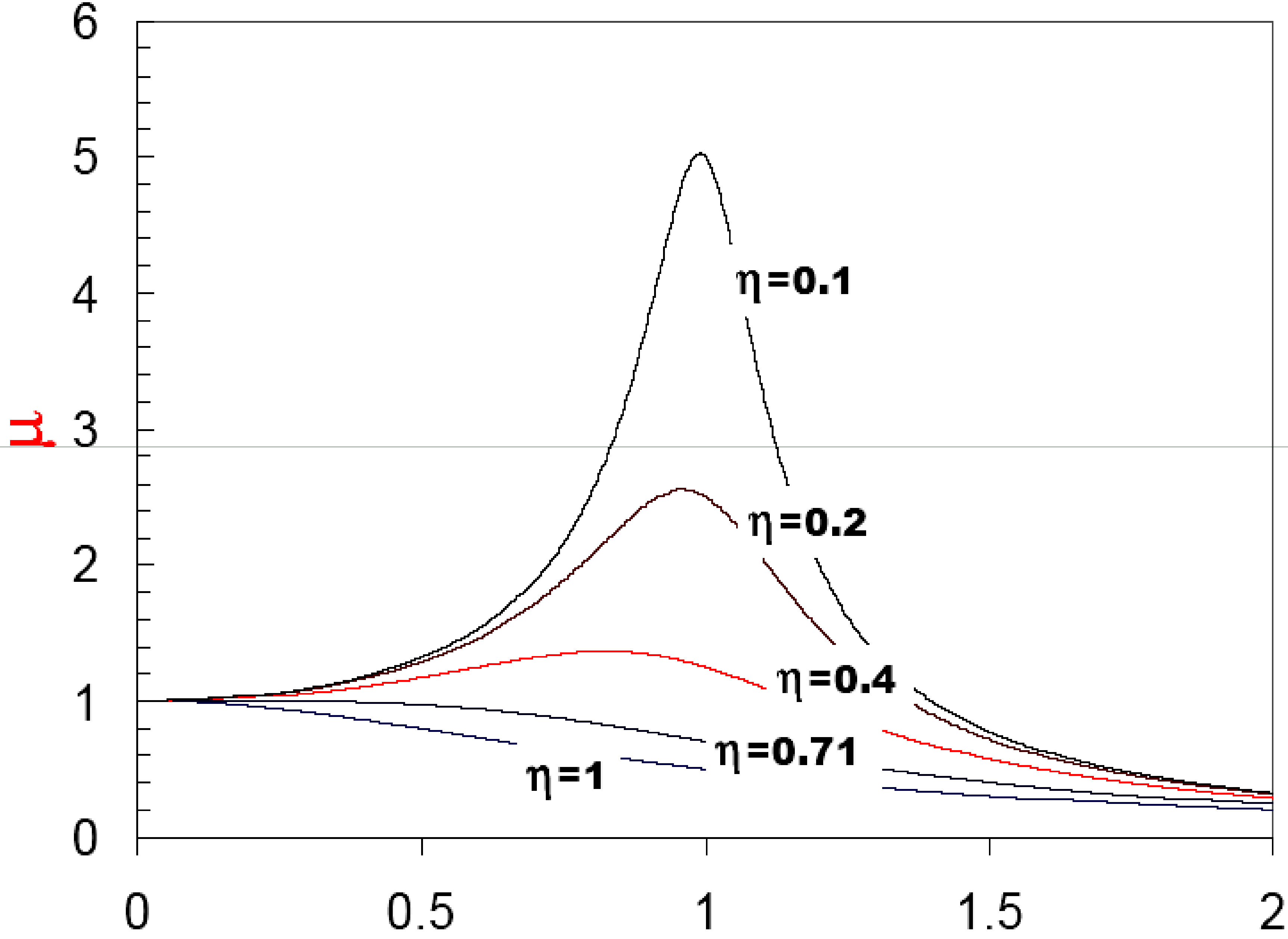
$$Q = 2\pi \frac{E_m(t)}{(E_m(t) - E_m(t+T))} = \frac{2\pi}{(1-e^{-2\lambda T})} \approx \frac{1}{2\eta}$$

Rappel : $\mu = \dfrac{X_0 \omega_0^2}{A_0}$, $\Omega = \dfrac{\omega_E}{\omega_0}$ et $\eta = \dfrac{\lambda}{\omega_0}$

- Le phénomène de résonance n'est observé que si l'amortissement est faible.

  Il faut $\eta < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

- La fréquence de résonance diminue lorsque l'amortissement augmente. Lorsque cet amortissement est supérieur à $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, l'amplitude diminue de façon monotone sans passer par un maximum.



6
5
4
3
2
1
0
μ
0
0.5
1
1.5
2
η=0.1
η=0.2
η=0.4
η=0.71
η=1

b. Etude du déphasage φ_a

φ_a est le déphasage entre x(t) (la réponse) et la force excitatrice (excitation)

$$\tan \varphi_a = -\frac{2\eta\Omega}{(1-\Omega^2)}$$

$$\frac{d\varphi}{d\Omega} = \cos^2\varphi \frac{d(\tan\varphi)}{d\Omega} \quad \text{et} \quad \cos\varphi = \frac{(1-\Omega^2)}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + 4\eta^2\Omega^2}}$$

$$\frac{d\varphi}{d\Omega} = \frac{(1-\Omega^2)^2}{(1-\Omega^2)^2 + 4\eta^2\Omega^2} \times -2\eta \frac{(1+\Omega^2)}{(1-\Omega^2)^2}$$

$$\frac{d\varphi}{d\Omega} = \frac{-2\eta(1+\Omega^2)}{(1-\Omega^2)^2 + 4\eta^2\Omega^2}$$

Ω tend vers 0 : $\tan\varphi_a$ tend vers 0 et $\dfrac{d\varphi}{d\Omega} \approx -2\eta$.

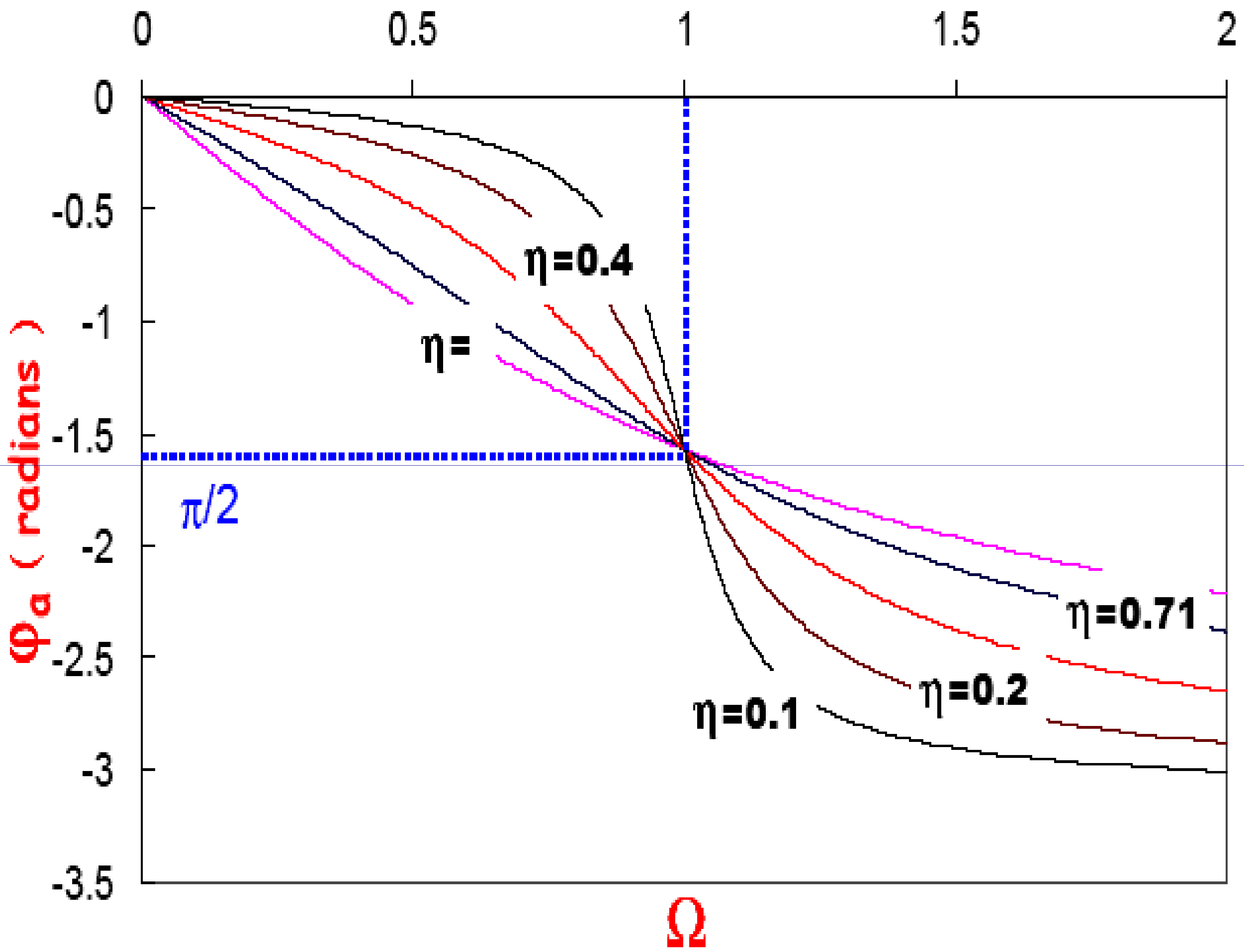
$\varphi_a = 0 \Longrightarrow$ Le déplacement de l'oscillateur est en phase avec l'excitation

Ω tend vers 1 : $\tan\varphi_a$ tend vers -∞ et $\dfrac{d\varphi}{d\Omega} \approx -\dfrac{1}{\eta}$.

$\varphi_a = -\dfrac{\pi}{2} \Rightarrow$ Le déplacement de l'oscillateur est en avance de π/2 sur l'excitation (quadrature de phase).

Ω tend vers ∞ : $\tan\varphi_a$ et $\dfrac{d\varphi}{d\Omega}$ tendent vers 0. Puisque $\dfrac{d\varphi}{d\Omega}$ est toujours <0, le déphasage est de-π.

$\varphi_a = -\pi \Rightarrow$ Le déplacement de l'oscillateur est en avance de π sur l'excitation (opposition de phase).



0
0.5
1
1.5
2
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-3.5
φa (radians)
η=0.4
η=
π/2
η=0.71
η=0.2
η=0.1
Ω

2. Résonance en vitesse

$$x(t) = X_0 \cos(\omega_E t + \varphi_a)$$

$$\dot{x}(t) = -\omega_E X_0 \sin(\omega_E t + \varphi_a) = \omega_E X_0 \cos(\omega_E t + \varphi_a + \frac{\pi}{2}) = V_0 \cos(\omega_E t + \varphi_v)$$

$V_0 = \omega_E X_0$ et $\varphi_v = \varphi_a + \pi/2$

On peut donc déduire les variations de V_0 et de φ_v à partir de l'étude précédente.

a. Etude de V_0

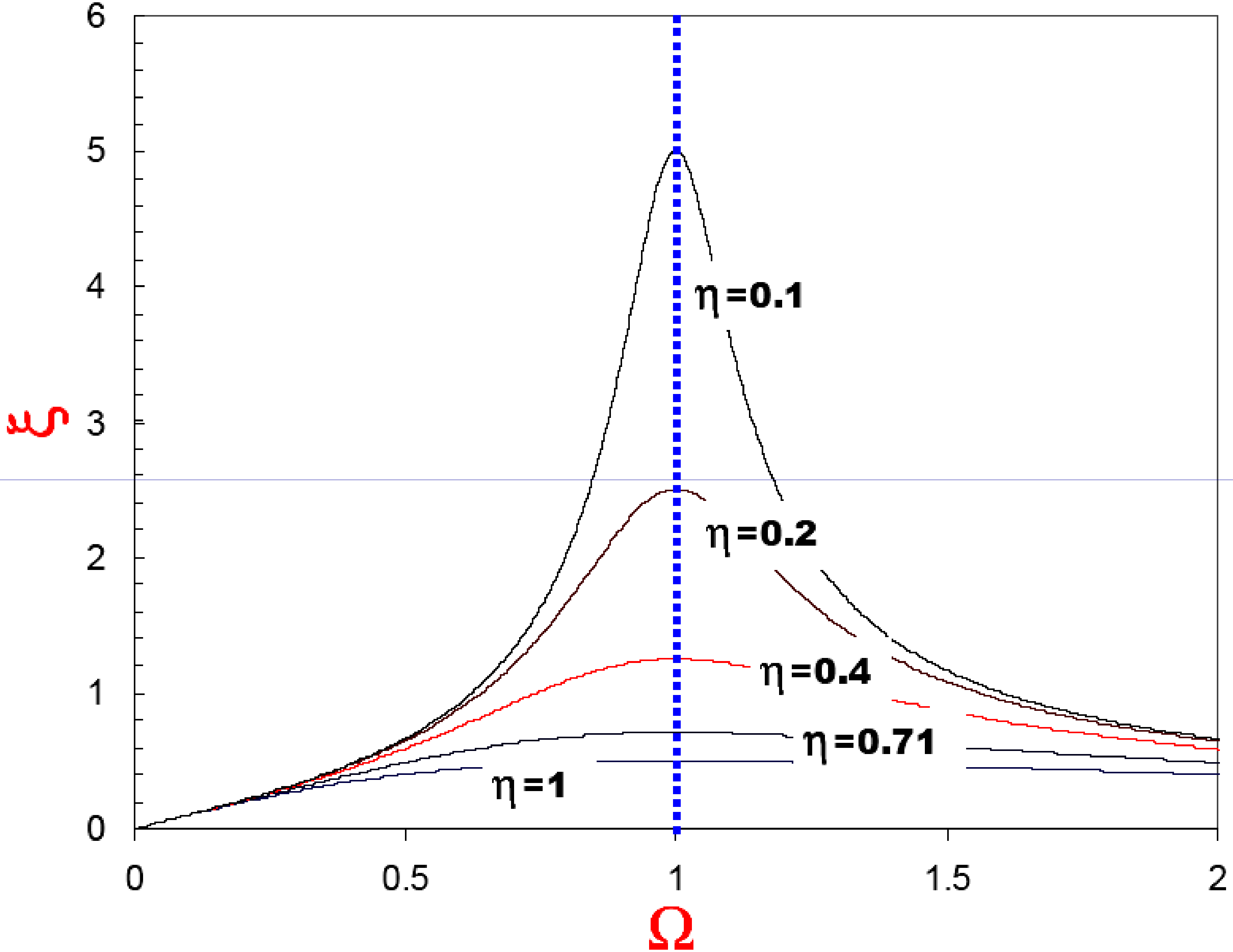
$V_0 = \omega_E X_0$ On peut utiliser la grandeur réduite $\xi = \Omega \times \mu$

$$\xi = \frac{\Omega}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + 4\eta^2\Omega^2}}$$

$$V_0 = \xi \frac{F_0}{m\omega_0}$$

En divisant par Ω, on obtient

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{\Omega} - \Omega)^2 + 4\eta^2}}$$



6
5
4
3
2
1
0
ξ
0
0.5
1
1.5
2
Ω
η=0.1
η=0.2
η=0.4
η=0.71
η=1

b. Etude de φ_v

On rajoute $\pi/2$ au déphasage φ_a.

Ω tend vers 0 :

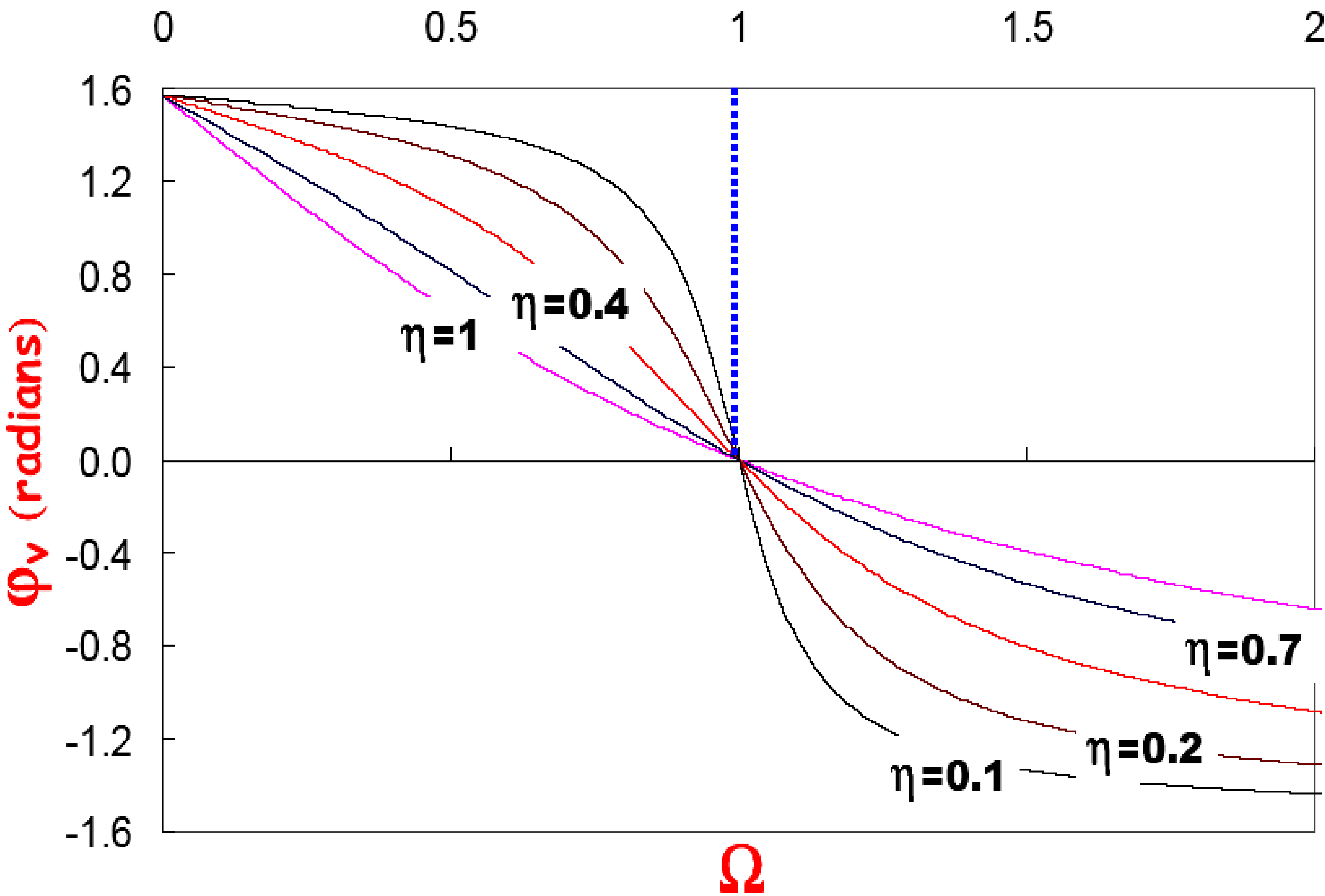
$\varphi_v = \frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ La vitesse de l'oscillateur est en retard de $\pi/2$ sur) avec l'excitation (quadrature de phase).

Ω tend vers 1 :

$\varphi_a = 0$ $\Rightarrow$ La vitesse de l'oscillateur est en phase avec l'excitation.

Ω tend vers ∞ :

$\varphi_a = -\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow$ La vitesse de l'oscillateur est en avance de $\pi/2$ sur l'excitation (quadrature de phase).



0
0.5
1
1.5
2
1.6
1.2
0.8
0.4
0.0
-0.4
-0.8
-1.2
-1.6
φ_v (radians)
Ω
η=1
η=0.4
η=0.7
η=0.2
η=0.1

III. Etude énergétique en régime permanent

1. Expression de la puissance instantanée

On appelle p(t) la puissance fournie à l'oscillateur par l'excitateur.
En électricité : p(t)=u(t) × i(t)

En mécanique : p(t)=F(t) × v(t)

$$F(t) = F_0 \cos\omega_E t,\ \ x(t) = X_0 \cos(\omega_E t + \varphi_a),\ \ \dot{x}(t) = -\omega_E X_0 \sin(\omega_E t + \varphi_a)$$

$$p(t) = -\omega_E F_0 X_0 \sin(\omega_E t + \varphi_a) \times \cos\omega_E t$$

$$p(t) = -\frac{\mu}{m}\frac{\omega_E}{\omega_0^2} F_0^2 \sin(\omega_E t + \varphi_a) \times \cos\omega_E t \text{ avec } \mu = \frac{X_0\omega_0^2}{A_0}$$

$$p(t) = -\frac{\mu F_0^2}{m\omega_0}\Omega \sin(\omega_E t + \varphi_a) \times \cos\omega_E t \text{ avec } \Omega = \frac{\omega_E}{\omega_0}$$

$$p(t) = -\frac{\mu\eta F_0^2}{\alpha}\Omega\left[\sin(2\omega_E t + \varphi_a) + \sin\varphi_a\right] \text{ avec } \eta = \frac{\alpha}{2m\omega_0}$$

La puissance fournie à l'oscillateur varie périodiquement autour d'une valeur moyenne.

2. Expression de la puissance moyenne

$$P_m = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)\,dt = -\frac{\eta F_0^2}{\alpha}\Omega\times\mu\sin\varphi_a$$

On a vu lors de l'étude de l'amplitude que :

$$\mu(\cos\varphi_a + j\sin\varphi_a) = \frac{1}{(1-\Omega^2)+2j\eta\Omega}$$

soit $\sin\varphi_a = -\dfrac{2\eta\Omega}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2+4\eta^2\Omega^2}} = -2\mu\eta\Omega = -2\eta\xi$

$$\boxed{P_m = -\frac{\eta F_0^2}{\alpha}\Omega\times\mu\;\frac{2\eta\Omega}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2+4\eta^2\Omega^2}}}$$

avec $\xi = \Omega\mu$, la vitesse réduite.

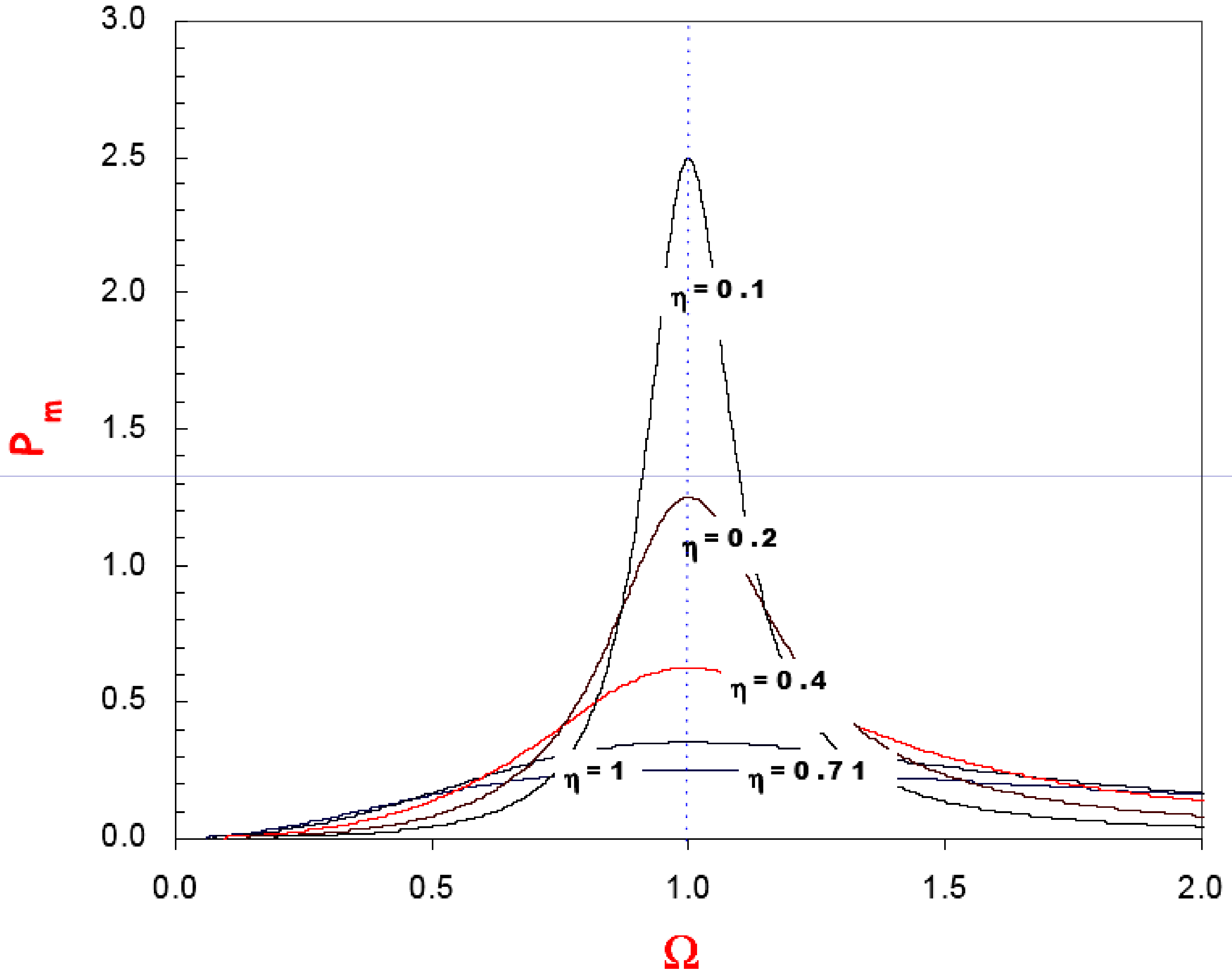
$$\boxed{P_m = \frac{F_0^2}{\alpha} 2\eta^2\xi^2}$$

En utilisant $V_0 = 2\eta \frac{F_0}{\alpha} \xi$, on voit que

$$\boxed{P_m = \frac{1}{2}\alpha V_0^2}$$

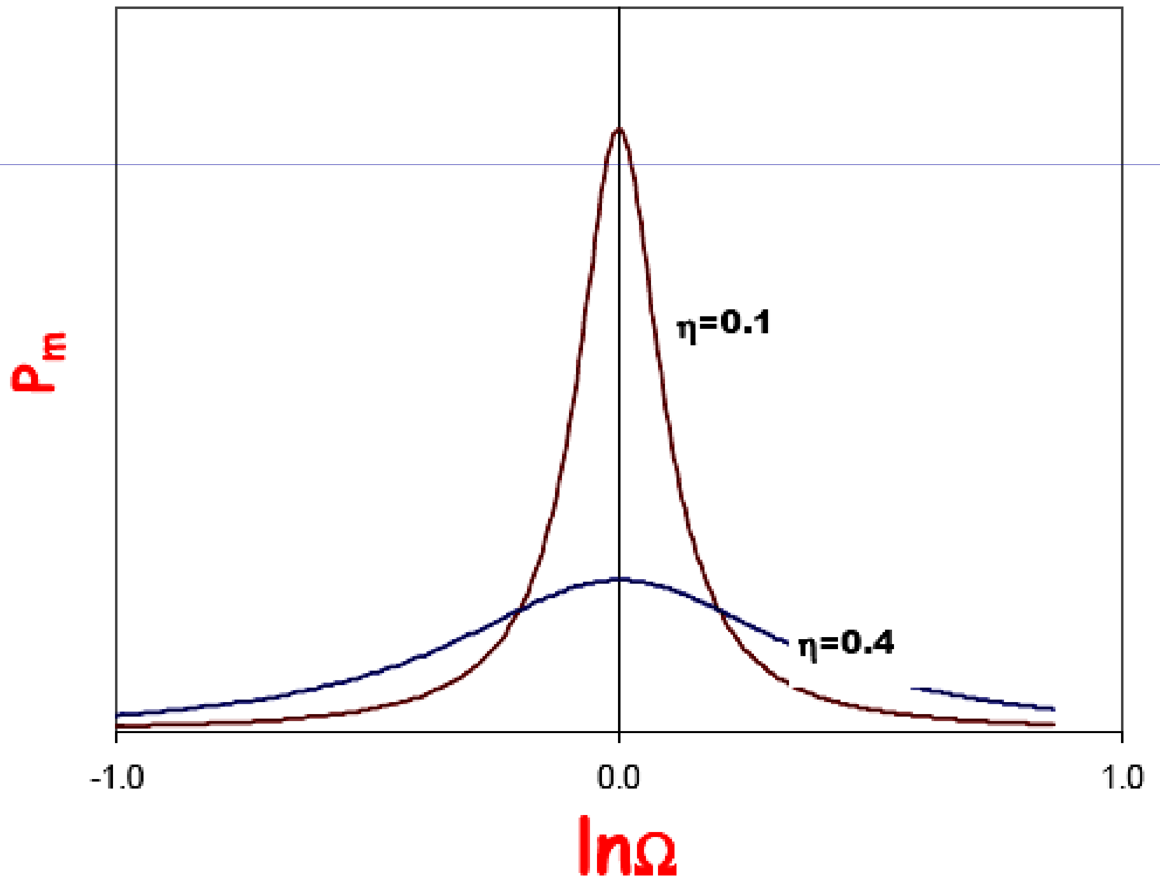
en électricité $P_m = \frac{1}{2} R I_0^2$

- La puissance moyenne fournie par l'excitateur est entièrement dissipée par l'amortissement.
- La puissance moyenne est maximum quand V_0 (ξ) est maximum, c'est à dire à la résonance de vitesse.


3.0
2.5
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
P_m
η = 0.1
η = 0.2
η = 0.4
η = 1
η = 0.71
0.0
0.5
1.0
1.5
2.0
Ω

Si on trace la puissance moyenne en fonction de $\Psi=\ln\Omega$, on obtient une expression symétrique autour de $\Psi=0$.

$$P_m = \frac{P_{max}}{1+Q^2(\frac{1}{\Omega}-\Omega)^2} = \frac{P_{max}}{1+Q^2(e^{\Psi}-e^{-\Psi})^2} = \frac{P_{max}}{1+4Q^2\sinh^2\Psi}$$



3. Acuité de la résonance

On appelle résonance le phénomène physique associé à l'égalité de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur et de la pulsation ω_E de l'excitateur avec lequel il interagit.

RESONANCE $\Rightarrow \omega_E = \omega_0 \;\; \rightarrow \Omega = 1$

Dans le cas des faibles amortissements, on peut écrire la puissance moyenne en fonction du facteur de qualité $Q \approx \dfrac{1}{2\eta}$.

$$P_m = \frac{F_0^2}{\alpha} 2\eta^2 \xi^2 = \frac{F_0^2}{2\alpha} \frac{\xi^2}{Q^2}$$

$$\xi^2 = \frac{1}{(\frac{1}{\Omega} - \Omega)^2 + 4\eta^2} = \frac{1}{(\frac{1}{\Omega} - \Omega)^2 + \frac{1}{Q^2}}$$

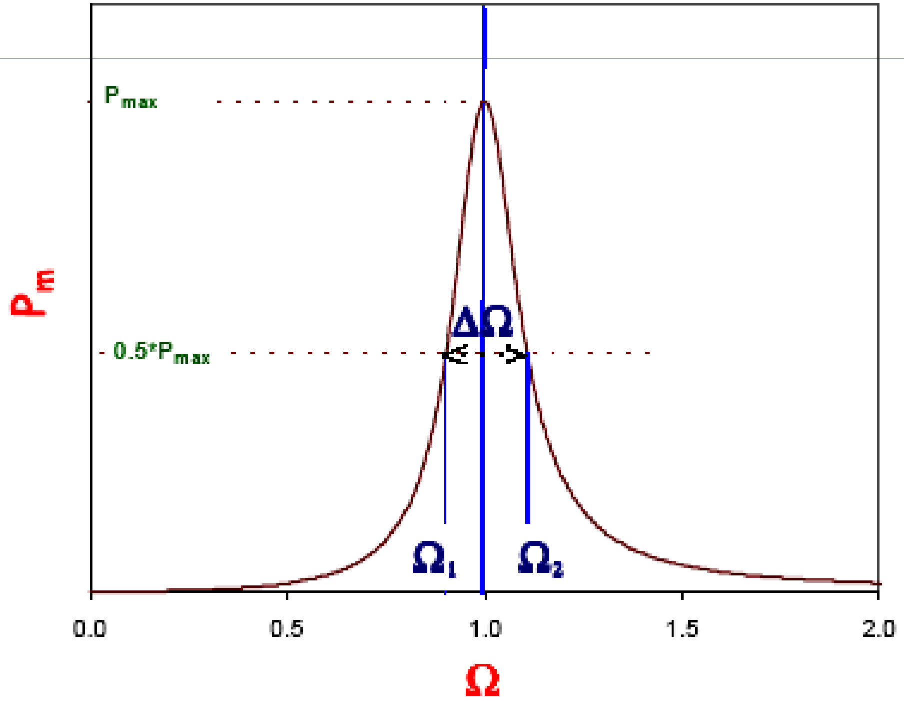
$$P_m = \frac{F_0^2}{2\alpha} \frac{1}{1 + Q^2(\frac{1}{\Omega} - \Omega)^2} = \frac{P_{max}}{1 + Q^2(\frac{1}{\Omega} - \Omega)^2}$$

avec $P_{max} = \dfrac{F_0^2}{2\alpha}$

L'acuité de la résonance ou finesse de résonance est définie comme la largeur du pic de puissance à mi-hauteur.

On doit donc avoir $1+Q^2(\frac{1}{\Omega}-\Omega)^2=2$, ce qui conduit à l'équation $(\frac{1}{\Omega}-\Omega)^2=\frac{1}{Q^2}$ qui possède deux solutions Ω_1 et Ω_2.

Si Ω_1 est solution, on remarque que $1/\Omega_1$ est aussi solution. Donc $\Omega_2=1/\Omega_1$.



Ce qui implique que $(\frac{1}{\Omega}-\Omega)$ est égal à la différence entre les deux solutions et donc à la largeur à mi-hauteur.

$$\Delta\Omega=\frac{1}{Q}\Rightarrow\Delta\omega=\frac{\omega_0}{Q}$$

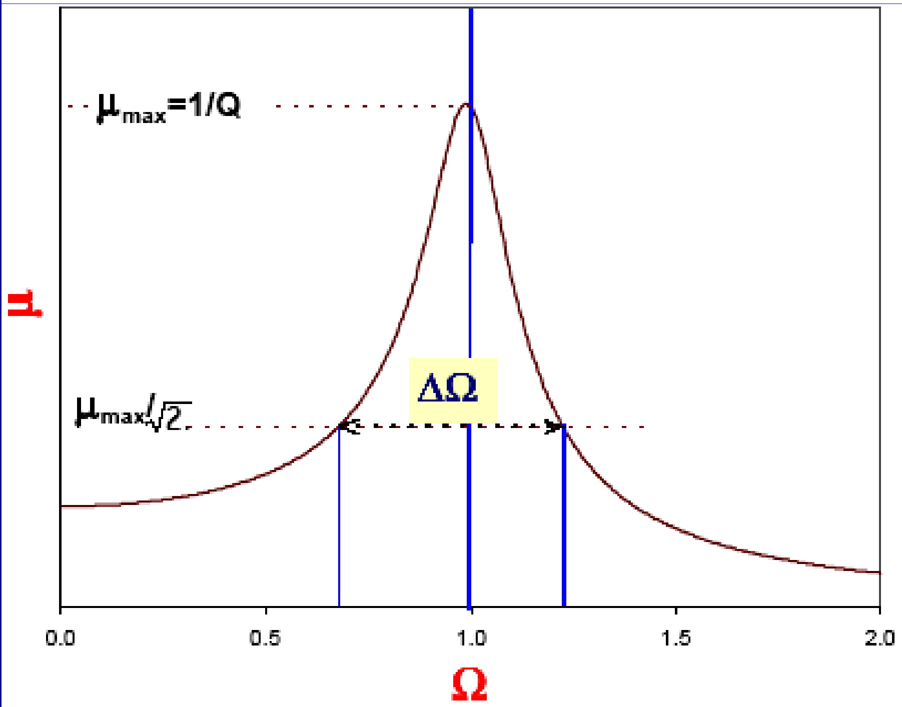
La finesse de la résonance est inversement proportionnelle au facteur de qualité Q.

Remarques :

On définit quelquefois la bande passante comme le domaine de pulsation dans lequel l'amplification μ reste supérieure à une fraction déterminée de sa valeur. On choisit souvent un affaiblissement à 3 db, c'est à dire que l'amplitudes est divisée par $\sqrt{2}$.

$$20\ \lg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3$$

$$\mu = \frac{Q}{\sqrt{Q^2(1-\Omega^2)^2 + \Omega^2}}$$



$$\Rightarrow Q^2(1-\Omega^2)^2 + \Omega^2 = 2$$

Dans le cas des faibles amortissements, la résonance est aiguë et on peut écrire que Ω=1+ε où ε est un infiniment petit.

$$\Omega^2 \simeq 1 + 2\varepsilon$$

$$4\varepsilon^2 Q^2 + 1 + 2\varepsilon \simeq 2 \qquad 4\varepsilon^2 Q^2 + 2\varepsilon \simeq 1$$

$$4\varepsilon^2 Q^2 \simeq 1 \qquad \varepsilon \simeq \pm\frac{1}{2Q}$$

Si l'amortissement est faible, la bande passante à -3db est $\sim \frac{1}{Q}$

IV. Ce qu'il faut savoir

- L'équation différentielle du 2e ordre qui régit le mouvement d'un oscillateur a la forme suivante quand la dissipation d'énergie résulte d'un frottement fluide.

$$\ddot{x}+\frac{\alpha}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=\frac{F_0}{m}\cos\omega_E t$$

- Après le régime transitoire, le système oscille avec une pulsation égale à celle de l'excitation. $X_0\cos(\omega_E t+\varphi_a)$

- On définit des paramètres sans dimension qui permettent d'obtenir des formules utilisables dans de nombreux domaines de la physique.

- L'amplitude et le déphasage sont des fonctions de la pulsation réduite Ω : $\mu=\dfrac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2+4\eta^2\Omega^2}}$ et $\tan\varphi_a=-\dfrac{2\eta\Omega}{(1-\Omega^2)}$

- La résonance d'amplitude se produit si le facteur d'amortissement réduit est faible $\eta<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

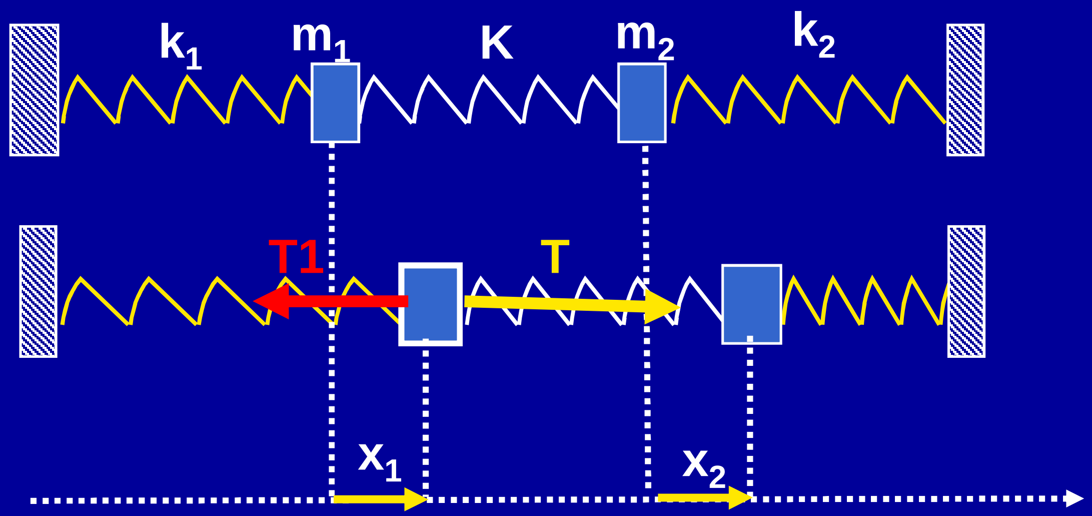
- La fréquence de résonance en amplitude est proche de la fréquence propre du système mais décroît quand l'amortissement augmente : $\Omega_e=\sqrt{1-2\eta^2}$.

- Le déphasage entre le déplacement et l'excitation varie entre 0 et $-\pi$. Il vaut $-\pi/2$ quand la pulsation de l'excitation est égale à la pulsation propre du circuit.
- Quel que soit l'amortissement, la résonance en vitesse se produit quand la fréquence de l'excitation est égale à la fréquence propre et la vitesse est alors en phase avec l'excitation.
- L'étude de la résonance en impédance permet de faire l'analogie avec le circuit RLC en électricité et peut être étudiée en utilisant la notation de Fresnel.
- La puissance fournie à l'oscillateur varie périodiquement autour d'une valeur moyenne.
- La puissance moyenne fournie par l'excitateur est entièrement dissipée par l'amortissement.
- La puissance moyenne est maximum quand V_0 (ξ) est maximum, c'est à dire à la résonance de vitesse.
- L'acuité de la résonance ou finesse de résonance est définie comme la largeur du pic de puissance à mi-hauteur.
- La finesse de la résonance est inversement proportionnelle au facteur de qualité Q.

Chapitre V -
Oscillateurs Harmoniques couplés

Considérons deux oscillateurs harmoniques de longueur à vide l et de raideurs k_1 et k_2 reliés par un ressort de longueur L et de raideur K.

On désigne par x_1 et x_2 les déplacements respectifs de m_1 et m_2 par rapport à leurs positions d'équilibre.



Considérons la masse m_1 : elle est soumise aux tension $\mathbf{T_1}$ du ressort k_1 et **T** due au ressort K.

$$T_1 = -k_1.x_1 \qquad\qquad T = +k_2(x_2 - x_1)$$

•**Action du ressort k_1**: son allongement étant x_1, il exerce sur m_1 une force

$$T_1 = \varepsilon.\ k_1.x_1 \quad (\varepsilon=+/-1)$$

- Si $x_1>0$ le ressort k_1 est allongé. Il va chercher à se raccourcir en exerçant sur m_1 une force T_1 dirigée vers la gauche. T_1 sera négatif et $\varepsilon = -1$. Donc $T_1 = -k_1.x_1$

- Si $x_1 < 0$ le ressort k_1 est comprimé. Il va chercher à s'allonger en exerçant sur m_1 une force dirigée vers la droite. $T_1 > 0$ et $x_1 < 0$ ➔ $\varepsilon = -1$ l'expression est la même: $T_1 = -k_1.x_1$

•**Action du ressort K** : son allongement étant $(x_2 - x_1)$ il exerce sur m_1 une force

$$T = \varepsilon\, K.(x_2 - x_1).$$

- Si $(x_2 - x_1) > 0$, le ressort K est étiré et va chercher à se raccourcir en exerçant sur m1 une force dirigée vers la droite. T est positif et donc $\varepsilon = +1$.

  $$T = +K\,(x_2 - x_1)$$

- Si $(x_2 - x_1) < 0$ le ressort K est comprimé. Il va chercher à s'allonger en repoussant m1. La force T_2 est dirigée vers la gauche. $T < 0$ et $(x_2 - x_1) < 0$ ➔ $\varepsilon = +1$. L'expression est la même.

Mise en équation :

Le PFD appliqué à m_1 donne la relation : $\boxed{m_1.\ddot{x}_1 = -k_1.x_1 + K(x_2 - x_1)}$

- **Masse m_2:** Sachant qu'elle subit la tension du ressort K et celle du ressort k_2, le même raisonnement conduit à la relation:

$$\boxed{m_2.\ddot{x}_2 = -k_2.x_2 - K(x_2 - x_1)}$$

- ## 1) Cas du couplage d'oscillateurs symétriques.

Les deux oscillateurs reliés par le ressort K sont **identiques:**

$m_1 = m_2 = m$ et $k_1 = k_2 = ko$.

Le système devient :

$$\begin{cases} m.\ddot{x}_1 = -k_0.x_1 + K(x_2 - x_1) & (1) \\ m.\ddot{x}_2 = -k_0.x_2 - K(x_2 - x_1) & (2) \end{cases}$$

Résolution:

- en posant $S = (x_1 + x_2)$ et $D = (x_1 - x_2)$ on obtient les deux équations découplées suivantes:

$$m.\ddot{S} = -k_0.S \quad \textbf{et} \quad m.\ddot{D} = -(k_0 + 2K).D$$

- Les solutions de ces équations sont:

$$S = S_o \cos(\omega_1 t + \varphi) \qquad \textbf{et} \qquad D = D_o \cos(\omega_2 t + \phi)$$

$$\text{avec} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k_0}{m}} \quad ; \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_0 + 2K}{m}}$$

Sachant que $x_1 = (S+D)/2$ et $x_2 = (S - D)/2$ on obtient finalement :

$$x_1 = \frac{S_o}{2}\cos(\omega_1 t + \varphi) + \frac{D_o}{2}\cos(\omega_2 t + \phi)$$

$$x_2 = \frac{S_o}{2}\cos(\omega_1 t + \varphi) - \frac{D_o}{2}\cos(\omega_2 t + \phi)$$

Modes propres

Remarque : *les oscillations couplées $x_1(t)$ et $x_2(t)$ ne sont en général pas sinusoïdales*

(la somme ou la différence de deux fonctions sinusoïdales de fréquences différentes n'est pas une fonction sinusoïdale)

Définition: On appelle **mode propre** du système couplé un mode d'oscillation pour lequel tous les paramètres ont des **mouvements sinusoïdaux de même pulsation**

-Si $D_o = 0$, alors $x_1(t) = x_2(t) = S_o/2.\cos(\omega_1 t + \varphi)$.

Les deux oscillateurs oscillent en phase, avec la même pulsation et la même amplitude: c'est le premier mode propre ou mode propre symétrique.

-Si $S_o = 0$, alors $x_1(t) = - x_2(t) = D_o/2.\cos(\omega_2 t + \phi)$.

Les deux oscillateurs oscillent en opposition de phase, avec la même pulsation et la même amplitude. C'est le deuxième mode propre ou mode propre antisymétrique

Remarque:

En général, il y a autant de modes propres et de pulsations propres (c.a.d de pulsations pour lesquelles tous les oscillateurs sont en phase) que d'oscillateurs.

2) Oscillateurs couplés dissymétriques

Les équations différentielles

$$m_1.\ddot{x}_1 = -k_1.x_1 + K(x_2 - x_1) \quad \textbf{et} \quad m_2.\ddot{x}_2 = -k_2.x_2 - K(x_2 - x_1)$$

Peuvent être mise sous la forme plus générale:

$$\boxed{\begin{cases} \ddot{x}_1 + a_1.x_1 = b_1.x_2 \\ \ddot{x}_2 + a_2.x_2 = b_2.x_1 \end{cases}}$$

a) Équations aux pulsations propres:

Les modes propres sont les solutions particulières du système qui sont sinusoïdales et de même pulsation ω, c.a.d

$$x_1(t) = \bar{A}_1.e^{i\omega t} \quad \textbf{et} \quad x_2(t) = \bar{A}_2.e^{i\omega t}$$

En reportant ces solutions particulières dans le système d'équations:

•On obtient :

$$\begin{cases}(-\omega^2+a_1)\bar{A}_1-b_1\bar{A}_2=0\\ -b_2\bar{A}_1+(-\omega^2+a_2)\bar{A}_2=0\end{cases}$$

Qui n'a de solution non nulle que si le déterminant des coefficients de A_1 et A_2 est nul, c'est-à-dire:

$$\boxed{(-\omega^2+a_1)(-\omega^2+a_2)-b_1b_2=0}$$

C'est l'équation aux pulsations propres

Cette équation en ω fournit les deux solutions ω_1 et ω_2 acceptables (c.a.d positives) , pulsations propres du système dissymétrique couplé

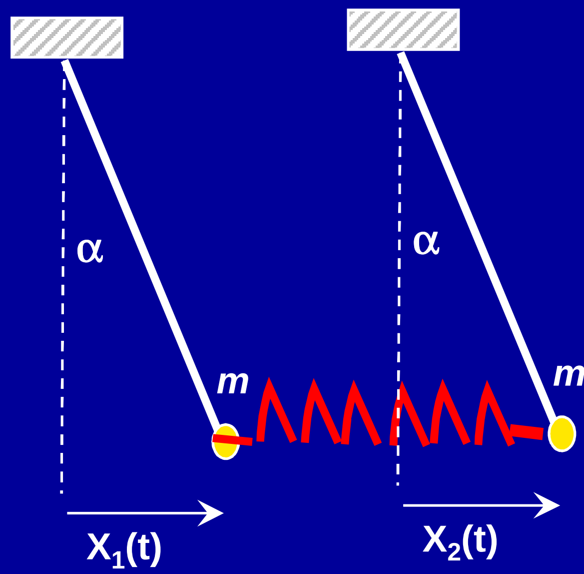
Pour $\omega=\omega_1$: les deux oscillateurs oscillent en phase

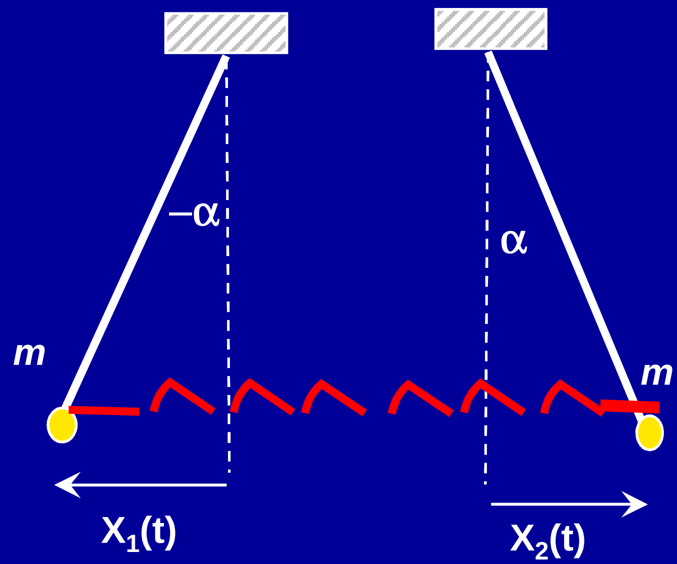
Pour $\omega=\omega_2$: les deux oscillateurs oscillent en opposition de phase

Mais toujours avec des amplitudes différentes

- Exemples d'oscillateurs couplés

- **Pendules simples**

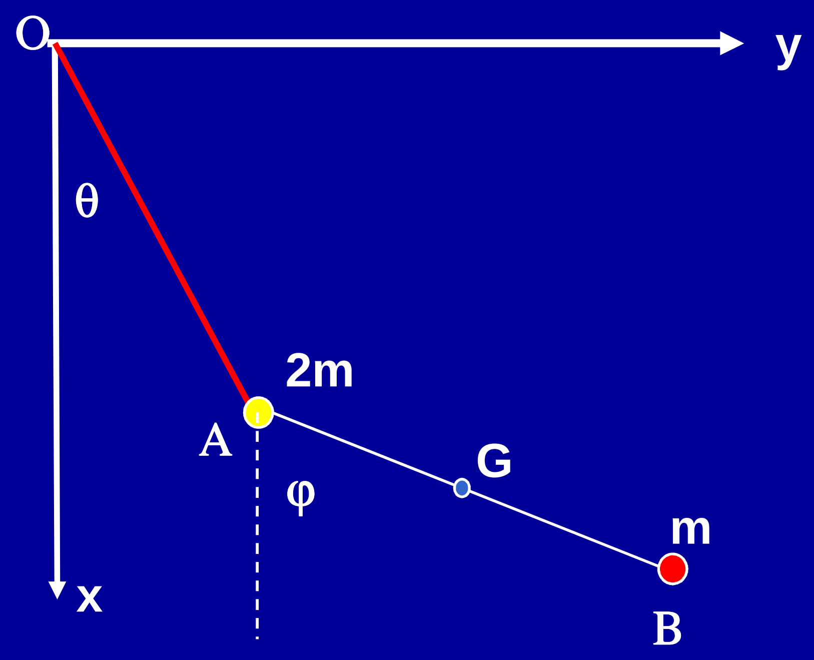




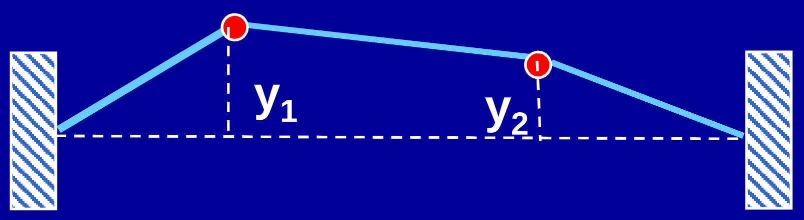
1er mode propre (ω_1)
$X_1(t) = x_2(t)$

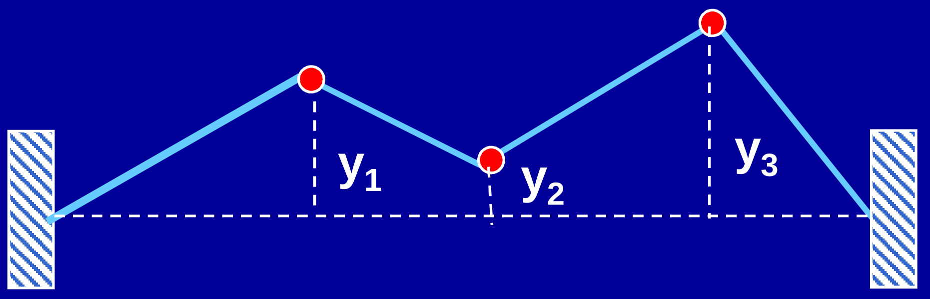
2eme mode propre (ω_2)
$X_1(t) = - x_2(t)$

- **Pendule double**



- **Corde plombée**





FIN « Vibrations »

RAPPELS :
Transformée de Fourier

1) Développement d'une fonction périodique en série de Fourier

<u>Théorème</u> : **Toute fonction périodique *f(t),* de période T, bornée, est équivalente à une somme infinie de sinusoïdes de fréquences f=n/T, n étant un entier appelé « harmonique »**

$$f(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.\cos(2\pi.nft) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.\sin(2\pi.nft)$$

$$f(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t \right]$$

En posant $c_n^2 = a_n^2 + b_n^2$ et $\varphi_n = -\mathrm{Arctg}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$ **Cn>0**

$$f(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

On calcule les coefficients de Fourier par:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t).dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t).\cos(n\omega t).dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t).\sin(n\omega t).dt$$

Remarque : si *f(t)* paire ➔ bn = 0
si *f(t)* impaire ➔ an = 0

L'ensemble des valeurs a_n**,** b_n ***ou*** C_n **constitue le spectre de la fonction** *f* les termes a_0; $a_n.\cos(n\omega t)$; $b_n.\sin(n\omega t)$

sont les composantes de Fourier de f

-La composante n = 1 est la composante *fondamentale*.

-Les autres, n = 2 , 3 ..... sont les *Harmoniques*

En coordonnées spatiales (x) le D.S.F de $h(x)$ s'écrit:

$$\boxed{h(x) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n.\cos(nkx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.\sin(nkx)}$$

avec $k = 2\pi/\lambda$ vecteur d'onde

Identité de Parseval: $$\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t).dt = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n^2}{2}$$

2) Transformée de Fourier

- Toute fonction f est décomposable en une somme infinie et continue de fonctions sinusoïdales:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} c(\omega) \cos\left[\omega t + \varphi(\omega)\right] d\omega$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega=-\infty}^{+\infty} F(\omega).\exp(j\omega t).d\omega$$

où $F(\omega)$ est la Transformée de Fourier de f :

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=-\infty}^{+\infty} f(t).\exp(-j\omega t).dt$$

On voit que f est la Transformée Inverse de F