

Rappels et compléments de mathématiques

Série de Fourier

Soit une fonction $f(x)$ définie dans l'intervalle $[-L, +L]$ et déterminée à l'extérieur par $f(2L+x)=f(x)$. On suppose que toutes les conditions de Dirichlet sont vérifiées.

On définit le développement de Fourier ou série de Fourier (SF) par:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right]$$

a_n et b_n sont appelés coefficients d Fourier:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$
$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Sous forme complexe, le développement de Fourier s'écrit:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i \frac{n\pi x}{L}}$$

Avec

$$C_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} f(x) e^{-i \frac{n\pi x}{L}} dx$$

Relation de Parseval- Bessel

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} |f(x)|^2 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} [a_n^2 + b_n^2]$$

Transformée de Fourier

Une fonction non périodique peut-être considérée comme périodique avec une période infinie.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{i \frac{n\pi x}{L}}$$

$$f(x) = \sum_n \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} f(y) e^{-i \frac{n\pi y}{L}} dy \right] e^{i \frac{n\pi x}{L}}$$

Posons:

$$\frac{n\pi}{L} = k_n$$

On peut écrire

$$\frac{1}{2L} = \frac{1}{2\pi} (k_{n+1} - k_n)$$

$$L \rightarrow \infty : \frac{1}{2L} \rightarrow 0 \text{ et } k_{n+1} - k_n = \Delta k \rightarrow dk$$

et

$$\sum \rightarrow \int \text{ et } \frac{1}{2L} \rightarrow \frac{dk}{2\pi}$$

f(x) s'écrit alors:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-iky} dy \right] e^{ikx}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{-iky} dy$$

C'est la transformée de Fourier de la fonction f(y) notée T.F.(f(y))

D'où

$$\text{T.F.}(f(x)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx = F(k)$$

**C'est la transformée de Fourier
de la fonction $f(x)$ notée $\text{T.F.}(f(x))$**

Et

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{+ikx} dk = \text{T.F.}^{-1}(F(k))$$

T.F.^{-1} est la T.F. inverse

Remarques

Les constantes figurant devant les intégrales (T.F. directe et T.F. inverse) n'ont aucune importance dans la mesure où leur produit est égal à $\frac{1}{2\pi}$.

Pour cette raison, nous allons choisir deux constantes égales (qui répondent à la condition citée ci-dessus)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

et afin d'avoir des expressions de T.F. directe et T.F. inverse symétriques. En conséquence:

$$\text{T.F.}(f(x)) = F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

$$f(x) = \text{T.F.}^{-1}(F(k)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{+ikx} dk$$

Propriétés de la T.F.

$$\text{T.F.}(af(x) + b(g(x))) = a\text{T.F.}(f(x)) + b\text{T.F.}(g(x))$$

$$\text{T.F.}(f(ax)) = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{k}{a}\right)$$

$$\text{T.F.}(f(x - b)) = e^{-ikb} F(k)$$

$$\text{T.F.}(f^{(n)}(x)) = (ik)^n F(k)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(k)|^2 dk$$

Egalité de Parseval- Plantherel

Théorème de convolution

Soient deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ tq:
 $\text{T.F.}(f(x))=F(k)$ et $\text{T.F.}(g(x))=G(k)$.

On définit le produit de convolution de f et g par :

$$h(x) = f * g = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g(x - y) dy$$

On montre que: (Voir T.D. n°2)

$$\text{T.F.}(h(x)) = \text{T.F.}(f * g) = F(k) G(k)$$

Fonction de Dirac

Soit $\delta^\varepsilon(y-y_0)$ une fonction définie autour de y_0 dans un domaine de largeur ε où elle a une valeur appréciable.

Si ε tend vers zéro, δ aura une seule valeur appréciable au point $y=y_0$. En plus:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^\varepsilon(y - y_0) dy = 1$$

Exemples:

$$\delta^\varepsilon = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{si } |y - y_0| < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

On a bien:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta^\varepsilon(y - y_0) dy = \int_{-\frac{\varepsilon}{2}}^{+\frac{\varepsilon}{2}} \frac{1}{\varepsilon} dy = 1$$

Propriétés de δ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

$$\text{T.F.}(\delta(x - x_0)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \delta(x - x_0) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_0}$$

$$\begin{aligned} \text{T.F.}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_0}\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx_0} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+ik(x-x_0)} d\lambda = \delta(x - x_0) \end{aligned}$$

$$\text{T.F.}(\delta(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\text{T.F.}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = \delta(x)$$

$$\delta(x) = \delta(-x)$$

$$\delta(Cx) = \frac{1}{C} \delta(x)$$