Mécanique du point

Pr. M. Abd-Lefdil- Pr. Errougani

Université Mohammed V-Agdal
Département de Physique
Faculté des Sciences -Rabat

Année Universitaire 2013-2014

SVT-STU

Partie 1
MECANIQUE DU POINT

Introduction

La mécanique est l’étude des mouvements et des déformations que subissent les corps sous l'effet de diverses forces.

On distingue plusieurs parties dans cette étude:

- ➔ la cinématique
- ➔ la statique ou l’étude des équilibres des systèmes,
- ➔ la dynamique.

CHAPITRE 1
CINEMATIQUE DU POINT

I- 1.Définition:

C'est la partie de la mécanique qui étudie le mouvement des corps en fonction du temps indépendamment des causes qui leurs donnent naissance ou qui les modifient.

Le mouvement s’effectue le long d’une **trajectoire**, la trajectoire se trouve sur une courbe (droite, arc, …)

Mouvement: modification de la **position** d’un corps pendant un intervalle de temps. On attribue à la position du corps une ou plusieurs valeurs numériques (**coordonnées**) qui situent le corps en fonction du temps dans un **référentiel**.

Trajectoire: l’ensemble des positions successives du corps dans l’espace.

Notion de référentiel

La description du mouvement d'un point matériel exige de connaître sa position dans l'espace à tout instant. Pour cela, nous devons définir :

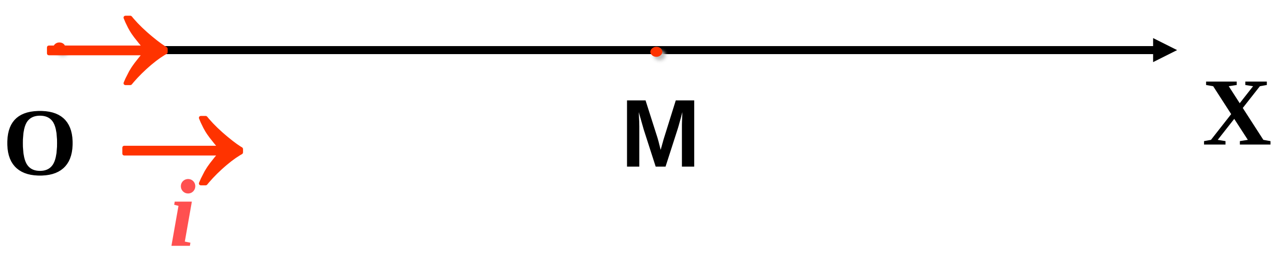
- **Un repère d'espace**
- **Une horloge**

L'ensemble repère - horloge constitue un référentiel.

A- Rappels du mouvement unidimensionnel (mouvement rectiligne)

Le mouvement d'un objet M est dit rectiligne si sa trajectoire est une droite.

On pourra alors repérer cet objet M, au cours du temps, par son abscisse par rapport à une origine O d'un axe OX.

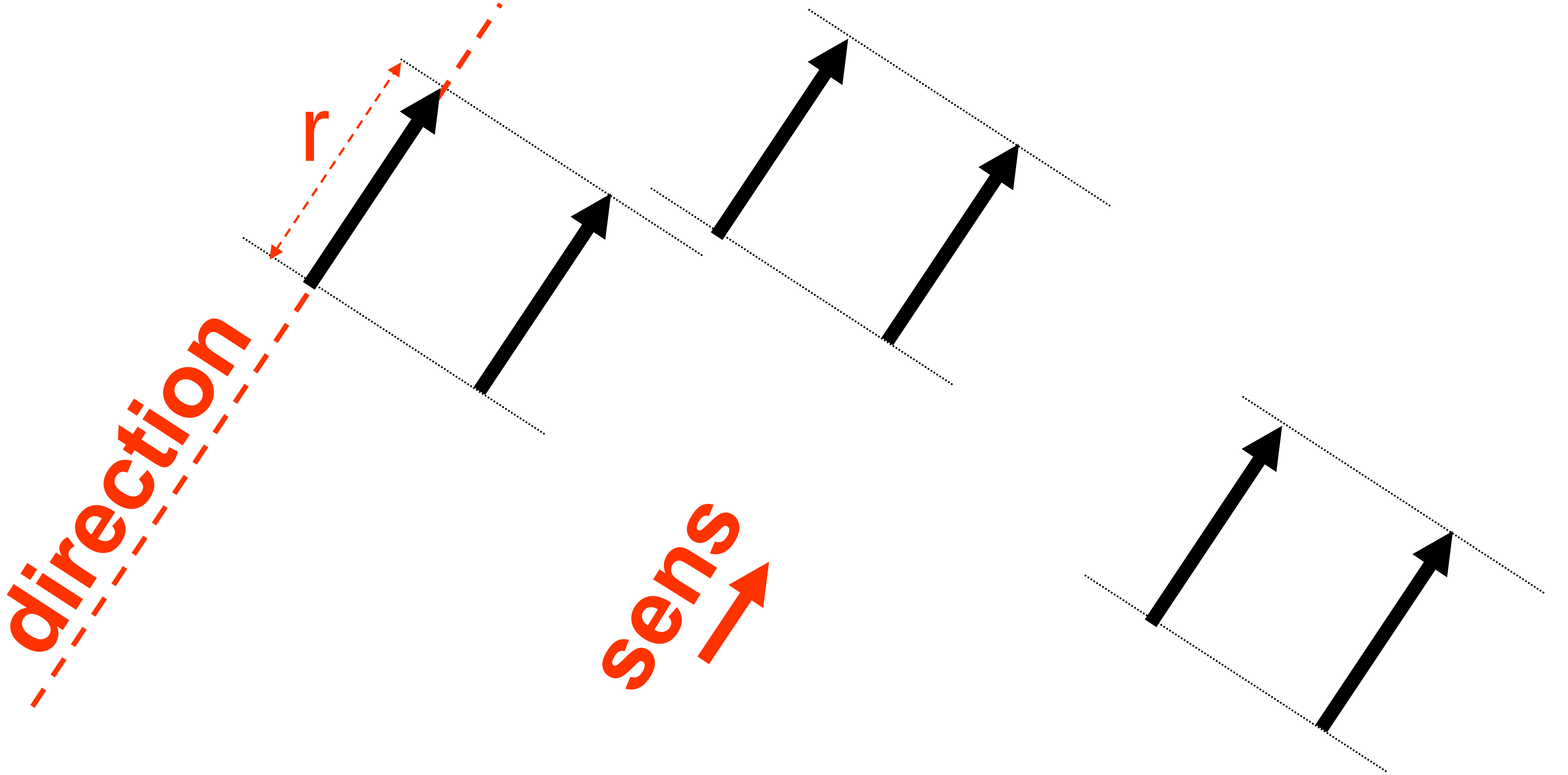


$$\overrightarrow{OM} = x \times \vec{i} = \vec{r}$$

Rappels

1-Vecteur constant

un vecteur est dit constant si sa direction "support", son sens " orientation" et son module " distance " sont tous constants

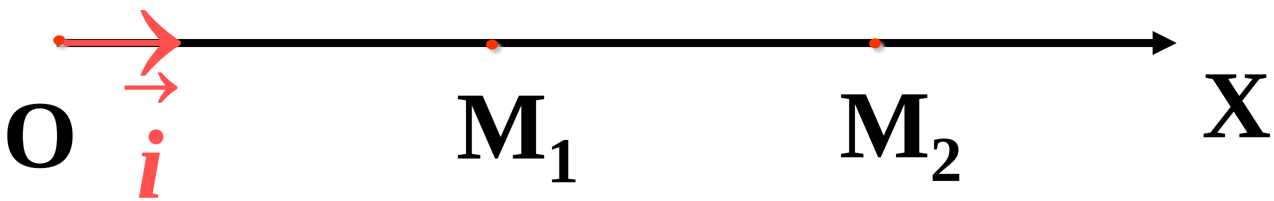


2- Déplacement

à t_1, l'objet M se trouve en M_1,

à t_2, l'objet M se trouve en M_2.

Durant l'intervalle de temps $[t_1,t_2]$, l'objet M s'est déplacé de M_1 vers M_2. On a:



$$\overrightarrow{OM_1} = x_1\,\vec{i} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OM_2} = x_2\,\vec{i}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM}_2 - \overrightarrow{OM}_1 = x_2\,\vec{i} - x_1\,\vec{i}$$

$$\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1} = (x_2 - x_1)\,\vec{i} = \Delta x\,\vec{i}$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \Delta x \, \vec{i}$$

Remarque:

Ici le vecteur $\vec{i}$ est constant.

Le vecteur vitesse moyenne est donné par:

$$\overrightarrow{V_{moy}} = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \, \vec{i}$$

Soit M de coordonnée x sur l'axe OX de base $\vec{i}$ Le vecteur position est donné par:

$$\overrightarrow{OM} = x \times \vec{i} = \vec{r}$$

Quant au vecteur vitesse instantanée $\vec{V}$, il est donné par:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{V}_{moy} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \vec{i} \right)$$

$$\vec{V} = \left(\left[\lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right) \right] \right) \vec{i} = \frac{dx}{dt} \vec{i}$$

$$\vec{V} = \frac{d}{dt} (x \vec{i}) = \frac{d}{dt} (\overrightarrow{OM}) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Caractéristique du vecteur vitesse $\vec{V}$

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

- **Point d'application est:** M
- **Direction est:** **La tangente à la trajectoire**
- **Sens est:** **est celui du déplacement de M**
- **Module est:** $V > 0$

Durant l'intervalle de temps $[t_1,t_2]$, la vitesse de l'objet M passe de $\vec{V}_1$ à $\vec{V}_2$. On a:

$$\overrightarrow{a}_{moy} = \frac{\overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \overrightarrow{V}}{\Delta t}$$

$$(\Delta \overrightarrow{V} \ // \ \overrightarrow{a}_{moy})$$

Accélération moyenne:

$$\vec{a}_{moy} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$

Accélération instantanée:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta V_x}{\Delta t}\vec{i} = \frac{dV_x}{dt}\vec{i}$$

$$= a_x \vec{i} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

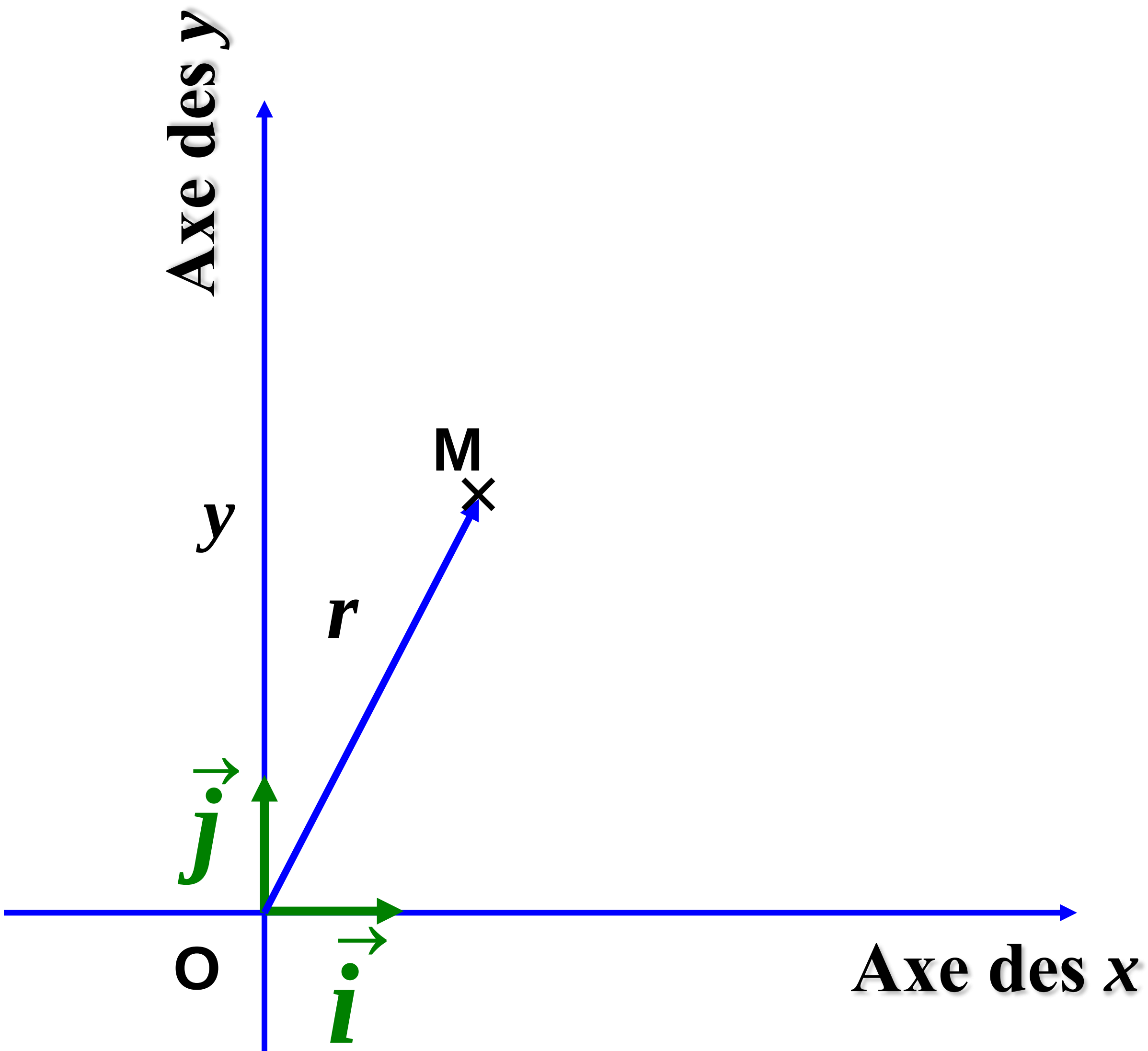
- **Si un mouvement rectiligne se fait à vitesse constante, on dira qu’il est rectiligne et uniforme.**

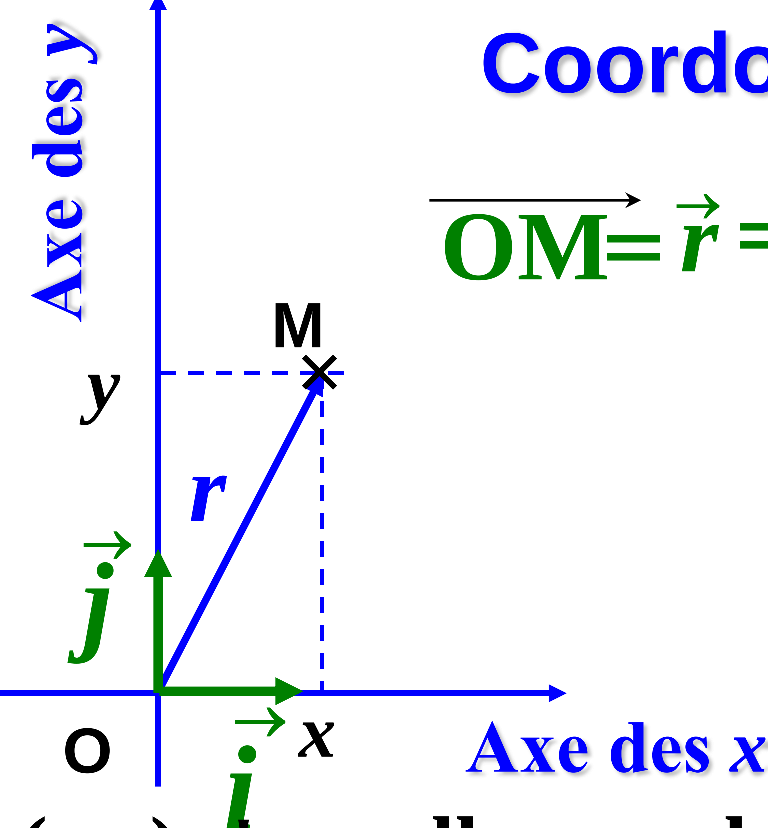
- **Si un mouvement rectiligne se fait à accélération constante, on dira qu’il est rectiligne et uniformément varié.**

B-Mouvement bidimensionnel (dans le plan)

Vecteurs à 2 Dimensions

Dans le plan, il existe plusieurs façons de repérer un point.





Coordonnées cartésiennes (x,y)

$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$: **vecteur position**

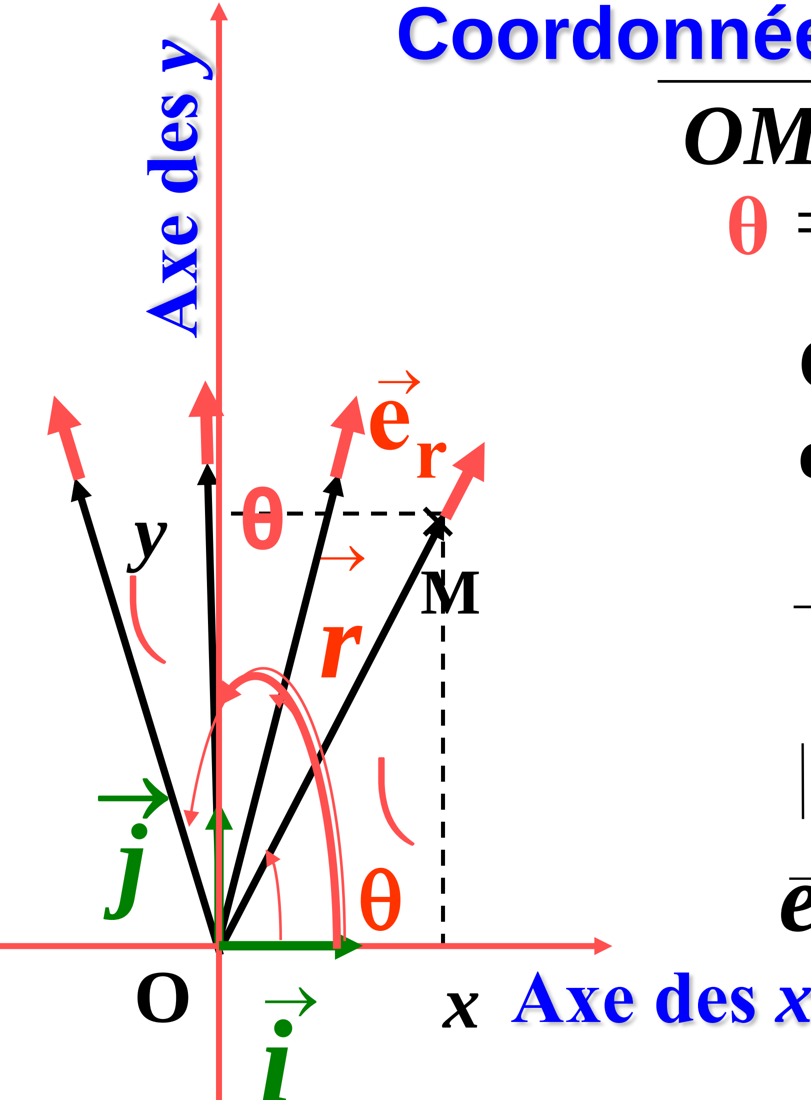
x : ***abscisse*** **et** y : ***ordonnée***

(x,y) s'appelle coordonnées cartésiennes du point M dans le repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$

Ortho: $\vec{i} \times \vec{j} = 0$

normé: **vecteurs unitaires le long des axes positives ox et oy** $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = 1$

Coordonnées polaires (r,θ)



$\overrightarrow{OM}$ *vecteur position*

$$\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \theta\,(t)$$

Coordonnées cartésiennes
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ \dfrac{y}{x} = tg\,\theta \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\vec{e}_r$$

$$\|\vec{r}\| = \sqrt{\vec{r}\,\vec{r}} = \sqrt{x^2 + y^2} = r > 0$$

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\vec{i} + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\vec{j}$$

$\vec{e}_r$ **est un vecteur** ***unitaire, donc*** $\vec{e}_r \times \vec{e}_r = 1.$

Son module est constant mais pas sa direction et son sens donc ce n'est pas un vecteur constant

Comment passer des coordonnées cartésiennes(x;y) aux coordonnées polaires (r; θ) ?

$$r = \mathrm{OM} = \sqrt{x^2 + y^2}$$ **On en déduit r**

$$\left.\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{x}{r} \\ \sin\theta &= \frac{y}{r} \end{aligned}\right\}$$ **On en déduit θ**

Comment passer des coordonnées polaires (r; θ) aux coordonnées cartésiennes (x ; y) ?

$$x = r\cos\theta$$ **On en déduit x**

$$y = r\sin\theta$$ **On en déduit y**

- Vecteur position:

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$$

x et *y* sont les composantes du vecteur position.

- Vecteur Vitesse:

$$\vec{V} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} = V_x\,\vec{i} + V_y\,\vec{j}$$

V_x et V_y sont les composantes du vecteur vitesse. Avec:

$$\dot{x} = V_x = \frac{d(x)}{dt} \quad \text{et} \quad \dot{y} = V_y = \frac{d(y)}{dt}$$

$$\vec{V} = \frac{d}{dt}(x\,\vec{i} + y\,\vec{j}) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM}) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

- Vecteur accélération:

$$\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} = \dot{V}_x\,\vec{i} + \dot{V}_y\,\vec{j}$$

a_x et a_y sont les composantes du vecteur accélération.

Avec:

$$a_x = \ddot{x} = \dot{V}_x = \frac{d^2(x)}{dt^2} \quad \text{et} \quad \ddot{y} = \dot{V}_y = \frac{d^2(y)}{dt^2}$$

$$\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} = \frac{dV_x}{dt}\,\vec{i} + \frac{dV_y}{dt}\,\vec{j} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\,\vec{OM}}{dt}\right) = \frac{d^2\,\vec{OM}}{dt^2}$$

Caractéristiques du mouvement bidimensionnel

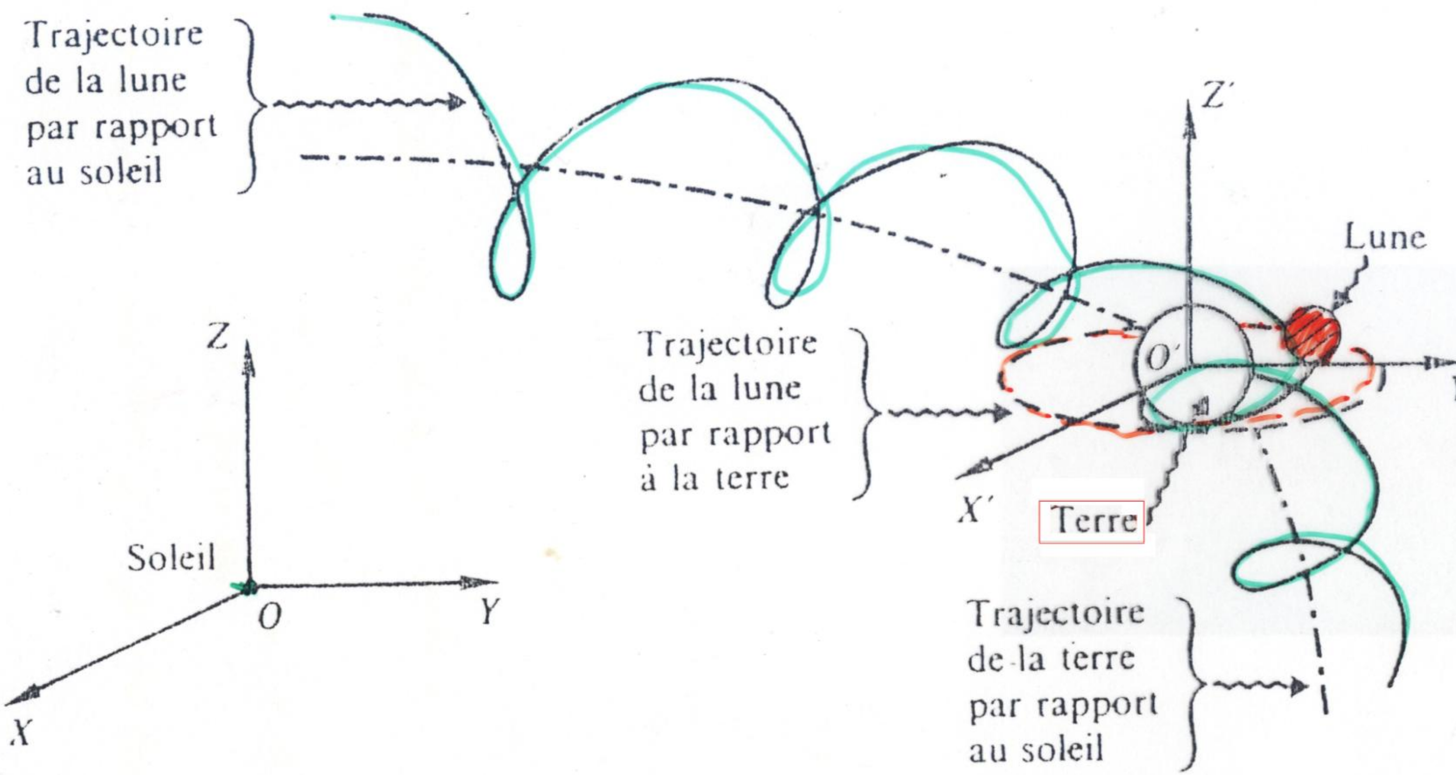
➔ les mouvements suivant X et Y sont indépendants. Ils peuvent être traités comme 2 problèmes séparés.

➔Le problème du mouvement plan se ramène à 2 problèmes de mouvements rectilignes simultanés.

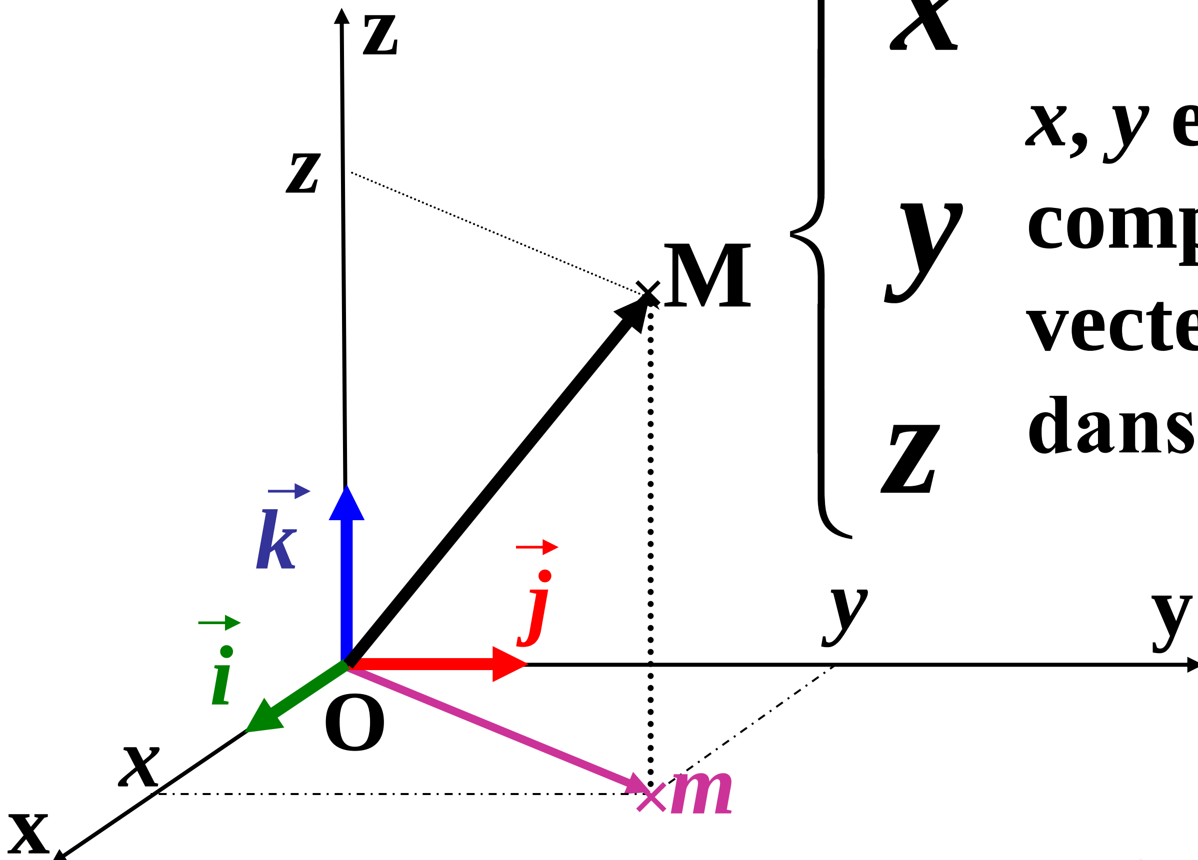
- **Pour connaitre la trajectoire (y en fonction de x)**

  1. **résoudre x(t) et y(t) appelées équations horaires.**
  2. **Substituer une équation. Pour avoir t en fonction de x**
  3. **Insérer t(x) dans y(t) pour avoir y(x) qu’on appele équation cartésienne du mouvemnt.**

C-Mouvement tridimensionnel (dans l'espace)



Système de coordonnées cartésiennes



$$\left\{ \begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array} \right.$$

x, *y* et *z* sont les composantes du vecteur position dans l'espace

$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + z\,\vec{k}$ **avec** $\overrightarrow{Om} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$

$$\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

- Vecteur position:

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

x, *y* et *z* sont les composantes du vecteur position dans le repère $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

- Vecteur Vitesse:

$$\overrightarrow{V} = \dot{x}\,\vec{i} + \dot{y}\,\vec{j} + \dot{z}\,\vec{k} = V_x\,\vec{i} + V_y\,\vec{j} + V_z\,\vec{k}$$

V_x , V_y et V_z sont les composantes du vecteur vitesse. Avec:

$$\dot{x} = V_x = \frac{d(x)}{dt} \;;\; \dot{y} = V_y = \frac{d(y)}{dt} \text{ et } \dot{z} = V_z = \frac{d(z)}{dt}$$

V_x ; V_y et V_z sont les composantes du vecteur vitesse.

$$\overrightarrow{V} = \frac{d}{dt}(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM}) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

- Vecteur accélération:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\,\vec{OM}}{dt}\right) = \frac{d^2\,\vec{OM}}{dt^2}$$

$$\vec{a} = \frac{dV_x}{dt}\vec{i} + \frac{dV_y}{dt}\vec{j} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$$

a_x , a_y et a_z sont les composantes du vecteur accélération.

- Vecteur accélération:

$$\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j} + \ddot{z}\,\vec{k} = \dot{V}_x\,\vec{i} + \dot{V}_y\,\vec{j} + \dot{V}_z\,\vec{k}$$

a_x ; a_y et a_z sont les composantes du vecteur accélération. Avec:

$$a_x = \ddot{x} = \dot{V}_x = \frac{d^2(x)}{dt^2} \; ; \; \ddot{y} = \dot{V}_y = \frac{d^2(y)}{dt^2} \; ; \; \ddot{z} = \dot{V}_z = \frac{d^2(z)}{dt^2}$$

$$\vec{a} = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j} + a_z\,\vec{k}$$

$$= \frac{dV_x}{dt}\vec{i} + \frac{dV_y}{dt}\vec{j} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right) = \frac{d^2\,\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

Exemples de mouvements

(voir TD 1)

On distingue :

- **Mouvement rectiligne uniforme** : la trajectoire se trouve sur une droite, la vitesse est constante en direction et en norme. Le vecteur vitesse V est constant, en direction et en norme.

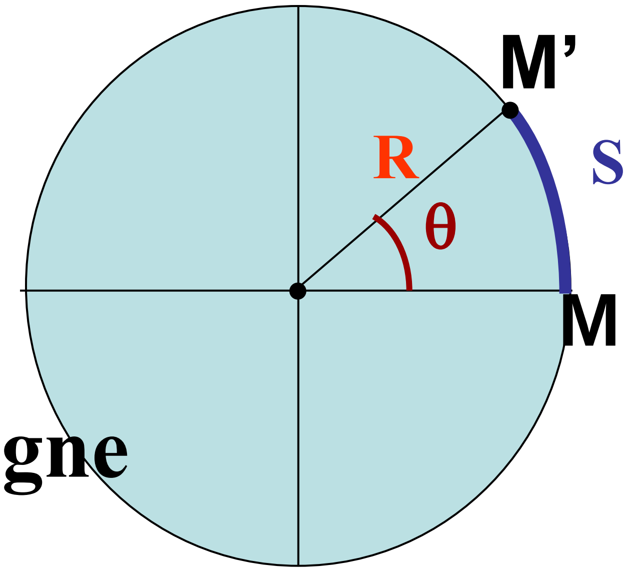
- **Mouvement rectiligne uniformément accéléré :** la trajectoire se trouve sur une droite, la direction du déplacement est constante, mais la norme de la vitesse varie au cours du temps (augment ou diminue). L'accélération (ou la décélération) est constante. Le vecteur vitesse V est constant en direction, mais

- **Mouvement rectiligne varié :** l'accélération n'est pas constante dans le temps.

- **Mouvement circulaire uniforme :** la trajectoire se trouve sur un cercle ou un arc de courbe. La norme du vecteur vitesse V est constante, mais sa direction change.

- **Mouvement curviligne :** la trajectoire se trouve sur une courbe. La norme du vecteur vitesse et sa direction changent au cours du temps.

1- Mouvement circulaire,



$S = R\,\theta$

(où S et R sont mesurés en mètre et θ en radian)

$S = \overset{\frown}{MM'}$ **est appelé abscisse curviligne**

Déplacement angulaire : dθ

$$\text{Vitesse(m/s)} = \frac{dS}{dt} = \frac{d(R\theta)}{dt} = R\,\frac{d\theta}{dt} = R\dot{\theta}$$

Vitesse angulaire $\omega = d\theta/dt$ (en radians/seconde)

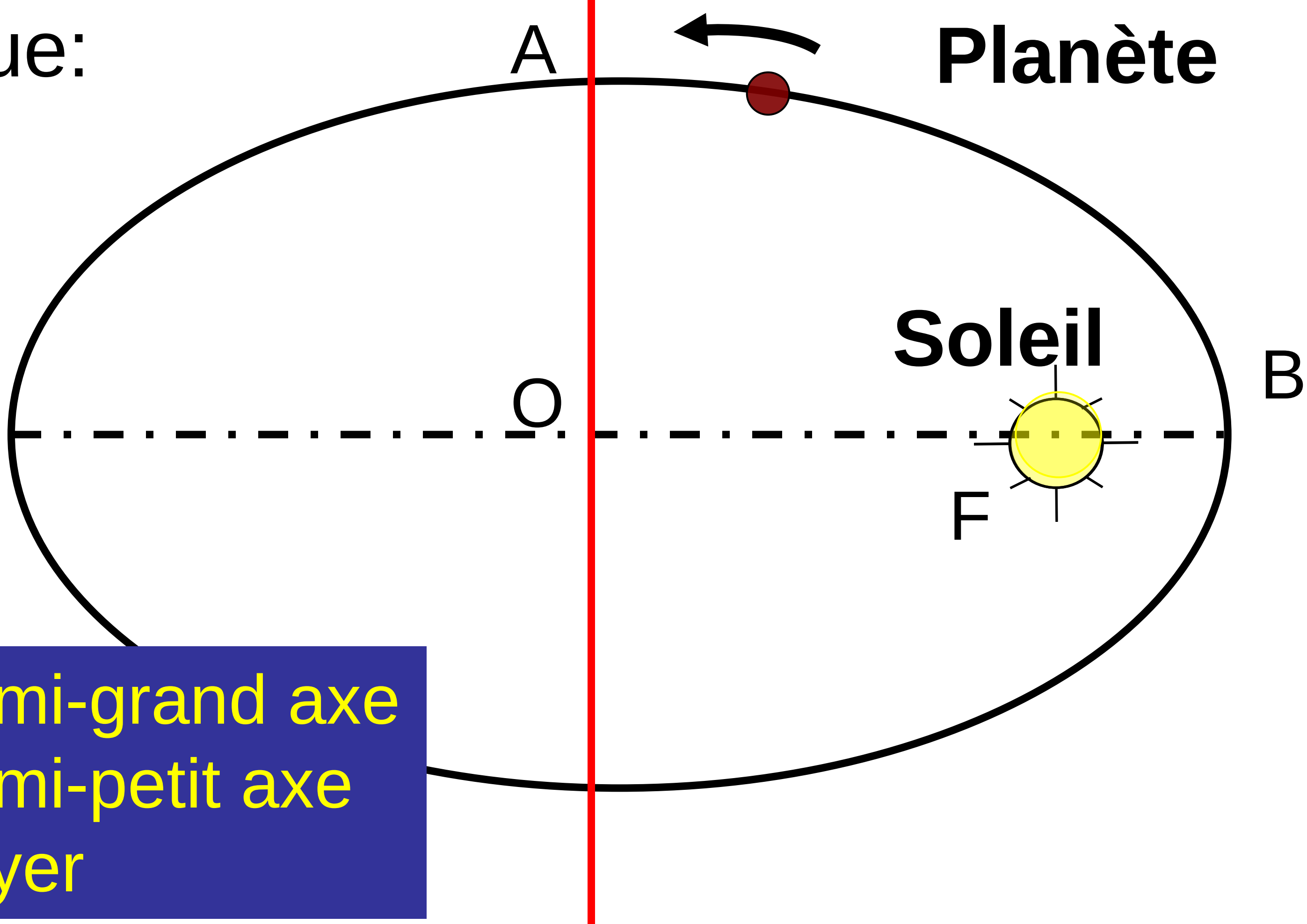
2- Mouvement elliptique

les centres P des planètes décrivent des orbites elliptiques ayant le centre S du Soleil pour foyer.

Le centre de gravité de la planète décrit une ellipse d'équation paramétrique:

$$x = a \cos t,$$

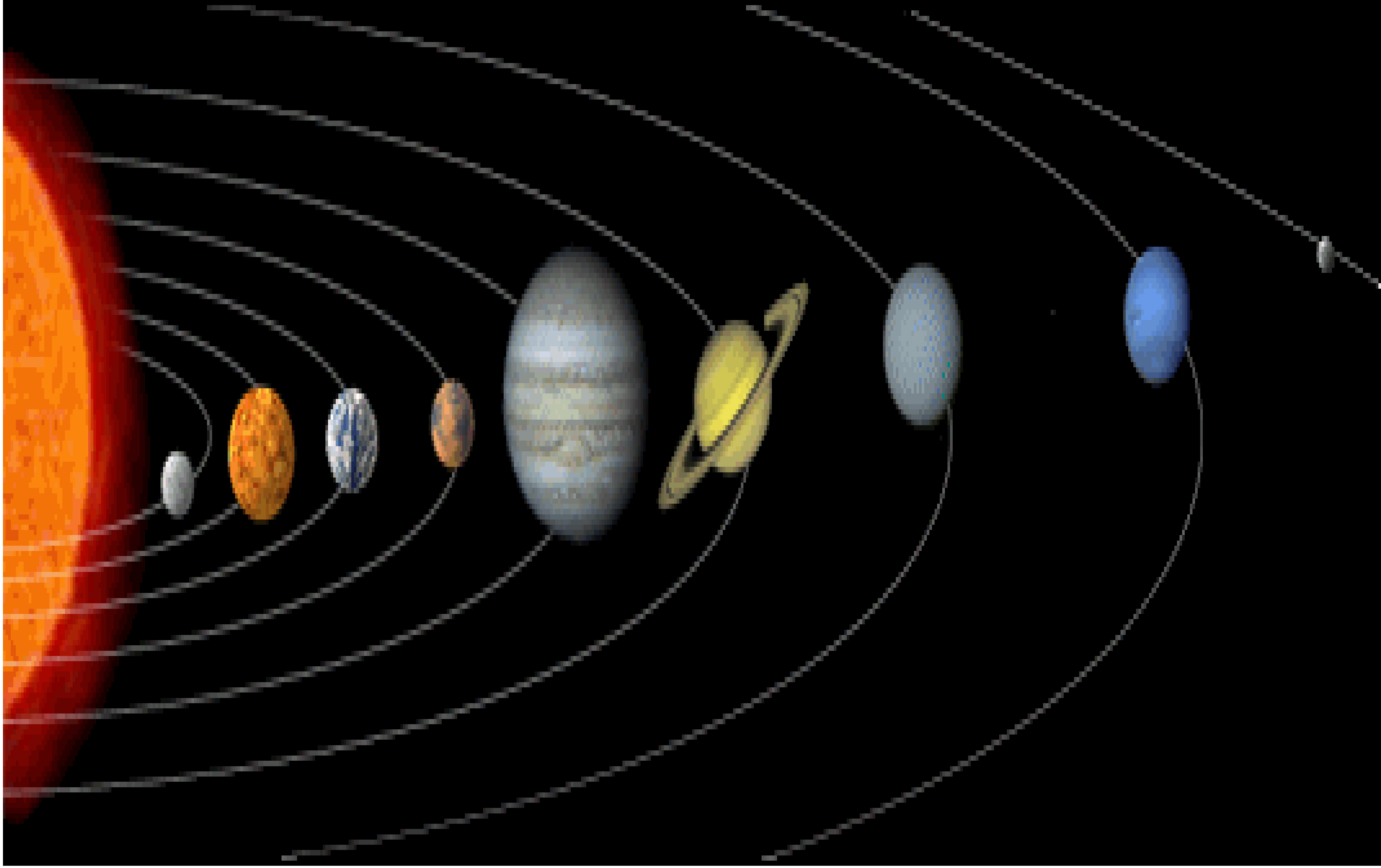
$$y = b \sin t.$$



OB= a: demi-grand axe

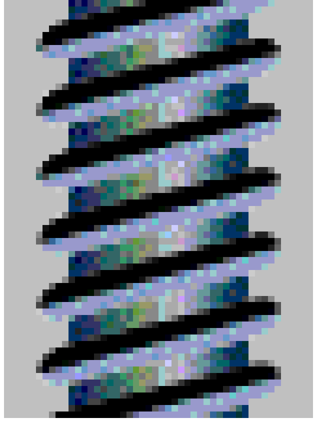
OA= b: demi-petit axe

OF= c: Foyer



Tous les corps célestes qui composent le système solaire gravitent autour du soleil suivant des orbites elliptiques.

3- Mouvement hélicoïdal



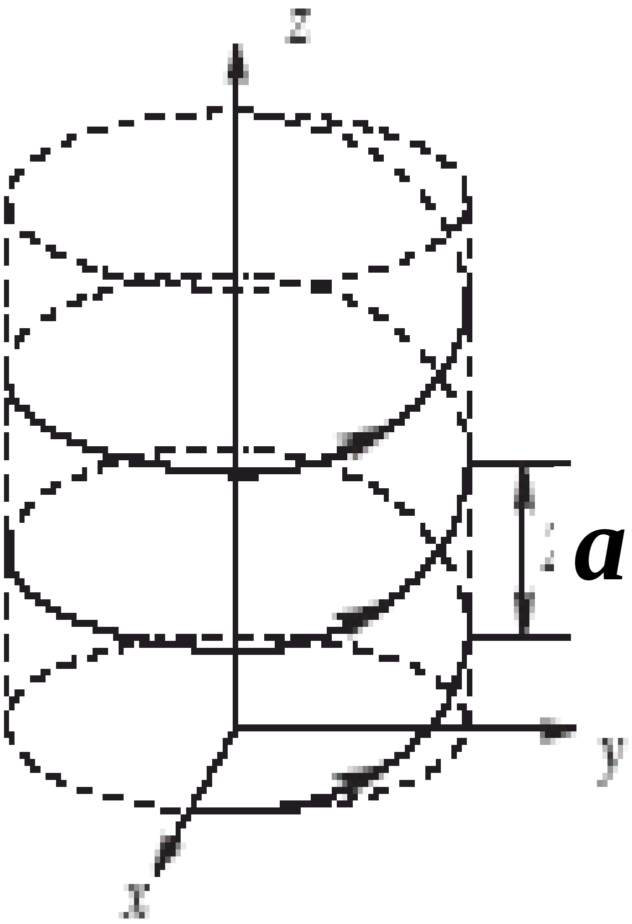
Cette animation représente le mouvement hélicoïdal d'un point matériel P.

Les équations paramétriques (en fontion du temps) de l'hélice sont données par :

$$x = R.\cos(\omega.t)$$

$$y = R.\sin(\omega.t)$$

$$z = a.t$$



Si le pas a de l'hélice est nul, on retrouve un mouvement circulaire uniforme

4- Mouvement cycloïde.

C'est la trajectoire dessinée par un point d'une roue par rapport au sol :