

MECANIQUE QUANTIQUE

Chapitre 1: Bases de la mécanique quantique

Pr. M. ABD-LEFDIL

Université Mohammed V- Agdal

Faculté des Sciences

Département de Physique, LPM

Année universitaire 2007-08

Filières SM 3-SMI 3



1

Introduction générale

A la fin du 19ème siècle, les objets physiques qui constituent l'univers étaient classés en deux catégories : la matière et le rayonnement

a- La matière est faite de particules assimilables à des points matériels doués d'une masse, auxquels s'appliquent les lois de la mécanique classique. Cette mécanique s'applique correctement aux corps célestes, aux solides de dimensions macroscopiques (voir cours de SMI 1 et 3) ainsi qu'à la théorie cinétique des gaz (cours de thermodynamique).

b- Le rayonnement est constitué par des ondes électromagnétiques qui se propagent selon les équations de Maxwell.

Tous les phénomènes physiques, comme par exemple l'optique géométrique et les interférences, connus à l'époque trouvaient leurs explications dans cette théorie de Maxwell. Les ondes radioélectriques, découvertes par Hertz, montre la parfaite concordance entre l'optique et l'électricité.

2

- Vers le début du 20ème siècle (vers 1902 période de préparation de la thèse d'Einstein) deux grands problèmes se posèrent :

1- Comment déduire de la théorie électromagnétique les lois du mouvement des particules chargées?

2- Les expérimentateurs se trouvaient confrontés à un certain nombre d'énigmes (rayonnement du corps noir, effet photoélectrique ...) que les théories présentes à l'époque ne permettaient pas de résoudre.

- **PERSONNE** n'était capable d'expliquer ces phénomènes. Ces expériences révèlent indirectement les propriétés et la structure de la matière, lorsqu'on la scrute sur des dimensions extrêmement petites, beaucoup plus petites que ne le permettaient les observations directes.

3

- Ce fût le physicien Max Planck, le 25-10-1900, qui jeta les bases de la théorie quantique. Avant Planck, les physiciens voyaient le monde et la nature sous forme de continuum: Les grandeurs physiques telles que (l'énergie, la quantité de mouvement, le moment cinétique...) étaient des grandeurs continues pouvant prendre n'importe quelle valeur.

- Fondamentalement, l'hypothèse de Planck revient à substituer à cette vision continue du monde une vision discontinue. Mais la discrétisation des quantités physiques se fait par sauts si minimes que le caractère continu du monde ne peut être perçu par nos sens.

4

■ Exemple:

Lorsqu'on observe de loin un tas de blé, nous pensons qu'il s'agit d'un monticule lisse et continu. Si nous nous en approchons, nous reconnaissons notre erreur et distinguons les minuscules grains qui le composent. Ces grains discrets sont les quantas du tas de blé. Cet exemple bien que simple, peut être étendu à la matière lorsqu'on la scrute à l'échelle corpusculaire où l'énergie est aussi quantifiée (extrait du livre de Heinz Pagels « L'univers quantique »).

Rayonnement du corps noir

- Par définition un corps noir est un objet qui absorbe intégralement les radiations reçues. Une cavité fermée percée d'une très petite ouverture constitue une réalisation pratique d'un corps noir. Les radiations qui entrent dans la cavité se réfléchissent sur les parois et s'absorbent plus ou moins à chaque réflexion. L'énergie qui peut ressortir est négligeable. Un corps noir en équilibre thermique émet autant d'énergie qu'il en reçoit.

EX: -Un four fermé et isolé thermiquement constitue un corps noir en équilibre.

- Prenons un objet solide, par exemple une barre métallique, et plaçons la dans une pièce obscure. Ce métal constitue un corps noir car il sera invisible.

Par contre, si nous chauffons ce métal et le portons à une température assez élevée, il cesse d'être noir et émet une couleur rouge (ou même blanche) selon la température du chauffage. Le rayonnement émis par un corps chauffé enfermé dans une pièce obscure correspond à une certaine répartition de couleur que l'on peut observer:

On parle ainsi de la courbe du rayonnement du corps noir.

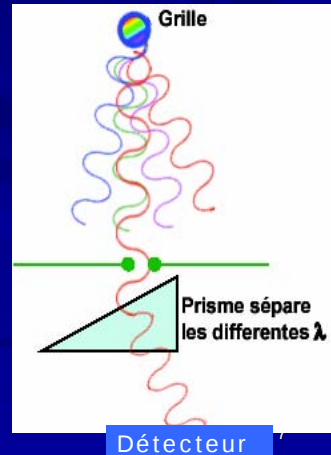
-Radiateur (grille) à une température T ,

- Il émet une variété de λ avec des intensités différentes les unes/ autres,

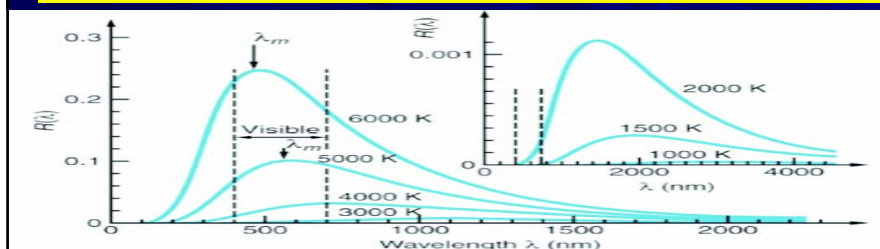
- Ondes avec différentes λ dispersent différemment avec le prisme,

-Enregistrement avec un détecteur,

-Tracé de la courbe de la densité d'énergie en fonction de λ .



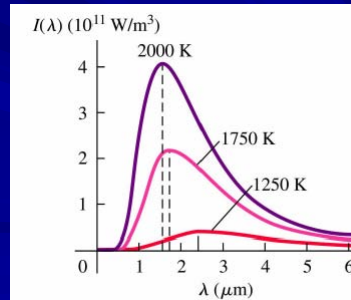
Observations expérimentales



Plus la température croît, plus le maximum se déplace vers les faibles longueurs d'ondes. La longueur d'onde à laquelle le maximum d'énergie est émis est donnée par la loi de déplacement de Wien

$$\lambda_{\max} \propto \frac{1}{T}$$

$$\lambda_{\max} T = 2.90 \times 10^{-3} \text{ m K}$$



Interprétation classique de Rayleigh- Jeans:

Rayleigh- Jeans ont postulé que le rayonnement électromagnétique émis par le corps noir provient d'un ensemble d'oscillateurs harmoniques qui le forment et qui ne sont autres que les atomes et molécules formant ce corps noir.

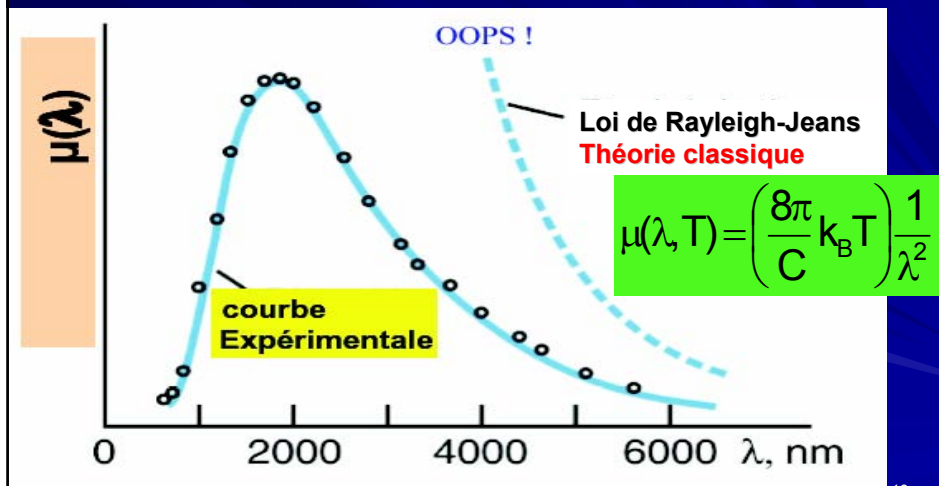
Sachant que la densité d'énergie est donnée par : $\mu = n \langle E \rangle$ avec
 n : nombre d'oscillations harmoniques de fréquence ν par unité de volume.
 $\langle E \rangle$: valeur moyenne de l'énergie d'un oscillateur de fréquence ν .
On montre que :

$$\mu(\nu, T) = \frac{8\pi}{C^3} \nu^2 k_B T$$

ν étant la fréquence $\nu = C/\lambda$, λ est la longueur d'onde du rayonnement, C est la vitesse de la lumière dans le vide, T est la température et K_B est la constante de Boltzmann.

9

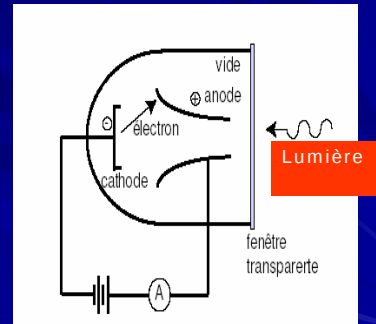
Catastrophe de l'Ultra- Violet



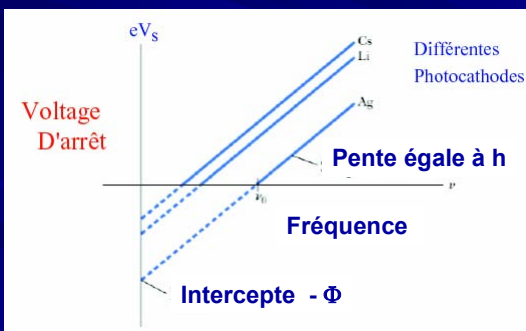
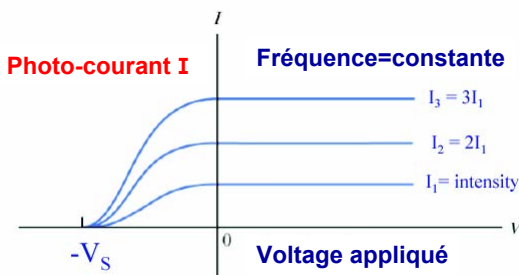
10

Effet Photoélectrique

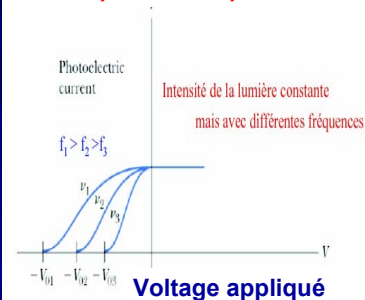
- Soit une ampoule en verre, vidée d'air, dont un côté de la surface interne est tapissé d'une couche d'un métal. L'ampoule contient aussi un anneau circulaire qui jouera le rôle d'anode (point de réception des électrons).
- En l'absence d'éclairement, le courant $I = 0$.
- Sous éclairement monochromatique de λ bien définie, LE COURANT I est non nul.
- Le courant I est créé par la lumière qui, en tombant sur le métal, arrache des électrons qui appartiennent au métal en leur fournissant l'énergie nécessaire pour franchir la barrière de potentiel qui, normalement, les retiennent à l'intérieur. Ces électrons, chargés négativement, sont captés par l'anneau (anode) et circulent dans le circuit.



11



Courant photoélectrique I



- Le courant est proportionnel à l'intensité et sature pour des tensions de polarisation V positives.

- Pour $V = V_s$: $I = 0$, V_s appelé potentiel d'arrêt et il dépend du métal ₁₂

Quelques notions d'électromagnétisme

Equations de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{E} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

$$\text{div} \rho \vec{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

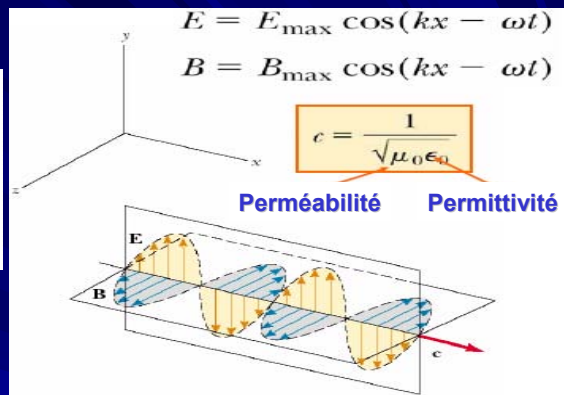
équation de conservation des charges

13

Eq. de maxwell donnent:

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$



Vecteur de Poyting:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})$$

Intensité de la lumière:

$$I = \frac{1}{2\mu_0 c} E_0^2$$

14

Conclusions des observations expérimentales

- La lumière est une onde électromagnétique. Le champ électrique est en mesure de chasser hors du métal les électrons se trouvant près de la surface. Certains vont atteindre l'anode. La probabilité de collection augmente quand la tension appliquée croît et finit par tendre vers l'unité. Le courant atteint la valeur de saturation $I_{\max}$.

- Dans l'image classique, le champ électrique de l'onde croît avec l'intensité de la lumière. Donc $E_{\text{cin,Max}}$ doit croître aussi avec l'intensité. Or $E_{\text{cin,Max}}$ est indépendante de l'intensité pour une même longueur d'onde λ . Seule $I_{\max}$ dépend de l'intensité.

- Si la longueur d'onde est supérieure à une λ_{seuil} , l'effet photoélectrique est absent. λ_{seuil} est caractéristique du métal (photocathode)

■ **La physique classique est incapable d'interpréter quantitativement l'effet photoélectrique.**

Exercice:

Un rayonnement laser d'intensité 120 W/m^2 éclaire le métal alcalin Na.

On suppose que l'électron est confiné dans l'atome Na d'une taille de 0.1 nm .

On a: l'énergie pour extraire un électron de Na = $2,3 \text{ eV}$

Combien de temps nécessite l'éjection de l'électron ?

Commenter le résultat obtenu.

Réponse:

la puissance moyenne délivrée est $P_{\text{moy}} = I \times \pi r^2$

Si toute l'énergie est absorbée : $\Delta E = P_{\text{moy}} \Delta T$

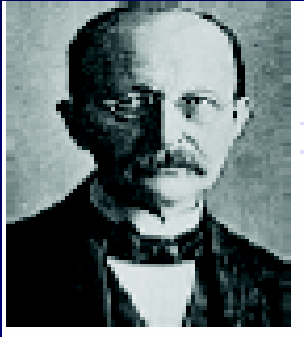
$\Delta T = 2,3 \times 1,6 \cdot 10^{-19} / (120 \text{ W/m}^2) \times (3.14 \cdot 10^{-20} \text{ m}^2) = 0,10 \text{ s}$

La physique classique prévoit **un temps mesurable** avant le déclenchement de l'effet photoélectrique.

Par contre, l'expérience montre que le phénomène est **instantanée**.

C'est là un désaccord et une autre limite de la physique classique à interpréter l'effet photoélectrique.

Interprétation Quantique de Planck

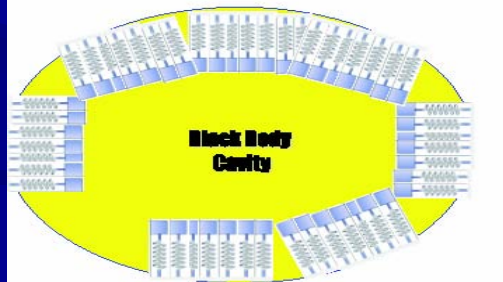


-Cavité en équilibre.
-Echange d'énergie entre Rayt EM et les oscillateurs présents sur les murs de la cavité

- Planck a remarqué la catastrophe U.V. du RCN.
- Calcul avec de nouvelles idées a conduit à:

$$\mu(\lambda, T) \rightarrow 0 \text{ quand } \lambda \rightarrow 0$$

Planck: "Oscillateurs Chargés" dans la cavité du Corps Noir



- **Hypothèse fondamentale:** la quantification de l'énergie n'est pas une propriété spécifique du modèle des résonateurs de Planck, mais une propriété universelle du champ électromagnétique lui-même.

Les oscillateurs peuvent avoir n'importe quelle fréquence, MAIS l'échange d'énergie entre l'oscillateur et la radiation n'est pas continu et arbitraire. Il est discret et se fait par petits paquets de même énergie: **On dit qu'i y'a quantification de l'énergie.**

Planck représenta la valeur du "quantum" selon lequel s'effectue la quantification par la lettre h à laquelle on donna par la suite son nom (h: constante de Planck)

L'énergie de chaque oscillateur est donnée par:
 $E = h\nu$ et E ne peut pas prendre n'importe quelle valeur.

Selon cette hypothèse, on montre que :

$$\mu(\nu, T) = \frac{8\pi}{C^3} \nu^2 h \nu \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$$

C'est la Loi de Planck

$$\begin{aligned} h &= 6.6261 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ &= 4.1357 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s} \end{aligned}$$

19

Remarques :

- Si $h\nu \ll k_B T$:

$$\mu(\nu, T) = \frac{8\pi}{C^3} \nu^2 k_B T$$

On retrouve la loi de Rayleigh-Jeans.

- Si $h\nu \gg k_B T$:

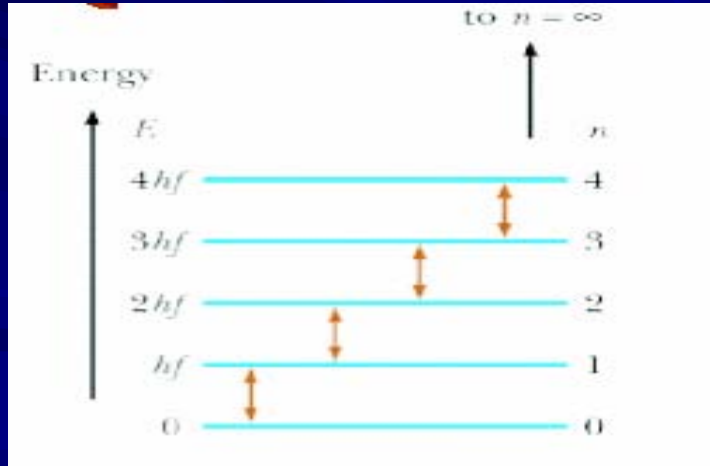
$$\mu(\nu, T) = \frac{8h\pi\nu^3}{C^3} \exp\left(-\frac{h\nu}{k_B T}\right)$$

C'est la Loi de Wein

20

Il y'a quantification de l'énergie:

L'énergie ne peut pas prendre n'importe quelle valeur.



21

Loi de Stefan- Boltzmann

- La thermodynamique nous permet de montrer que l'émittance d'une source thermique est proportionnelle à la puissance quatre de la température. Cette démarche ne permet cependant pas de trouver de façon théorique le coefficient de proportionnalité, ni de dire comment se répartit l'énergie du rayonnement avec la fréquence.

- Avec l'hypothèse de Planck, l'émittance totale du corps noir est définie par:

$$\sigma(T) = \int_0^{+\infty} \mu(\nu, T) d\nu$$

Avec

$$\mu(\nu, T) = \frac{8 \pi^5 \nu^2}{15 c^2} h \nu \frac{1}{\exp\left(\frac{h \nu}{k_B T}\right) - 1}$$

22

Loi de Stefan- Boltzmann (Suite)

Sachant que:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}$$

Alors:

$$\sigma(T) = \text{Cte } T^4$$

Loi de Stefan- Boltzmann

Où

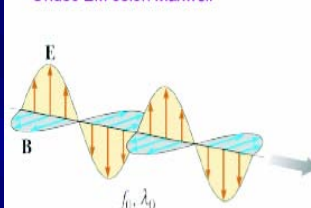
$$\text{Cte} = \frac{8 \pi^5 k_B^4}{15 c^3 h^3}$$

23

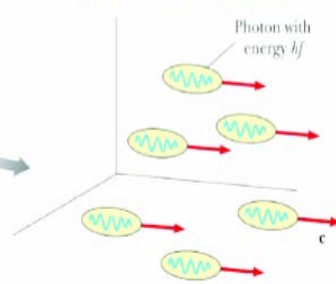
Explication d'Einstein de l'effet photoélectrique



Ondes EM selon Maxwell



Ondes OEM selon Einstein



A. Einstein: Prix Nobel en 1915

Lumière est formée de paquets de photons,
L'énergie est concentrée dans ces photons,
L'énergie est échangée immédiatement,
L'énergie est égale à $E = h \nu$.

24

La lumière est formée de photons. Ce quantum d'énergie est utilisé pour frapper le métal

Lorsqu'un photon incident de fréquence ν vient frapper une photocathode (un métal), son énergie est utilisée pour extraire l'électron du métal et lui communiquer une force vive (c à d une énergie cinétique)

L'extraction d'un électron à un métal ne peut être possible que si le photon incident à une énergie supérieure ou égale à W_E (W_E est l'énergie nécessaire pour arracher l'électron du métal).

$$W_E = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$$

ν_0 : fréquence seuil

λ_0 : longueur d'onde seuil, dépend du métal utilisé

D'où on observe l'effet photoélectrique si $\nu_{inc} > \nu_0$; $\lambda_{inc} < \lambda_0$.

Si le photon incident communique toute son énergie à l'électron du métal :

$$h\nu = W_E + \frac{1}{2}mv^2$$

Equation de conservation de l'énergie

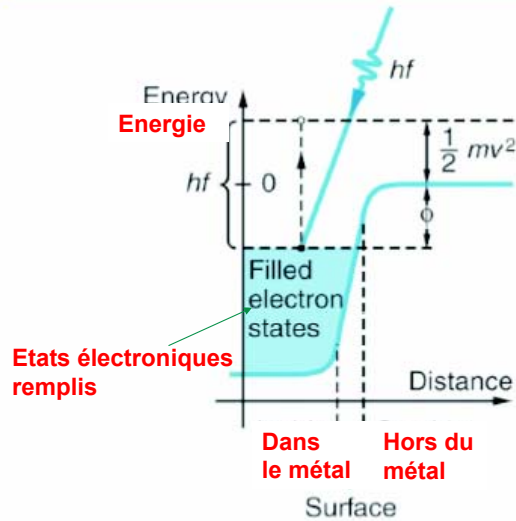
Si on applique une tension de polarité et de valeur bien définies, on peut empêcher l'arrivée des électrons à l'anode (on bloque les électrons à la surface du métal) : $I=0$.

On peut alors écrire:

$$eV_s = E_{cin. Max}$$

V_s est appelé potentiel d'arrêt

Explication Moderne de l'effet Photoelectrique



27

Quelques valeurs du travail d'extraction W_E (ou Φ) en eV

Element	ϕ (eV)
Na	2.28
C	4.81
Cd	4.07
Al	4.08
Ag	4.73
Pt	6.35
Mg	3.68
Ni	5.01
Se	5.11
Pb	4.14

28

Réinterprétation de l'effet photoélectrique dans l'hypothèse du photon.

■ Exercice:

On veut étudier l'effet photoélectrique avec une cathode en fer de 1 cm^2 de surface. L'intensité de la lumière incidente est de $1.0 \text{ } \mu\text{W}/\text{cm}^2$.

Supposons que le fer réfléchisse 96 % de la lumière incidente et que seulement 3 % soit dans la zone UV ($\lambda=250 \text{ nm}$) tout juste au dessus de la longueur d'onde seuil.

- a-** Combien de photoélectrons sont émis par seconde?
- b-** Quel est le courant électrique mesuré?

Réponses:

a- $N = 1.5 \cdot 10^9$ photoélectrons

b- $I = 2.4 \cdot 10^{-10} \text{ A}$

29

Exercice:

Un rayonnement de longueur d'onde λ égale à 200 nm éclaire la surface d'un métal.

Des électrons d'énergie cinétique 3 eV sont éjectés.

Quel est le travail de sortie du métal?

On a :

$$h\nu = W_s + E_c$$

où

$$W_s$$

est le travail de sortie

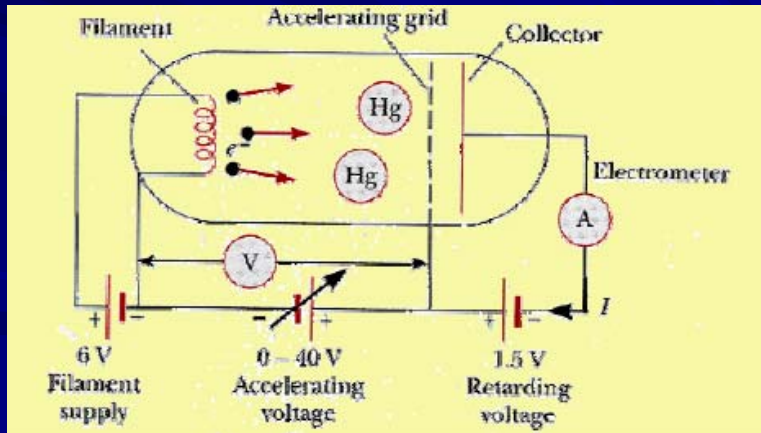
$$W_s = \frac{hc}{\lambda} - E_c$$

A.N.: $W_s = 3.21 \text{ eV}$

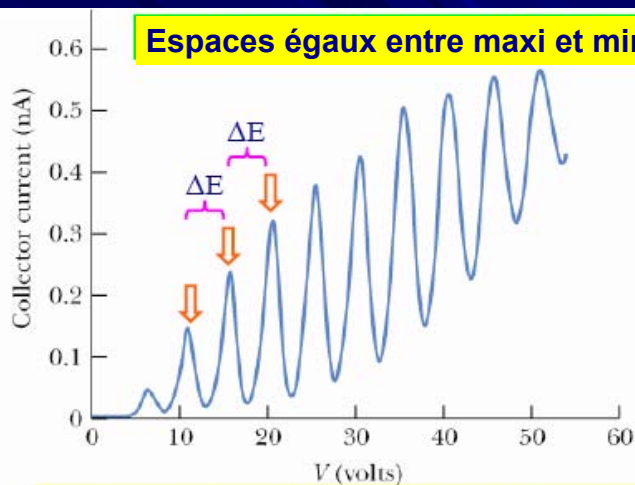
30

Expérience de Franck- Hertz: Excitation d'atomes par des électrons

Une autre façon d'échange quantifiée d'énergie:
Transfert d'énergie des électrons aux atomes de Hg
après collisions inélastiques.



31



Espaces égaux entre maxi et minimums

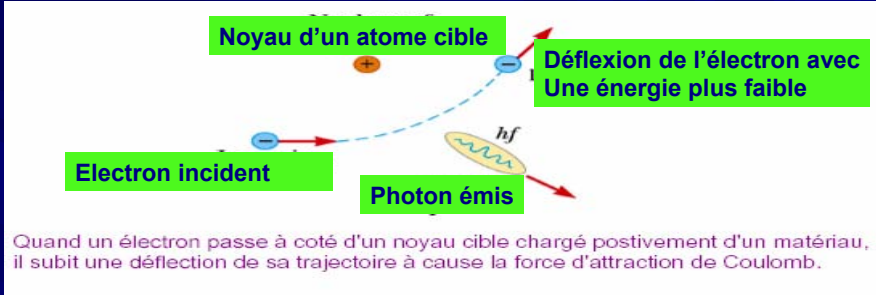
Atomes acceptent seulement une part discrète de l'énergie:

$$\Delta E = h\nu$$

ν est la fréquence du rayonnement émis par les atomes Hg
(rayonnement UV)

32

Effet Compton



1922: Arthur Compton (USA) montre que les rayons X (Ondes EM) ont un comportement corpusculaire (comme les photons)

Rayons X sont des OEM (faible longueur d'onde), (Haute énergie) et présentent les caractéristiques des ondes

- Interférences
- Diffraction

33

Effet Compton



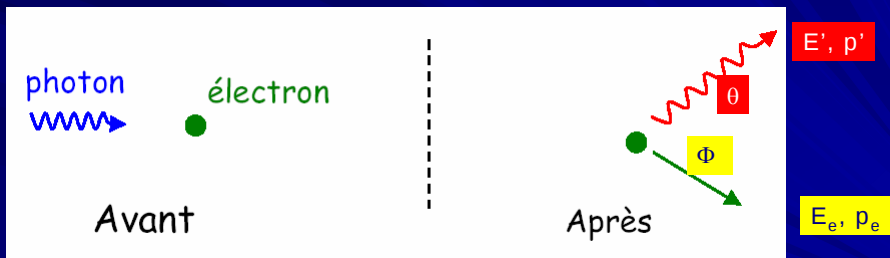
Partant du principe que la lumière est constituée de véritables particules (hypothèse d'Einstein) possédant une énergie et une quantité de mouvement bien définies, Compton (physicien atomiste américain, Prix Nobel 1927) et Debye (physicien hollandais) établirent chacun de son côté la loi théorique de la diffusion de photon par l'électron.

En plus, Compton réalisa l'expérience et confirma les prédictions effectuées sur la base d'une hypothèse corpusculaire de la lumière.

34

L'expérience de Compton consiste à illuminer la surface d'un métal (où il y'a des électrons libres) par un faisceau de rayons X

Photon x en collision avec un électron cible:



E, p

$m_e C^2, 0$

Le photon x fait un angle θ avec l'horizontal

L'électron fait un angle Φ avec l'horizontal

35

Equations de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement

- Conservation de l'énergie nous donne:

$$E + m_e C^2 = E' + E_e$$

- Conservation de la quantité de mouvement ::

$$\vec{p} + \vec{0} = \vec{p}' + \vec{p}_e$$

- On a :

$$E = h\nu = \frac{hC}{\lambda}$$

$$E' = h\nu' = \frac{hC}{\lambda'}$$

$$E_e^2 = m_e^2 C^4 + p'^2 C^2$$

Relation de Planck- Einstein

Relativité restreinte

36

Suite du calcul

- En projetant l'équation vectorielle sur un système d'axes orthonormés, on obtient facilement:

$$p = p' \cos \theta + p_e \cos \Phi$$

$$0 = p' \sin \theta - p_e \sin \Phi$$

- En combinant de manière astucieuse les différentes équations (voir TD n°1), on obtient:

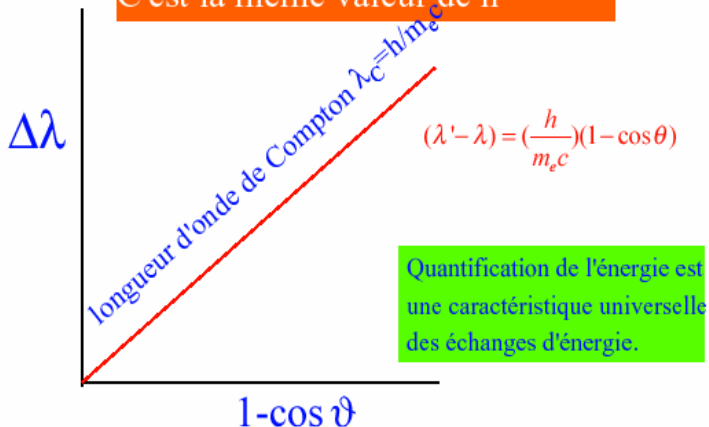
$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$$

37

Constante h à partir de l'effet Compton

A partir de la pente, on détermine "h"

C'est la même valeur de h



38

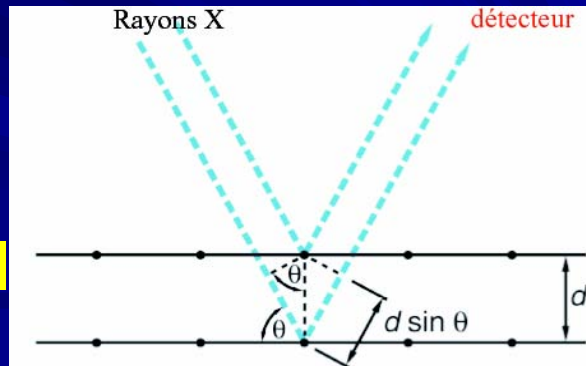
Diffraction de rayons x par un réseau d'atomes

Interférences constructives quand la différence de marche est un multiple entier de λ .

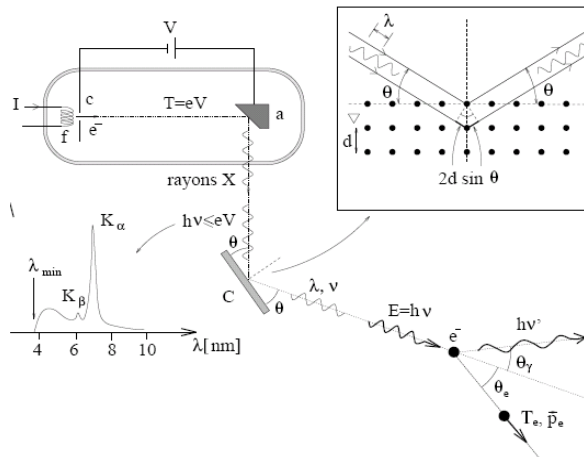
on obtient:

$$2d \sin \theta = n \lambda$$

C'est la loi de Bragg



39



Appareil pour l'étude de l'effet Compton, avec tube cathodique pour la production des rayons X. Les électrons émis par thermoémission d'un filament (f) et accélérés entre la cathode (c) et l'anode (a) produisent des rayons X lorsqu'ils sont freinés dans cette dernière. Le spectre est continu, un exemple est montré (anode de Mo à 30 kV). Le spectre s'arrête en-dessous de la longueur d'onde λ_{min} , correspondant à l'énergie maximale des photons du rayonnement X ($h\nu = eV$). Un cristal (C) sert de monochromateur, et permet de sélectionner le rayonnement de la fréquence ν désirée par diffusion de Bragg.

Les ondes de matière (Louis de Broglie)



Puisque les photons ont un double aspect ondulatoire et corpusculaire, les corpuscules (corps de masse m) doivent avoir aussi ce double aspect !!!

C'est la question que s'est posé L. de Broglie

- Le photon associé à l'onde électromagnétique se déplace à la vitesse C . sa masse est alors nulle.
- Or la relativité d'Einstein nous dit que:

$$E^2 = p^2 C^2 + m^2 C^4$$

$$\text{D'où : } E = pC$$

- Comme Planck postule que $E = h\nu$, alors :

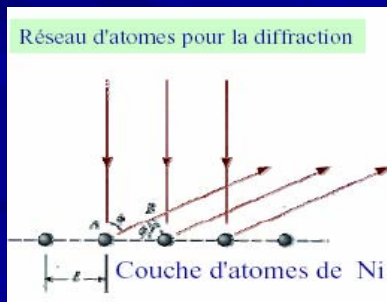
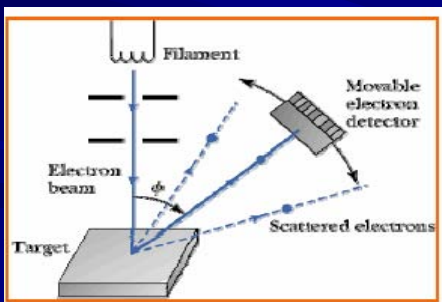
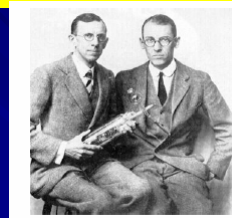
$$P = h/\lambda$$

41

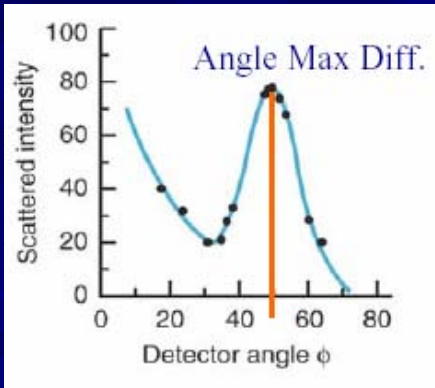
Expérience de Davisson et Germer

Si aux électrons, on associe une onde, on peut alors observer le phénomène d'interférences sur une couche d'atomes (diffraction d'un réseau) avec une distance inter-atomique d (de quelques angströms):

$$2 d \sin\theta = n \lambda$$



Résultats expérimentaux



Pic à $\Phi = 50^\circ$
Quand $V_{acc} = 54 \text{ V}$

43

Comme l'électron est accéléré avec une d.d.p. V_{acc} , alors son énergie cinétique est liée à V_{acc} par la relation:

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV_{acc} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2eV_{acc}}{m}}$$

• La longueur d'onde de de Broglie est donnée par:

$$\lambda_{théorique} = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2meV_{acc}}}$$

$$\lambda_{théorique} = 1.6710^{-10} \text{ nm}$$

• A partir de la diffraction de Bragg:

$$d_{Nickel} = 2.1510^{-10} \text{ nm}$$

Calcul de λ_{exp} à partir de l'angle maximum de diffraction : $\theta = 50^\circ$

$$\lambda_{expér.} = 2 \times 2.15 \times \sin 50^\circ \approx 1.6510^{-10} \text{ nm}$$

• On note un excellent accord entre $\lambda_{théorique}$ et $\lambda_{expér.}$

Exercice XI du TD 1 : Calculer la longueur d'onde associée à chaque cas ci-dessous:

- a-** Un électron accéléré avec un potentiel de 100 V.
- b-** Un électron non relativiste de masse $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg et de vitesse $V = 10^{-2} C$. C est la vitesse de la lumière.
- c-** Un neutron thermique à $T = 300$ K.
- d-** Un électron relativiste d'énergie 10^9 eV.
- e-** Une bille de masse 10 g et de vitesse 10 m/s.

Réponse: On calculera la longueur d'onde à partir de la relation :

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mV}$$

a- $eU = \frac{1}{2} m_e V^2 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{\frac{h^2}{2m_e eU}}$ $\lambda \approx 123 \text{ \AA}$

b- $\lambda = \frac{h}{m_e V} = \frac{h}{m_e 10^{-2} C}$ $\lambda \approx 242 \text{ \AA}$

45

c- $\frac{3}{2} K_B T = \frac{1}{2} m_n V^2 \Leftrightarrow \lambda = \sqrt{\frac{h}{3m_n K_B T}}$ $\lambda \approx 1,40 \text{ \AA}$

d- $E^2 - P^2 C^2 = m_e^2 C^4 \Leftrightarrow P = \sqrt{\frac{E^2 - m_e^2 C^4}{C^2}}$

et

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hC}{\sqrt{E^2 - m_e^2 C^4}}$$

Dans notre cas $E = 1 \text{ GeV} \gg m_e C^2 \approx 0,5 \text{ MeV}$ $\lambda \approx 1,24 \cdot 10^{-15} \text{ m}$

e- $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m_{\text{bille}} V_{\text{bille}}}$ $\lambda \approx 6,62 \cdot 10^{-33} \text{ m}$

46

Dualité onde- corpuscule

■ On a vu que :

- le rayonnement possède le double aspect ondulatoire-corporel.
- la matière possède le double aspect corporel-ondulatoire.

Les objets microscopiques ont pour propriété générale de se présenter sous les deux aspects ondulatoire et corporel :

C'est la dualité onde- corpuscule.

Entre les deux aspects, il existe une relation universelle de correspondance à savoir celle de Louis de Broglie.