MECANIQUE QUANTIQUE
Chapitre 5 :
Postulats de la mécanique quantique

Pr. M. ABD-LEFDIL
Université Mohammed V- Agdal
Faculté des Sciences
Département de Physique
Année universitaire 06-07
Filières SM-SMI

Introduction

Après avoir vu le formalisme mathématique de la mécanique quantique, nous allons énoncer ses postulats, qui sont valables pour tout système quantique y compris bien sûr la mécanique ondulatoire d'une particule dans l'espace.

Description quantique d'un système physique:
Etat du système, ses observables et son évolution dans le temps

1 er postulat
PRINCIPE DE SUPERPOSITION :

- L'état d'un système est entièrement défini, à chaque instant, par la donnée d'un vecteur ket $|\psi>$ appartenant à l'espace des états ξ_n.

  $|\psi>$ est équivalent à $\psi(x,t)$ qui est une fonction de carré sommable.

2 ème postulat
DESCRIPTION MATHEMATIQUE D'UNE GRANDEUR PHYSIQUE

- A toute grandeur physique mesurable A est associée un opérateur linéaire hermitique agissant dans l'espace des états.

  $A=A^+$: $<\psi_1|A|\psi_2> = <\psi_2|A|\psi_1>^*$

Matrice ligne

Matrice colonne

Matrice carrée

A est l'observable associée à la grandeur physique A.

3 ème postulat
MESURES DES GRANDEURS PHYSIQUES - PRINCIPE DE QUANTIFICATION :

- La mesure d'une grandeur physique A ne peut donner comme résultat que l'une des valeurs propres de l'opérateur correspondant à A.

Remarque :A étant une observable, ses valeurs propres sont donc réelles.

4 ème postulat
DECOMPOSITION SPECTRALE :

- **Cas discret dégénéré:**

La probabilité P_{a_n} de trouver, lors de la mesure de l'observable A, la valeur propre a_n est :

$$P_{a_n} = \left| \frac{\sum_i < U_n^i \mid \psi >}{< \psi \mid \psi >} \right|^2$$

Avec

$$|\psi\rangle = \sum_n \sum_{i=1}^{g_n} C_n^i \, |U_n^i\rangle$$

- g_n est le degré de dégénérescence.
- $\{|U_n^i>\}$ un système orthonormé de vecteurs formant une base dans le sous-espace propre de ξ_n associé à la valeur propre a_n .

$$\boxed{P_{a_n} = \sum_i \left|C_n^i\right|^2}$$

Notons que la probabilité totale est égale à l'unité:

$$\boxed{\sum_n P_{a_n} = 1}$$

- Cas d'un spectre continu et non dégénéré:

Lorsqu'on mesure la grandeur physique A sur un système quantique se trouvant dans L'état normé $|\psi>$, la probabilité dP_a d'obtenir une valeur comprise entre a et a+da est:

$$dP_a=|<V_\alpha|\psi>|^2\ da$$

Où $|V_\alpha>$ est le vecteur associé à la valeur propre a de l'observable A .

5 ème postulat
REDUCTION DU PAQUET D'ONDES

- Si la mesure de l'observable A sur le système dans l'état $|\psi>$ donne la valeur propre a_n , alors l'état du système immédiatement après la mesure ayant donné la valeur a_n est la projection normée de $|\psi>$, soit :

$$\boxed{\frac{P_n\,|\,\psi>}{\left[<\psi\,|\,P_n\,|\,\psi>\right]^{1/2}}}$$

Remarque: Il est impossible de prévoir à l'avance avec certitude vers quel état quantique le système va passer. On ne peut que faire des prévisions statistiques : C'est le concept d'indéterminisme.

$|\psi>$: Etat avant la mesure

Mesure de A

||

résultat de la mesure a_n

$|\psi_n>$: Etat après la mesure

6 ème postulat
EVOLUTION DES SYSTEMES DANS LE TEMPS :

- L'évolution du vecteur ket $|\psi>$ dans le temps est donnée par l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{\partial |\psi>}{\partial t} = H|\psi>$$

Opérateur d'évolution

- Soit un système physique décrit par un ket $|\psi>$.
  On définit l'opérateur $U(t,t_0)$ qui permet de déterminer $|\psi(t)>$ à partir de $|\psi(t_0)>$:

$$|\psi(t)> = U(t,t_0)\,|\psi(t_0)>$$

On montre aisément que:

- $U(t_0,t_0)=1$
- $U(t,t_1)\,U(t_1,t_0)= U(t,t_0)$
- $U(t,t')\,U(t',t)= 1$
- A partir de l'équation de Schrödinger, on montre que:

$$U(t,t_0) = 1 - \frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} H(t')\,U(t',t_0)\;dt'$$

- **Cas particulier d'un système stationnaire :**

H indépendant explicitement du temps.

$H |\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle$ (cas stationnaire).

Supposons pour simplifier les écritures que les valeurs propres E_n ne sont pas dégénérées.

L'ensemble des $|\psi_n\rangle$ forme une base suivant laquelle on peut développer n'importe quel vecteur $|\psi\rangle$.

a) Soit à $t = t_0$: $|\psi(t_0)\rangle = C_n(t_0)\ |\psi_n\rangle$

où $C_n(t_0)= \langle\psi_n|\psi(t_0)\rangle$

b) A l'instant t : $|\psi(t)\rangle = C_n(t)|\psi_n\rangle$

On montre que :

$$\left|\psi(t)\right\rangle = \sum_n C_n(t_0)\exp\left(-i\frac{E_n}{\hbar}(t-t_0)\right)\left|\psi_n\right\rangle$$

THEOREME D'EHRENFEST :

- Il traduit l'évolution de la valeur moyenne d'une observable au cours du temps ($\langle\psi|\psi\rangle = 1$):

$$\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\left\langle\psi\middle|A\middle|\psi\right\rangle\right) = \left\langle\frac{dA}{dt}\right\rangle + \frac{1}{i\hbar}\left\langle[A,H]\right\rangle$$

CONSTANTE DU MOUVEMENT :

Une observable A est dite constante du mouvement si:

$$\frac{d\langle A\rangle}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\langle\frac{dA}{dt}\right\rangle = 0 \quad \text{et} \quad [A,H] = 0$$

- **Remarque :**

  $[A,H] = 0$: il existe donc un système de vecteurs propres communs à A et H (d'après le chapitre 4).

  Soit les $|\psi_n\rangle$ cet ensemble de vecteurs propres:

  $A|\psi_n\rangle = a_n |\psi_n\rangle$ et $H|\psi_n\rangle = E_n |\psi_n\rangle$

  Comme les $|\psi_n\rangle$ sont des états stationnaires :

  à t_0, la mesure de A donne a_n

  à t_0, la mesure de H donne E_n

  à t_1, la mesure de A donne a_n

  à t_i, la mesure de A donne a_n

  à t_j, la mesure de H donne E_n

  La valeur propre a_n est appelée **bon nombre quantique**:

$$\boxed{\frac{dP_{a_n}}{dt} = 0}$$