Chapitre 2:

A- Rappels et compléments de mathématiques

Série de Fourier

Soit une fonction f(x) définie dans l'intervalle [-L,+L] et déterminée à l'extérieur par f(2L+x)=f(x) (fonction périodique).

On définit le développement de Fourier ou série de Fourier (SF) par:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\cos\frac{n\pi x}{L}+b_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right]$$

a_n et b_n sont appelés coefficients d Fourier:

$$a_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

$$b_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$$

Sous forme complexe, le développement de Fourier s'écrit:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}C_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}$$

Avec

$$C_n=\frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L}f(x)\,e^{-i\frac{n\pi x}{L}}dx$$

Relation de Parseval- Bessel

$$\frac{1}{L}\int_{-L}^{+L}\left|f(x)\right|^2dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n^2+b_n^2\right]$$

Remarques:

- Une série de Fourier en sinus est une SF où $a_n=0$.
- Une série de Fourier en cosinus est une SF où $b_n=0$.
- On a aussi:

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L}\left|f(x)\right|^2 dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\left|C_n\right|^2$$

On utilisera:

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} e^{i(n-m)x}\,dx = \delta_{nm}$$

δ_{nm} est le symbole de Kronecker.

Transformée de Fourier

Une fonction non périodique peut-être considérée comme périodique avec une période infinie.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i\frac{n\pi x}{L}}$$

$$f(x) = \sum_{n}\left[\frac{1}{2L}\int_{-L}^{+L} f(y)e^{-i\frac{n\pi y}{L}}\,dy\right]e^{i\frac{n\pi x}{L}}$$

Posons:

$$\frac{n\pi}{L} = k_n$$

On peut écrire:

$$\frac{1}{2L} = \frac{1}{2\pi}\left(k_{n+1} - k_n\right)$$

$$L \to \infty : \frac{1}{2L} \to 0 \text{ et } k_{n+1} - k_n = \Delta k \to dk$$

et

$$\sum \to \int \text{ et } \frac{1}{2L} \to \frac{dk}{2\pi}$$

f(x) s'écrit alors:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-iky}\, dy \right] e^{ikx}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, e^{-iky}\, dy$$

C'est la transformée de Fourier de la fonction f(y) notée T.F.(f(y))

D'où

$$T.F.(f(x)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx = F(k)$$

C'est la transformée de Fourier de la fonction f(x) notée T.F.(f(x))

Et

$$f(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)\, e^{+ikx}\, dk = T.F.^{-1}(F(k))$$

$T.F.^{-1}$ est la T.F. inverse

Remarques:

Les constantes figurant devant les intégrales (T.F. directe et T.F. inverse) n'ont aucune importance dans la mesure où leur produit est égal à $\frac{1}{2\,\pi}$.

Pour cette raison, nous allons choisir deux constantes égales (qui répondent à la condition citée ci-dessus) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

et afin d'avoir des expressions de T.F. directe et T.F. inverse symétriques. En conséquence:

$$T.F.(f(x)) = F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ikx}\, dx$$

$$f(x)) = T.F.^{-1}(F(k)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)\, e^{+ikx} dk$$

Propriétés de la T.F.

$$T.F.(af(x) + b(g(x)) = aT.F.(f(x)) + bT.F.(g(x))$$

$$T.F.(f(ax)) = \frac{1}{|a|} F(\frac{k}{a})$$

$$T.F.(f(x-b)) = e^{-ikb}\; F(k)$$

$$T.F.(f^{(n)}(x)) = (ik)^n\; F(k)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(k)|^2 dk$$

Egalité de Parseval- Plantherel

Théorème de convolution

Soient deux fonctions f(x) et g(x) tq:
T.F.(f(x))=F(k) et T.F.(g(x))=G(k).

On définit le produit de convolution de f et g par :

$$h(x) = f * g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, g(x-y)\, \mathrm{dy}$$

On montre que: (Voir T.D. n°2)

$$\mathrm{T.F.(h(x))} = \mathrm{T.F.(f * g)} = \mathrm{F(k)\,G(k)}$$

Utilisation du Produit de convolution

Le produit de convolution est très utilisé en physique.

- Si l'on a un signal entrant $S(t)$ et un élément filtrant ayant une fonction de transfert $H(t)$ alors le signal de sortie $S_s(t)$ sera la convolution de ces deux fonctions : $S_s(t) = S * H$

- Il est aussi utilisé en mécanique quantique.

Fonction de Dirac

Soit $\delta^{\varepsilon}(y-y_0)$ une fonction définie autour de y_0 dans un domaine de largeur ε où elle a une valeur appréciable.

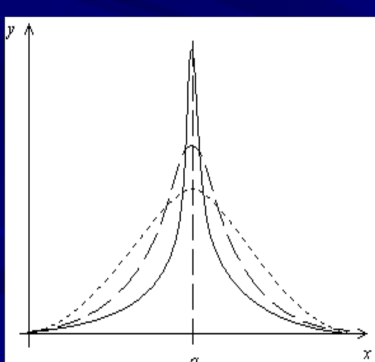
Si ε tend vers zéro, δ aura une seule valeur appréciable au point $y=y_0$. En plus:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^{\varepsilon}(y-y_0)\,dy = 1$$

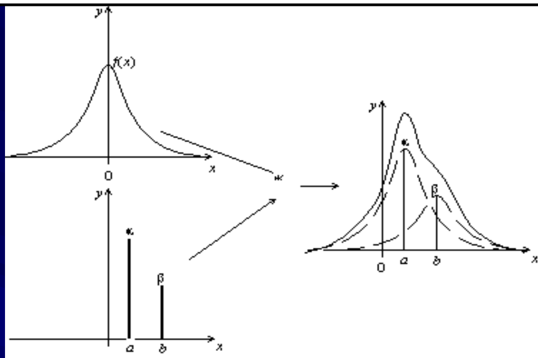
Exemples:

$$\delta^{\varepsilon} = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon} \text{ si } |y - y_0| < \dfrac{\varepsilon}{2} \\ 0 \quad \text{ailleurs} \end{cases}$$

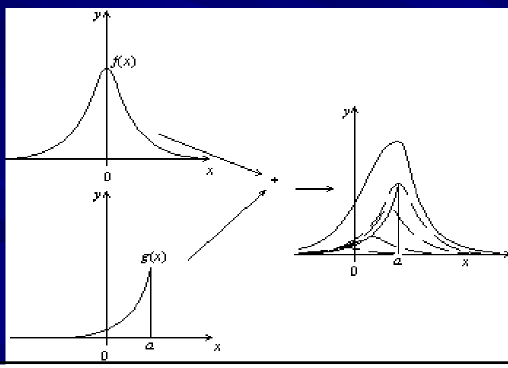
- Soit une suite de fonctions, des courbes en cloche ayant toutes la même surface 1, mais de plus en plus fines (donc de plus en plus hautes). Lorsque la largeur des courbes tend vers 0, sa hauteur tend vers +∞, mais la surface reste égale à 1. Pour des raisons pratiques, on représente souvent la « fonction » de Dirac comme un pic positionné en a et de hauteur 1.



$$\delta_a(x) = \delta(x-a)$$



$$f * \delta_a$$



$$f * g$$

Propriétés de δ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx = f(x_0)$$

$$\text{T.F.}(\delta(x-x_0)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx}\,\delta(x-x_0)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ikx_0}$$

$$\text{T.F.}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ikx_0}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{+ikx}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-ikx_0}\,dk$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{+ik(x-x_0)}\,d\lambda \;= \delta(x-x_0)$$

$$\text{T.F.}(\delta(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\text{T.F.}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = \delta(x)$$

$$\delta(x) = \delta(-x)$$

$$\delta(Cx) = \frac{1}{C}\delta(x)$$