Corrigé de la série n°2
Dynamique et Statique

1/ le volume de la sphère est $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ et $\rho = \frac{m}{V}$ **A.N** : $\rho = 1{,}27\ 10^{17}$ Kg/m^3

La densité est $d = \frac{\rho_U}{\rho_{eau}}$ **A.N** : $d = 1{,}27\ 10^{14}$

2) Les forces qui s'exercent sur l'ascenseur sont : le Poids $\vec{P}$ et la Tension du câble $\vec{T}$.

a) En montée, l'accélération est ascendante (vers le haut). Par application de la 2ème loi de Newton (principe fondamental de la dynamique), on obtient :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

La trajectoire est une droite verticale : c'est donc un mouvement rectiligne.
Projetons la relation vectorielle ci-dessus suivant un axe OX ascendant (dirigé vers le haut) :

$$-mg + T = ma \Leftrightarrow T = m(a+g)$$

A.N.: T = 1000 x (3+9.8) = 12800 N
On voit que T est bien supérieure au poids. Le câble doit supporter le poids de l'ascenseur, mais il doit aussi fournir une force supplémentaire nécessaire à l'accélération.

b) Dans ce cas (la descente) :

$$T - mg = -ma \Leftrightarrow T = m(-a+g)$$

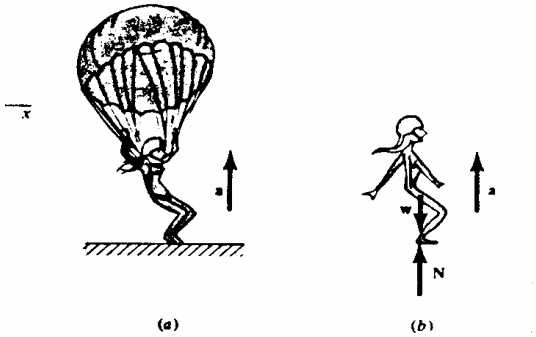
A.N.:T= 1000 x (9.8 - 3) = 6800 N < P.

3/ P_{eff} = ma –mg avec a = 3g d'où P_{eff} = 2 mg et $\vec{P}_{eff}$ est dirigé vers le haut.

4/ Le principe fondamental de la dynamique nous donne :

$$-P + N = ma = m\,3g \Leftrightarrow N = 4\,mg$$

La force exercée par le sol sur le parachutiste est 4 fois son poids. Par contre si la personne est simplement debout sur le sol, N est égale à P.
Si le parachutiste garde les jambes tendues au cours de l'atterrissage, il s'immobilisera avec une plus grande décélération sur une distance plus courte. La force qui s'exercera sur ses jambes sera donc plus importante (risque de fracture).



5/ i) Puisque le bloc reste fixe lorsque T est appliquée, la force de frottement f_S doit être égale et opposée à T : $f_S = T$ **A.N.** : $f_S = 20$ N
ii) Comme le bloc commence à glisser lorsque T = 40 N, la force de frottement maximale $f_{S,max}$ doit être égale 40 N.
La somme des forces verticales est nulle : n – mg = 0.
Or $f_{S,max} = \mu_S n = \mu_S mg$ **A.N.**: $\mu_S = 0,82$
iii) Puisque le bloc se déplace à vitesse constante sous T = 32 N, la force résultante est nulle :
$f_C = \mu_C n = \mu_C mg$ **A.N.**: $\mu_C = 0,65 < \mu_S$

6/ Soient O' le centre de la lune et o le centre d la terre : OO' = 3,9 10^5 Km.
La masse m est à r_L = O'm de la lune et à r_T = Om. On a $r_L + r_T$ = r = OO'

Par rapport à la terre, le poids de m est $P_T = \frac{GM_T m}{r_T^2}$

Par rapport à la lune, le poids de m est $P_L = \frac{GM_L m}{r_L^2}$

Pour $P_L = P_T \Leftrightarrow \frac{GM_T m}{r_T^2} = \frac{GM_L m}{r_L^2} \Leftrightarrow \frac{M_T}{r_T^2} = \frac{M_L}{r_L^2}$ d'où : $r_T = r\frac{\sqrt{M_T / M_L}}{1+\sqrt{M_T / M_L}}$

A.N. : $r_T = 3,51\ 10^5$ Km

7/ La tension $\vec{F}$ et le poids $\vec{P}$ n'ont pas de composantes horizontales. Comme on est devant un problème de statique, la somme de toutes les forces doit être nulle. Par conséquent la force $\vec{R}$ est elle aussi portée par la verticale.
Les conditions d'équilibre sont données par :

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{R} = \vec{0}$$

$$\vec{\mathrm{M}}_{/O}\,\vec{T} + \vec{\mathrm{M}}_{/O}\,\vec{P} + \vec{\mathrm{M}}_{/O}\,\vec{R} = \vec{0}$$

Le choix du point O est arbitraire. On peut le prendre confondu avec l'un des 3 points d'application des forces citées ci-dessus. Par exemple, choisissons le point confondu avec le pivot.

Soit r, f et p les points d'applications respectivement des forces $\vec{R}$, $\vec{F}$ et $\vec{P}$.
$\vec{\mathrm{M}}_{/O}\,\vec{F} = \vec{Of} \wedge \vec{F}$; $\vec{\mathrm{M}}_{/O}\,\vec{P} = \vec{Op} \wedge \vec{P}$ et $\vec{\mathrm{M}}_{/O}\,\vec{R} = \vec{or} \wedge \vec{R} = \vec{0}$ (o et r sont confondus)
$\left|\vec{Of}\right| = 0,03m$ et $\left|\vec{Op}\right| = 0,35m$
Soit un repère OXYZ tel que OZ soit perpendiculaire au plan OXY. OZ porte un vecteur unitaire $\vec{k}$ avec $\vec{k} = \vec{i} \wedge \vec{j}$
Projetons les relations vectorielles ci-dessus :

$$\text{(i)}\ -P\vec{j} - R\vec{j} + F\vec{j} = \vec{0} \Leftrightarrow -P - R + F = 0$$
$$\text{(ii)}\ -0,35P + 0,03F = 0 \Leftrightarrow F = 11.67P$$

A.N. : F = 583 N et R = 533 N

8/ i) Appliquons la 2ème loi de Newton au feu rouge: $\vec{P}+\vec{T_3}=m\vec{a}$ .Or a = 0, d'où : $P=T_3$
A.N. T_3 = 125 N.
ii) Appliquons la 2ème loi de Newton au nœud (point de rencontre des 3 tensions) : $\vec{T_1}+\vec{T_2}+\vec{T_3}=\vec{0}$

En projetant sur un système d'axes OXY orthonormés, on obtient :

$$T_1 \sin 37° + T_2 \sin 53° - T_3 = 0$$
$$-T_1 \cos 37° + T_2 \cos 53° = 0$$

A.N. : T_1 = 100 N et T_2 = 75 N

9/ Les équations d'équilibre pour un corps rigide sont : $\sum \vec{F_{ext}}=\vec{P}+\vec{R}+\vec{N}=\vec{0}$ et $\sum \vec{M}_{/O}=\vec{0}$
Par projection sur un système d'axes OXY, on obtient :

$$\sum \vec{F_{ext}}=\vec{0} \Leftrightarrow F\sin\alpha - R\sin\beta = 0 \text{ et } F\cos\alpha - R\cos\beta + N = 0$$

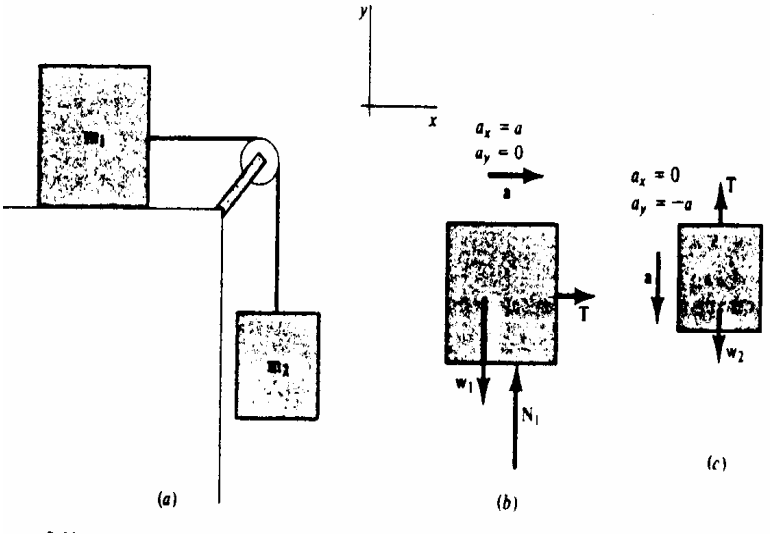
$$\sum \vec{M}_{/O}=\vec{0} \Leftrightarrow d_2 F\cos\alpha - d_1 N = 0$$

10/ Le volume de la feuille d'or est V= 100 10^{-4} x 10 10^{-3}= 10^{-4} m^3.
La masse volumique de l'or est ρ=densité x 1000 Kg/m^3=19300 Kg/m^3
Par conséquent, la masse de la feuille d'or est m= ρ V
A.N. : m= 1.93 Kg

11/ m= ρ_{GR} V= $\rho_{GR}\ \frac{4}{3}\pi R^3$ **A.N. :** m= 1300 x $\frac{4}{3}\pi$ (2 10^{-6}) ^{3}= 4.36 10^{-14} Kg

12/ $\frac{F}{m}=a$ A.N. : $a=\frac{210^5}{60}=3333\ \text{m/s}^2$
Et $a=340\ \text{g}$ avec $\text{g}=9.8$ m/s^2

13/ a- Appliquons la 2ème loi de Newton à m_1. Comme le bloc se déplace sur la surface horizontale, il ne possède pas alors d'accélération verticale a_y=0



Par projection sur un système d'axes OXY, on obtient :

$$N_1 - W_1 = 0 \quad (1) \text{ et } \quad T = m_1 a_x = m_1 a \quad (2)$$

T et a sont des inconnues

$N_1 = W_1 = m_1 g$ **A.N. :** $N_1 = W_1 = 19.8$ N

Appliquons la 2ème loi de Newton à m_2. Comme le bloc se déplace suivant la verticale, il ne possède pas alors d'accélération horizontale a_x=0. De la même façon, on obtient :

$$-T + m_2 g = m_2 a_y = m_2 a \quad (3)$$

L'absence de frottement conduit à prendre la même tension T des 2 cotés de la poulie et par conséquent la même accélération a.

Comme $a = T/ m_1$, (3) devient : $-T + m_2 g = m_2 (T/ m_1)$

D'où : $T = m_2 m_1 g/ (m_2+m_1)$

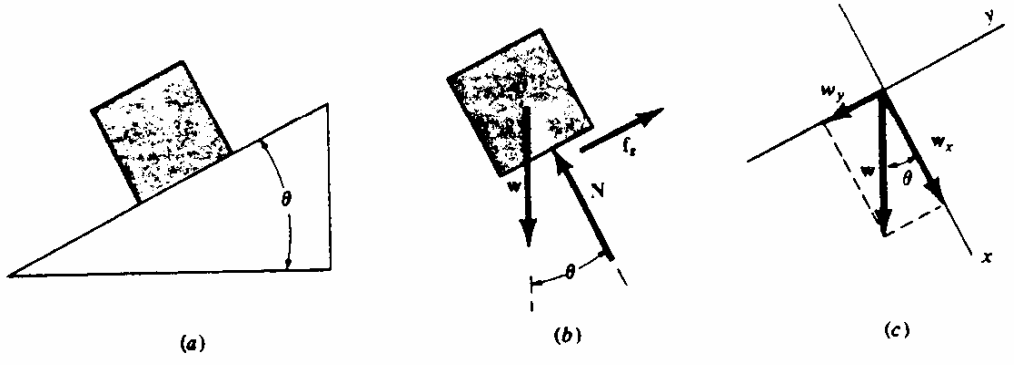
A.N. : T= 65.33 N

b- $a = T/ m_1$ **A.N. :** $a = 3.27$ m/s^2

c- Comme le mouvement est uniformément accéléré (a est une constante positive) et que le système st initialement au repos, alors :

$$\Delta x = \frac{1}{2} a t^2 \qquad \textbf{A.N. :} \ \Delta x = 6.54 \text{ m}$$

14/ Dans cet exercice, on choisira les axes comme le montre la figure ci-dessous.



Le poids W (ou P) a pour composantes :
$W_x=P_x=W\cos\theta=P\cos\theta$ **et** $W_y=P_y=-W\sin\theta=-P\sin\theta$

Si le bloc reste fixe la force de frottement statique $f_s = P\sin\theta$
La réaction du support N est égale $P\cos\theta$, d'où $tg\theta = f_s /N$
Quand le bloc commence à glisser, on a : $f_s = f_{s,max} = \mu_s N$, par conséquent :

$$\mu_s = tg\theta_{max}$$

Le dispositif présenté dans cet exercice permet de mesurer de façon simple le coefficient de frottement statique. En effet, il suffit de faire varier progressivement θ jusqu'à ce que le bloc commence à bouger.

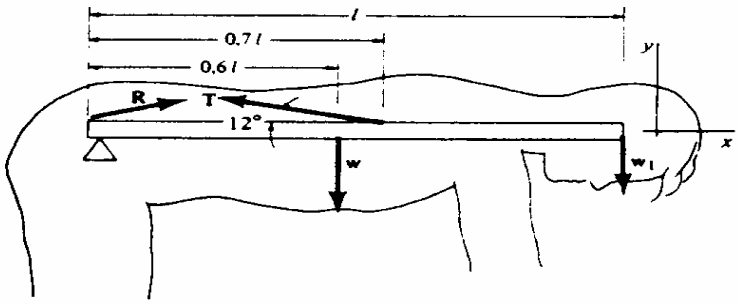
15/ On a : $f_s = \mu_s N = \mu_s mg$ **A.N.:** $f_s = 30$ N

16/ On applique les 2 relations de la statique: $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ et $\sum \vec{M}_{/O} = \vec{0}$
On obtient dans ce cas: $F_1 - F_2 - F = 0$
Si on choisit de déterminer les moments par rapport au point d'application de la force F, alors :

$$0.01\ F_1 - 0.03\ F_2 = 0 \Leftrightarrow F_1 = 3\ F_2$$

A.N. : $F_1 = 0.75$ N et $F_2 = 0.25$ N

17/ C'est un problème de statique : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ et $\sum \vec{M}_{/O} = \vec{0}$



Projetons les forces sur le système d'axes OXY.

$$R_x - T\cos12° = 0 \quad \textbf{(1)}$$
$$-W_1 + R_y + T\sin12° - W = 0 \quad \textbf{(2)}$$

Déterminons les moments par rapport au point d'application r de la force R :
$\vec{M}_{/r}\,\vec{R} = \vec{r}\vec{r}\wedge\vec{R} = \vec{0}$, $\vec{M}_{/r}\,\vec{W} = \vec{r}\vec{w}\wedge\vec{W}$
$\vec{M}_{/r}\,\vec{W}_1 = \vec{r}\vec{w}_1\wedge\vec{W}_1$ et $\vec{M}_{/r}\,\vec{T} = \vec{r}\vec{t}\wedge\vec{T} = \vec{r}\vec{t}\wedge\vec{T}_y$
On obtient alors : $0.6\ W - 0.7\ T\sin12° + W_1 = 0$ **(3)**

a- A.N. : Cas où $W_1 = 0$: $R_y = 70$ N, $R_x = 1976$ N et $T = 2020$ N

b- A.N. : Cas où $W_1 = 175$ N : $R_y = -5$ N, $R_x = 3153$ N et $T = 3223$ N
Comme R_y est négative, la force R est dirigée vers l'extérieur du dos.