Corrigé de la série n°3
Mouvements circulaire et oscillatoire

1/ ω_0 = 3700 tours/min = (3700 x 2π)/60 rad/s = 387 rad/s

a- V = rω **A.N.:** V = 97 m/s

b- On a: $\omega^2 - \omega_0^2$ = 2 α Δθ et $\alpha\, t = \omega - \omega_0$ d'où: $\Delta\theta = \frac{1}{2}(\omega + \omega_0)\, t$

AN: ω = 0 rad/s et t = 3 s d'où: Δθ = 581 rad

Le nombre de tours est N = Δθ/2π **AN :** N = 581/2π = 92,47

2/ Le volume d'une sphère est $\mathcal{V} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Le poids P est donné par P = m g = ρ $\mathcal{V}$ g = ρ $\frac{4}{3}\pi R^3$ g

A.N. : P = 4,4 10^{-13} N

Quant à la force centrifuge F_C, elle est donnée par : $F_C = m\,\omega^2\, r = \rho\,\frac{4}{3}\pi R^3\,\omega^2\, r$

AN : F_C = 4,8 10^{-9} N

On voit que F_C est très grande devant P : $F_C = 10^4$ P.

Sous l'effet de F_C, la sédimentation sera rapide: C'est l'intérêt des centrifugeuses.

3/ a- La force électrostatique (force exercée par le proton sur l'électron) vaut :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-e^2}{r^2}\frac{\vec{OM}}{\left|\vec{OM}\right|}$$

Où O est le centre du repère confondu avec le proton et r est la distance qui sépare l'électron du proton.

La même force est exercée par l'électron sur le proton (3 ème loi de Newton).

AN : $\left|\vec{F}\right| = 8{,}2\ 10^{-8}$ N

Quant à la force gravitationnelle exercée par le proton sur l'électron, elle vaut :

$$\vec{F}_G = \frac{-GMm}{r^2}\frac{\vec{OM}}{\left|\vec{OM}\right|}$$

AN : $\left|\vec{F}_G\right| = 3{,}6\ 10^{-47}$ N

$\left|\vec{F}_G\right| << \left|\vec{F}\right|$: En physique de l'atome, on négligera toujours la force gravitationnelle devant la force électrostatique.

b- L'application de la 2 ème loi de Newton nous donne :

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-e^2}{r^2}\frac{1}{m}\frac{\vec{OM}}{\left|\vec{OM}\right|}$$

L'accélération est dirigée vers O : elle est donc centripète (ou radiale) $\vec{a}//\vec{OM}$.
AN : a = 9 10^{22} m/s^2.

Le mouvement est circulaire uniforme : a = $\frac{V^2}{r}$ où V est la vitesse de l'électron.

AN : V = 2,2 10^6 m/s.

Quant à la fréquence f, elle est donnée par : $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{V}{2\pi r}$

AN : f =6,6 10^{15} Hz.

4/ Une charge q de vitesse $\vec{V}$ placée dans un champ magnétique $\vec{B}$ sera soumise à la force de Laplace: $\vec{F} = q\vec{V}\wedge\vec{B}$

Dans cet exercice $\vec{V} \perp \vec{B}$: $\left|\vec{V}\wedge\vec{B}\right| = VB$

L'ion décrit un arc de cercle à vitesse constante : l'accélération est centripète et vaut $\frac{V^2}{r}$ avec $r = \frac{d}{2}$

Par application de la 2 ème loi de Newton, on obtient :

$$qVB = M\frac{V^2}{r} = 2M\frac{V^2}{d} \Leftrightarrow M = \frac{qBr}{V}$$

AN. : M =6,7 10^{-27} Kg = 4 M_P (M_P masse du proton)
La masse de l'ion (de charge ++) M est égale à 4 fois la masse du proton. L'ion est l'Hélium doublement ionisé H_e^{++} : C'est la particule α.

5/ Soit O le centre de la terre, m la masse du satellite et r=OM : distance entre le satellite et le centre de la terre.
r= h+R_T où R_T est le rayon de la terre et h l'altitude
a- Par application de la deuxième loi de Newton : ma= G M_T/r^2

b- à r=cte, l'accélération est constante
On a V2/r = G M_T/r^2 d'où V(r) = G M_T/r

c- V=r ω et T=2π/ω d'où T^2=C r^3 avec C= 4π^2/GM_T
C'est la troisième loi de Kepler.

d- r = h+R_T $\Leftrightarrow$ h= - R_T+ (GM_T T^2/4π^2)$^{1/3}$
A.N.: h= 35775 Km

6/ Pour voir le soleil fixe à l'horizon, il faut que l'avion ait une vitesse angulaire égale à celle de la terre mais de sens opposé.

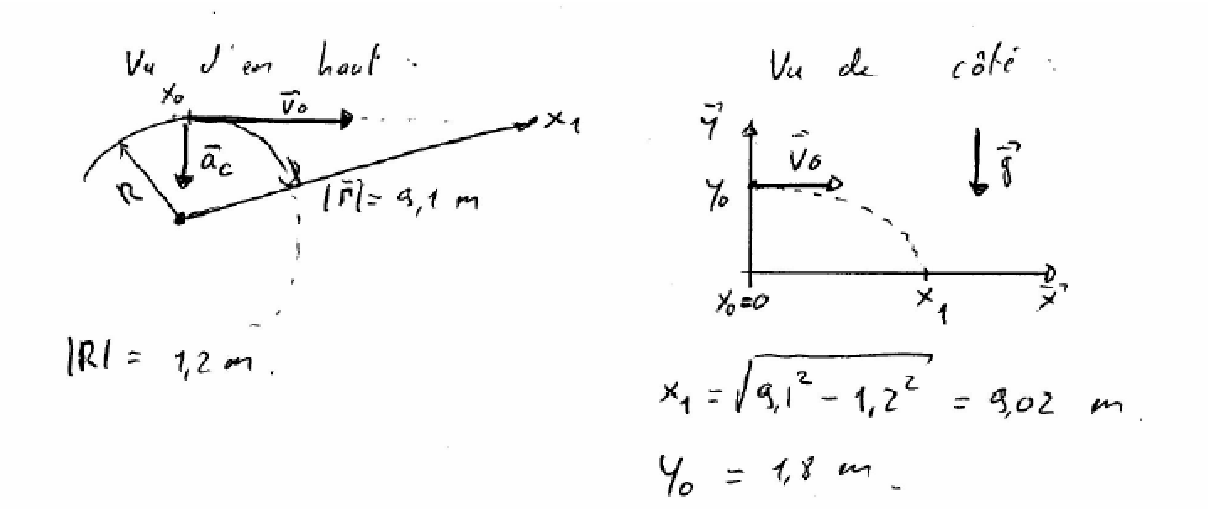
$\omega_{Terre} = \frac{2\pi}{T}$ où $T = 24\,h$

Quant à la vitesse linéaire, elle est donnée par : $V = r\omega_{Terre} = r\frac{2\pi}{T} = (R_T + h)\frac{2\pi}{T}$

R_T est le rayon de la terre et h est l'altitude

A.N. : $V = 465.8\,m/s = 1677$ km/h

7/



Suivant OY : $y(t) = y_0 - \frac{1}{2}gt^2$

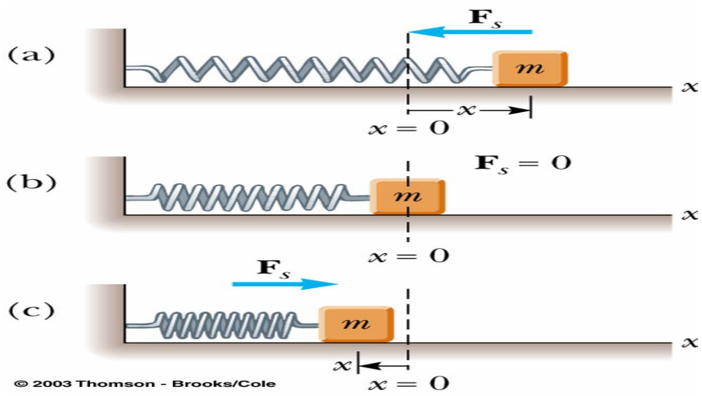
Lorsque la pierre touche le sol, $y(t) = 0 \Leftrightarrow y_0 = \frac{1}{2}gt^2$ **A.N. :** t = 0.61s

Suivant OX : $x(t) = V_x t$

A t = 0.61 s : $V_x = \frac{9.1}{0.61} = 14.92\,m/s$

L'accélération centripète vaut : $a_c = \frac{V^2}{R}$ **A.N. :** $a_c = 185.5\ m/s^2$

8/ Equation d'une masse m accrochée à un ressort horizontal



En l'absence de frottement, le poids de m est compensé par la réaction du support. Il reste la force de rappel du ressort.

Comme en cours : $-k\,x + m\dfrac{d^2x}{dt^2} = 0$

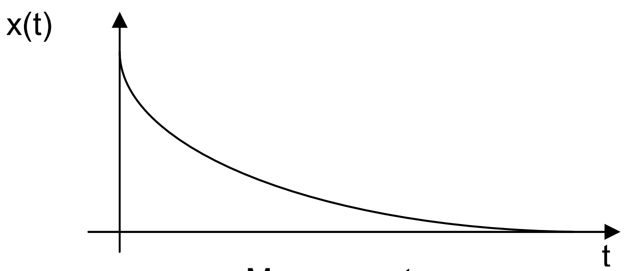
C'est l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$

9/ Mouvement oscillatoire amorti

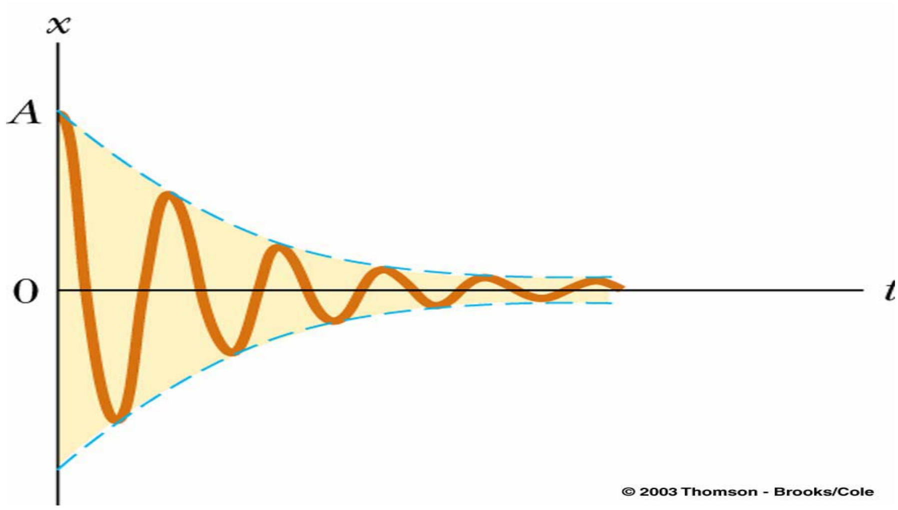
Le mouvement harmonique simple est un cas idéal. En effet, les forces de frottement interviennent pour amortir les oscillations.
L'amplitude de l'oscillation baisse plus ou moins rapidement jusqu'à s'annuler, sauf si on applique une force pour compenser les pertes causées par les frottements qui sont des forces dissipatives. Ces dernières notées $\vec{F}_d$ sont généralement proportionnelles à la vitesse $\vec{V}$: $\vec{F}_d = -\lambda\,\vec{V}$
Où λ est une constante positive appelée coefficient d'amortissement.

A une dimension : $F = -\lambda\,\dot{x}$

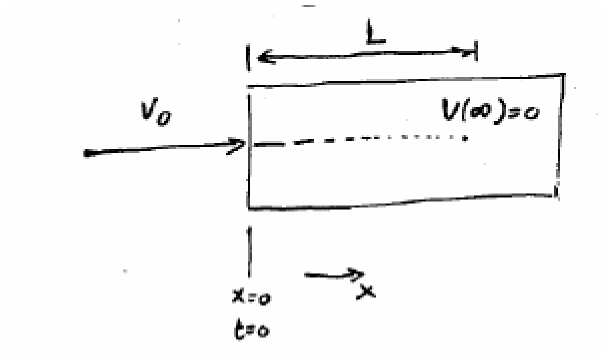
La 2ème loi de Newton devient : $-k\,x - \lambda\,\dot{x} = m\,\ddot{x}$
C'est une équation différentielle du 2ème ordre linéaire, à coefficient constants et sans second membre.
Si le frottement est très important, l'amplitude s'annule très vite : c'est le mouvement apériodique. Dans le cas contraire, on obtient un mouvement pseudo-périodique ayant une pseudo-période T = T0/ ?.



Mouvement apériodique



10/



On a : $\vec{F} = m\vec{a} \Leftrightarrow -\lambda \vec{v} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$

A une dimension : $\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{\lambda}{m} dt$

Par intégration et en tenant compte du fait que v=v_0 à t=0 : La vitesse dans un milieu visqueux est donnée par : $V(t) = V_0 \exp(-t/\tau)$ avec $\tau = \dfrac{m}{\lambda}$

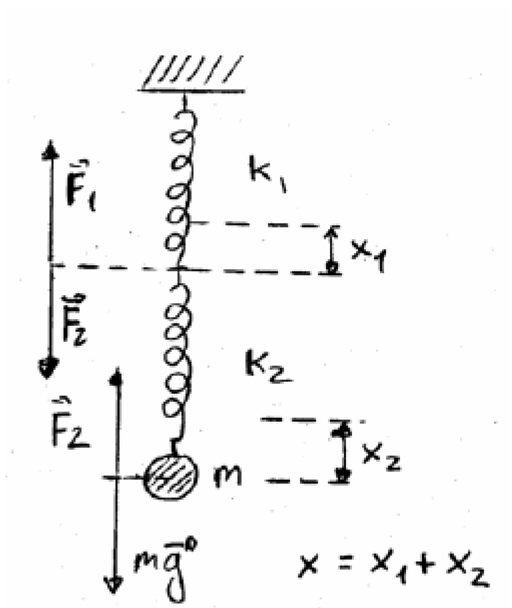
Déterminons la distance parcourue après un temps infini :

L = $\int_0^\infty V(t)dt = V_0 \int_0^\infty \exp(-t/\tau) = V_0\tau$

Or L = $V_0\tau = V_0 \dfrac{m}{\lambda}$ **A.N. :** L = 5 cm

11/

<u>Cas n°1</u> :



A l'équillibre: $\left\|\vec{F}_1\right\| = \left\|\vec{F}_2\right\|$

$K_1x_1 = F_1$ et $K_2x_2 = F_2 = mg$ D'où : $F_1 = mg$

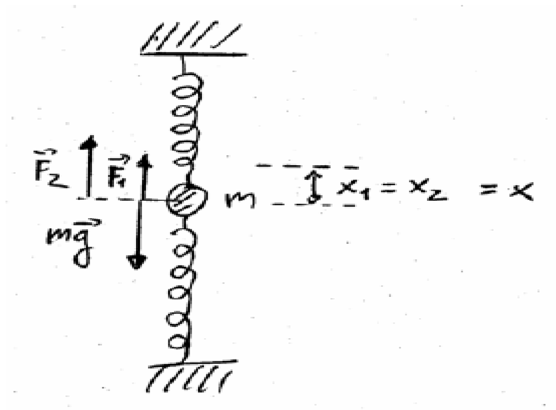
En combinant les équations, on obtient : $x_1 + x_2 = mg\dfrac{k_1 + k_2}{k_1k_2}$

Si on remplace $x_1 + x_2 = x$ et $k = \dfrac{k_1k_2}{k_1 + k_2}$, on peut écrire : $kx + mg = 0$

Hors équilibre, on a : $\dfrac{k}{m}x + \ddot{x} = 0$: c'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{1}{m}}\sqrt{\dfrac{k_1k_2}{k_1 + k_2}}$ et de fréquence $\upsilon_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{1}{m}}\sqrt{\dfrac{k_1k_2}{k_1 + k_2}}$

Cas n°2 :



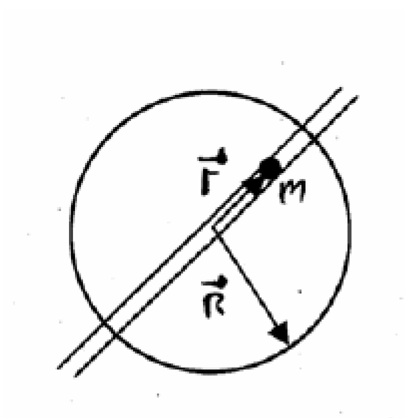
A l'équillibre: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -m\vec{g}$ ou $F_1 + F_2 = mg$

Or $x_1 = x_2 = x$, d'où : $x_1 = \dfrac{mg}{k_1 + k_2}$ d'où : $(k_1 + k_2)x + mg = 0$

Hors équilibre, on a : $\dfrac{k_1 + k_2}{m}x + \ddot{x} = 0$: C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k_1 + k_2}{m}}$ et de fréquence $\upsilon_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_1 + k_2}{m}}$

12/



On $\vec{F} = m\vec{a}$ où $a = \dfrac{GM_T(r)}{r^2}$

$M_T(r)$ étant la masse de la terre quand l'objet est à une distance r inférieure à R_T rayon de la terre.

Or $M_T(r) = \dfrac{M_T r^3}{R^3}$ d'où : $a = \dfrac{GM_T r}{R^3}$

L'équation du mouvement est alors donnée par : $m\dfrac{d^2r}{dt^2} = m\dfrac{GM_T r}{R^3}$

$\Leftrightarrow \dfrac{d^2r}{dt^2} = kr$ où $k = \dfrac{GM_T}{R^3}$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{R^3}{GM_T}}$

Comme $g_0 = \dfrac{GM_T}{R^2}$ est l'accélération de la pesanteur à la surface terrestre, on peut écrire : $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{R}{g_0}}$ **A.N. :** T= 5075 s = 1 h 24 min 35 s

13/ Pour chaque masse, on a : $m\vec{a} = \vec{F}$ avec $\vec{F} = -k\vec{d}$

Posons : $\vec{x}_2 - \vec{x}_1 = \vec{d}$

$$m_1\frac{d^2\vec{x}_1}{dt^2} = +k\vec{d} \qquad (1)$$

$$m_2\frac{d^2\vec{x}_2}{dt^2} = -k\vec{d} \qquad (2)$$

(2) x m_1 - (1) x m_2

$$m_1 m_2\left[\frac{d^2\vec{x}_2}{dt^2} - \frac{d^2\vec{x}_1}{dt^2}\right] = -k\vec{d}(m_1 + m_2)$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{d^2\vec{d}}{dt^2} = -k\,\vec{d}\,\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$ où $\frac{1}{\mu} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$.

μ est appelée masse réduite