Chapitre 3

Transferts de chaleur par conduction

INTRODUCTION

Un transfert d'énergie a lieu chaque fois :

- qu'un gradient de température existe à l'intérieur d'un système,

- ou lorsque deux systèmes à températures différentes sont mis en contact.

Le processus par lequel le transfert de l'énergie s'effectue est désigné par les termes :

Transmission de chaleur

ou

Echange énergétique

La grandeur transférée, appelée chaleur,

ne peut être mesurée ni observée,

mais les effets qu'elle produit sont sujets à l'observation et aux mesures.

Les principes de thermodynamique qui sont basés sur ces observations

ont été réunis dans des lois qui sont supposées régir
tous les phénomènes se présentant dans la nature.

Le transfert peut être défini comme

la transmission d'énergie

d'une région à une autre

sous l'influence d'un gradient.

On retrouve généralement quatre modes de transmission :

La conduction

Le rayonnement

La convection

Le transfert par chaleur latente.

Les mécanismes des deux premiers modes conduction et rayonnement dépendent uniquement de l'existence d'un gradient de température.

Les mécanismes des deux derniers modes convection et transfert par chaleur latente dépendent aussi bien de la différence de température que d'un mécanisme de transfert de masse.

Plan

3.1 Exemples sur les transferts de chaleur

3.2 Loi de Fourier

3.3 Équation fondamentale de transfert chaleur

3.4 Phénomènes linéaires de conduction thermique

3.5 Problème cylindrique de conduction thermique

3.6 Mesure des conductivités thermiques en régime stationnaire

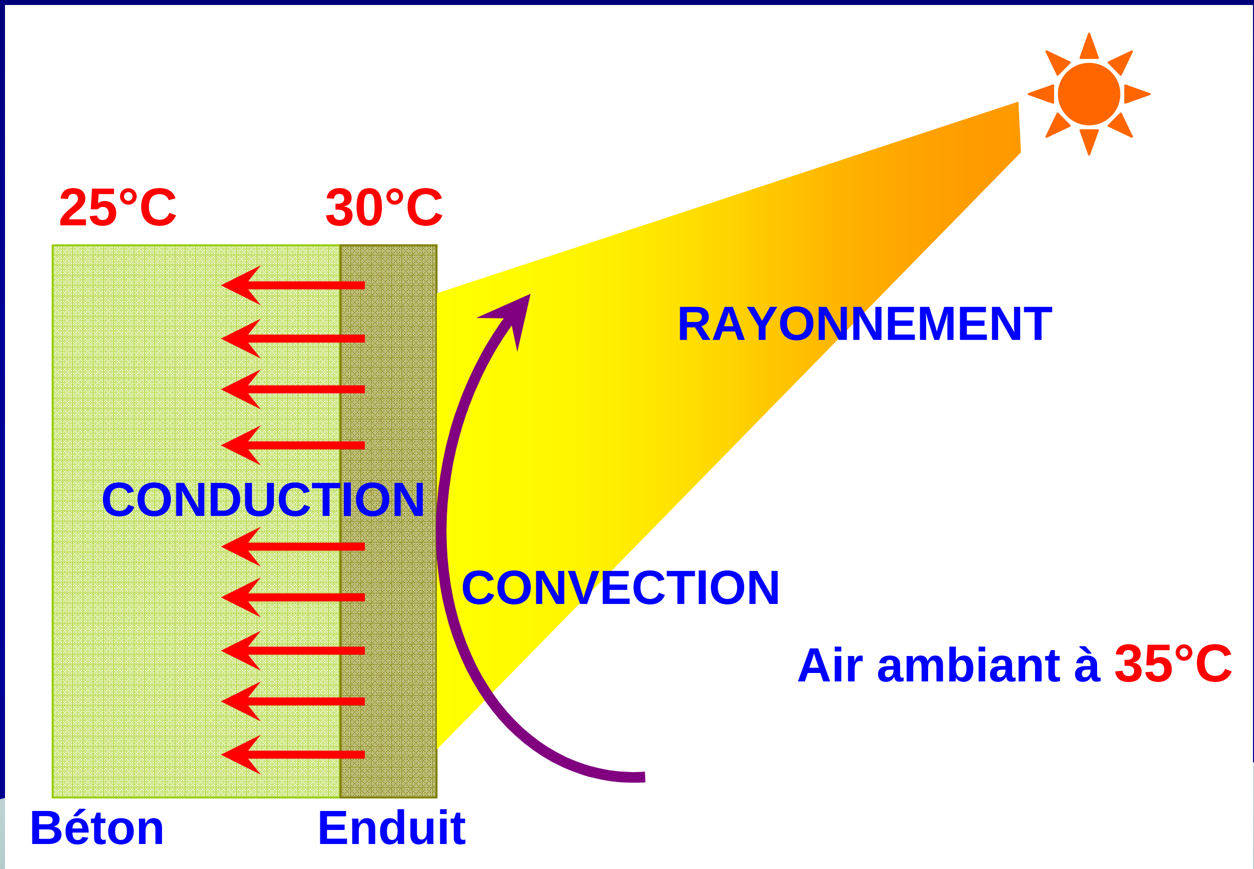
3.1

Exemples de transfert chaleur par conduction

Apports de chaleur et déperditions d'un mur

La paroi extérieure du mur (enduit) reçoit de la chaleur par rayonnement et par convection.

Elle cède de la chaleur au mur de béton par conduction.



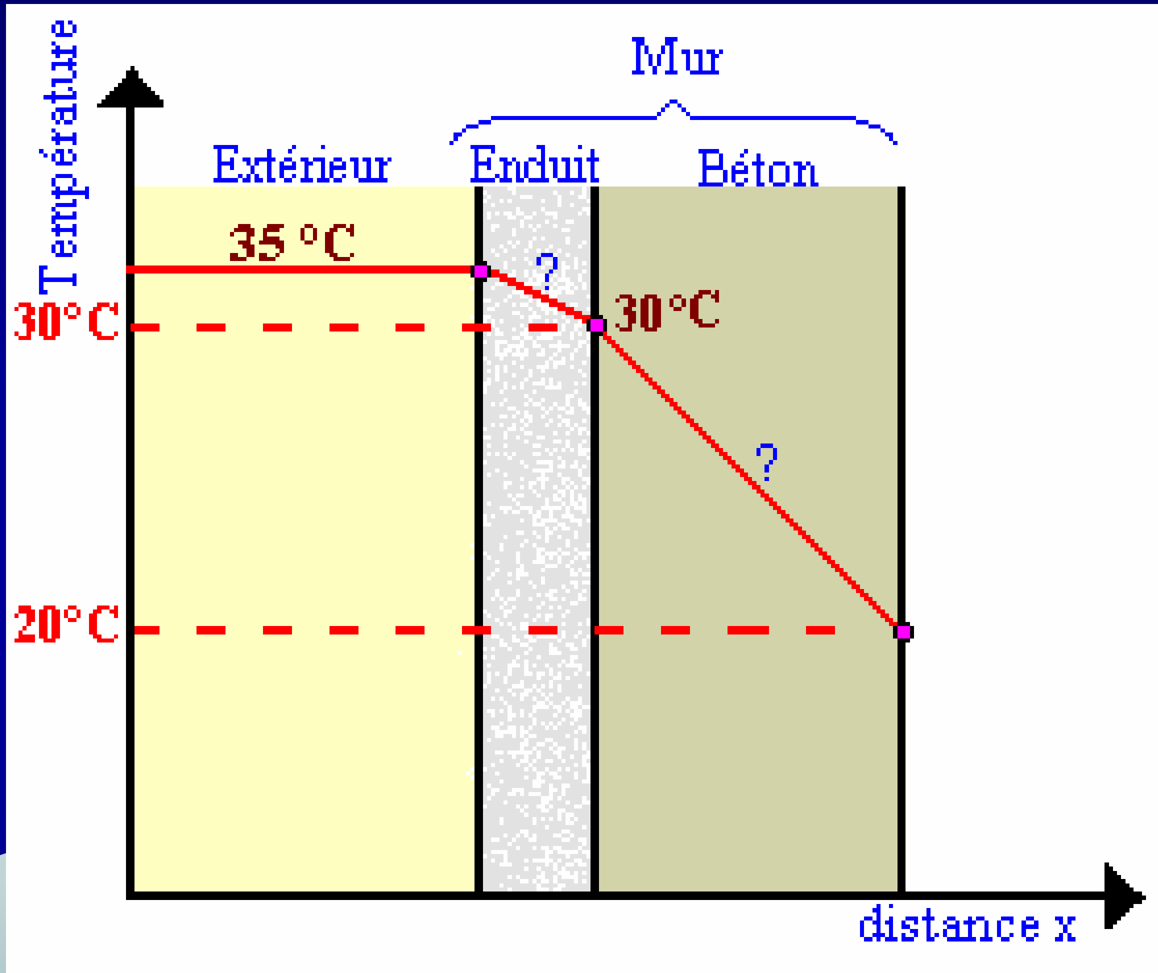
L'écart de températures

↓

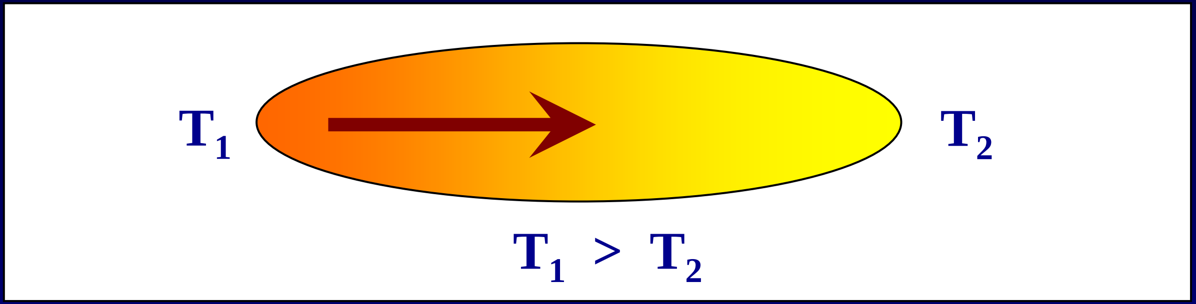
Transfert de chaleur par conduction

Profil spatial de la température

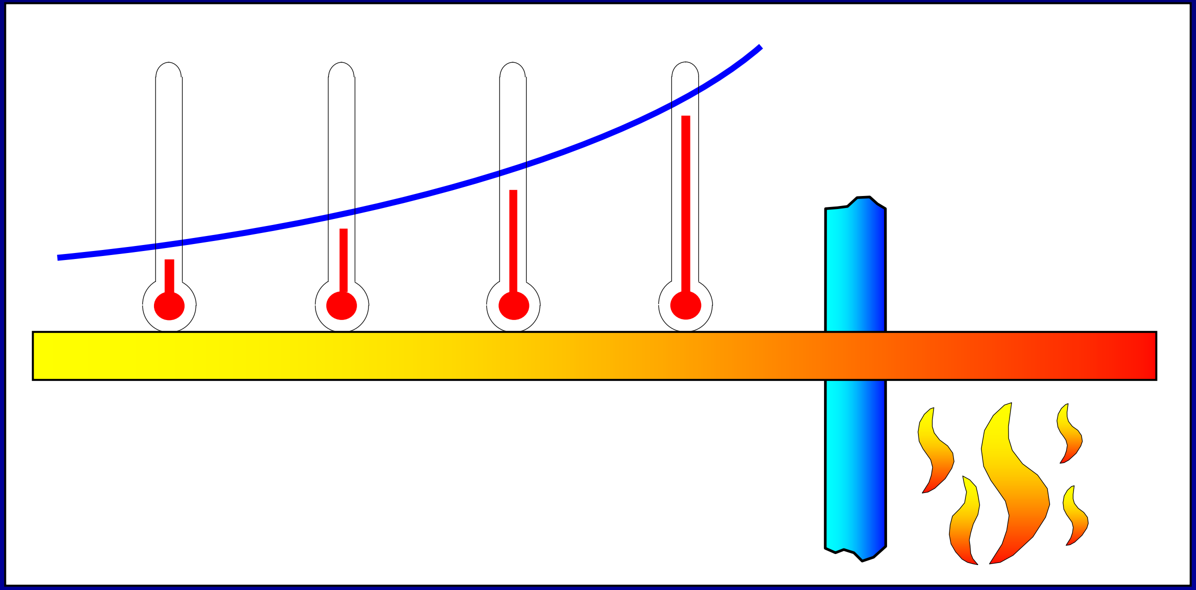
La température T est une fonction de la variable x. Sa variation en fonction de x peut être linéaire ou non.



Transfert de chaleur dans un corps solide



Transfert de chaleur dans une barre d'acier



La conduction est le phénomène par lequel la chaleur se transmet d'une région à haute température vers une autre à basse température

à l'intérieur d'un milieu solide (liquide ou gazeux sous certaines conditions) ou entre différents milieux mis en contact.

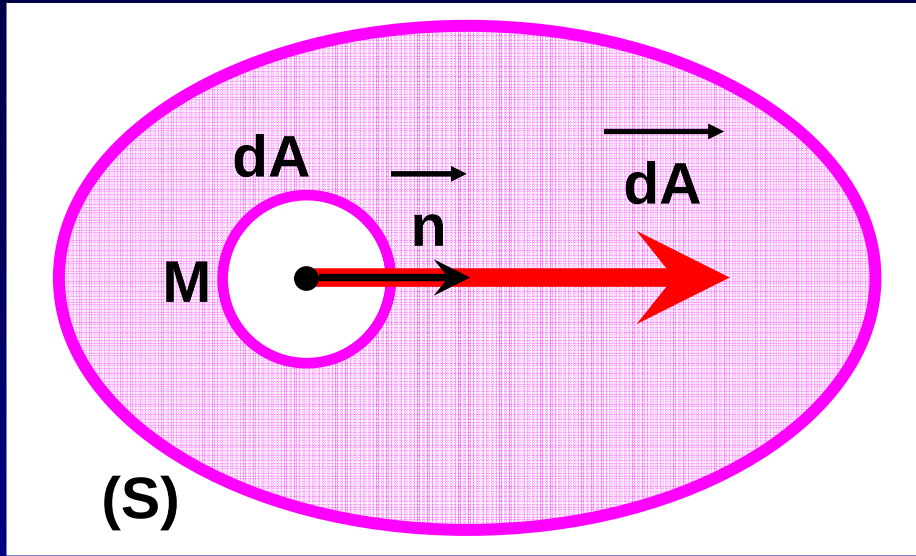
Le transfert d'énergie se fait par transmission de l'énergie cinétique d'agitation thermique des particules qui ont une énergie cinétique plus grande dans les régions à température élevée vers les régions à température plus faible.

3.2 Loi de Fourier (1822)

Les solutions mathématiques proposées aux problèmes de la conduction en régime stationnaire sont basées sur l'analyse du mathématicien français J.B.J. FOURIER donnant la loi de transfert de chaleur par conduction.

(1768-1830)

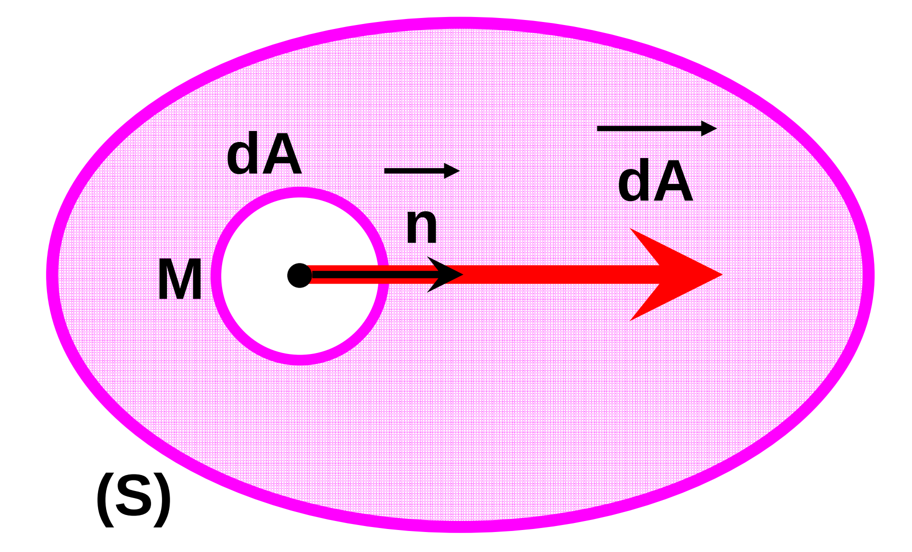
Le corps (S) initialement en déséquilibre thermique évolue en fonction du temps.



Chaque point du corps (S) est caractérisé par sa température T :

T = T (x,y,z)	T = T (x,y,z,t)
régime permanent ou stationnaire	régime transitoire

La loi de Fourier exprime l'énergie-chaleur dQ transférée à travers l'élément de surface dA pendant l'intervalle de temps dt :



$$\delta Q = -\lambda \cdot \overrightarrow{grad}(T) \cdot \overrightarrow{dA} \cdot dt$$

$d\vec{A}$ = **dA .** $\vec{n}$ **: Vecteur surface**

$$\overrightarrow{gradT} \begin{cases} \dfrac{\partial T}{\partial x} \\ \dfrac{\partial T}{\partial y} \\ \dfrac{\partial T}{\partial z} \end{cases}$$

$\vec{n}$ **: Vecteur unitaire normal à la surface dS**

$$\delta Q = -\lambda \, . \, \overrightarrow{grad(T)} \, . \, \overrightarrow{dA} \, . \, dt$$

$$\frac{\delta Q}{dt} = \dot{Q} = -\lambda \, . \, \overrightarrow{grad(T)} \, . \, \overrightarrow{dA}$$

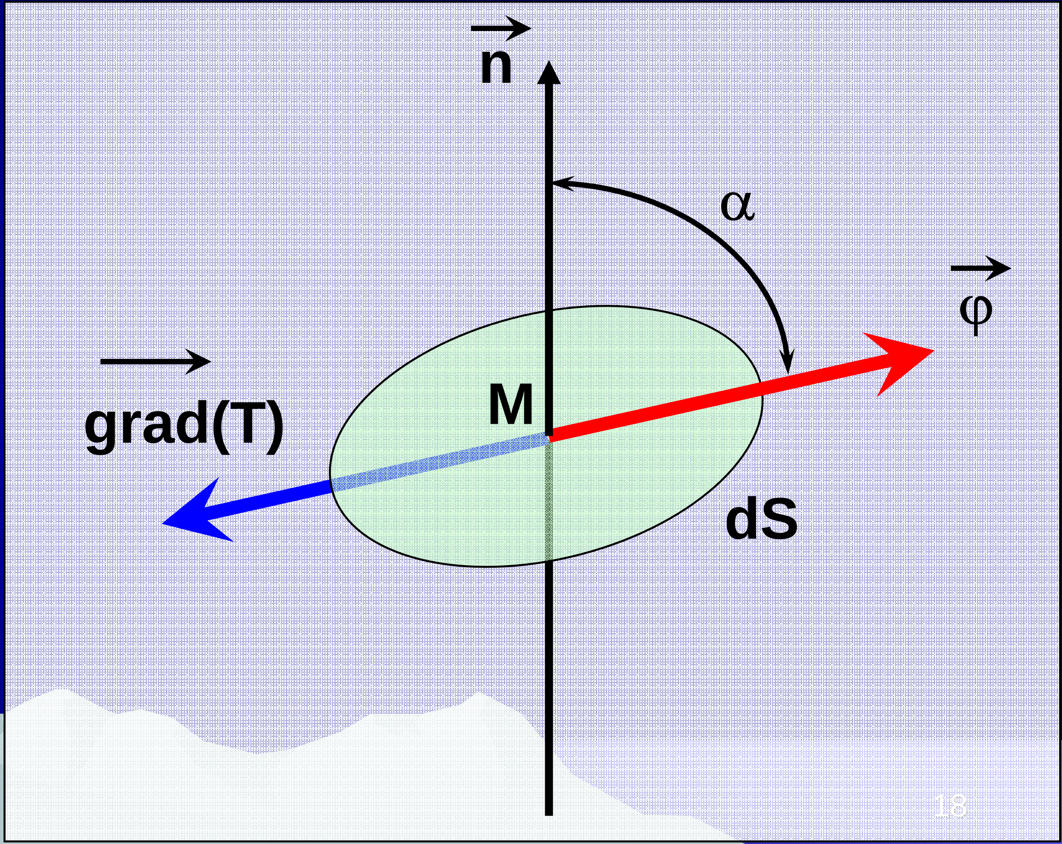
On définit la densité de flux thermique φ par :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \, . \, \overrightarrow{grad(T)}$$

$\overrightarrow{gradT}$ en K/m

$\vec{\varphi}$ en W/m²

λ en W/(m.K)



Une cause donne lieu à un effet :

Cause ⟹ **Effet**

Gradient de température ⟹ Flux de chaleur

Gradient de concentration ⟹ Flux de matière

Pour les corps anisotropes, tel que les cristaux ou les corps composites (bois, fibres enrobées, milieux poreux etc …) :

La loi de Fourrier se généralise sous forme tensorielle :

$$\delta Q = - \overline{\overline{\lambda}} \, . \, \overrightarrow{\mathrm{grad}(T)} \, . \, \overrightarrow{dA} \, . \, dt$$

$$\overline{\overline{\lambda}} = \begin{bmatrix} \lambda_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \lambda_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \lambda_{zz} \end{bmatrix}$$

Chaque composante φ sera de la forme :

$$\varphi_x = - \left(\lambda_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{xz} \frac{\partial T}{\partial z} \right)$$

Coefficients de conductivité thermique

Nature du corps	Masse volumique	Chaleur massique	Conductivité thermique
Notation	ρ	C	λ
Unité	kg / m^3	J / (kg . K)	W / (m . K)
Argent	10500	230	418
Cuivre	8940	380	389
Aluminium	2700	860	200
Acier	7850	490	46
Béton	2300	960	0,92
Verre	2530	840	1,20
Polystyrène	44		0,025
Laine de verre	200	0,67	0,040

Quelques conductivités thermiques (W/ m.K)

Liquides:

Acetone	0.20
Alcohol, ethyl	0.17
Mercury	8.7
Oil, engine	0.15
Water	0.58

Gaz:

Air	0.026
CO2	0.017
Nitrogen	0.026
Oxygene	0.027

Solides Métalliques:

Iron	73
Steel	46
Aluminum	210
Copper	386
Silver	406
Gold	293
Yellow Brass	85

Non Métalliques:

Asbestos	0.16
Red Brick	0.63
Cardboard	0.2
Cement	0.30
Earth's crust	1.7
Glass	0.8
Fiberglass	0.04

Quelques remarques concernant la conductivité thermique λ :

Les impuretés diminuent fortement la conductivité des matériaux.

La règle habituelle des mélanges n'est pas applicable ni pour les alliages ni pour les impuretés.

Les conductivités des alliages sont difficilement interprétables.

Ni $\lambda = 62$ W.m^{-1}.K^{-1} Cu $\lambda = 405$ W.m^{-1}.K^{-1}

Alliage (60% Ni + 40% Cu) $\lambda = 22$ W.m^{-1}.K^{-1}

Champs de lignes isothermes

Définition d'une surface isotherme Σ

Pour tout $M \in \Sigma$, $T(M) = Cte$ ou $dT \equiv 0$

La Loi de Fourier :

$$\vec{\varphi} = -\lambda \,.\, \overrightarrow{grad}(T)$$

signifie que les vecteurs densité de flux et gradient de température sont colinéaires.

La définition du gradient :

$$dT = \overrightarrow{grad}(T) \,.\, \overrightarrow{dM}$$

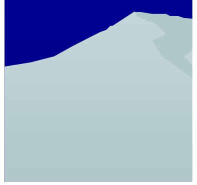
conduit à l'expression du produit scalaire :

$$\vec{\varphi} \,.\, \overrightarrow{dM} = -\lambda \,.\, dT$$

Donc

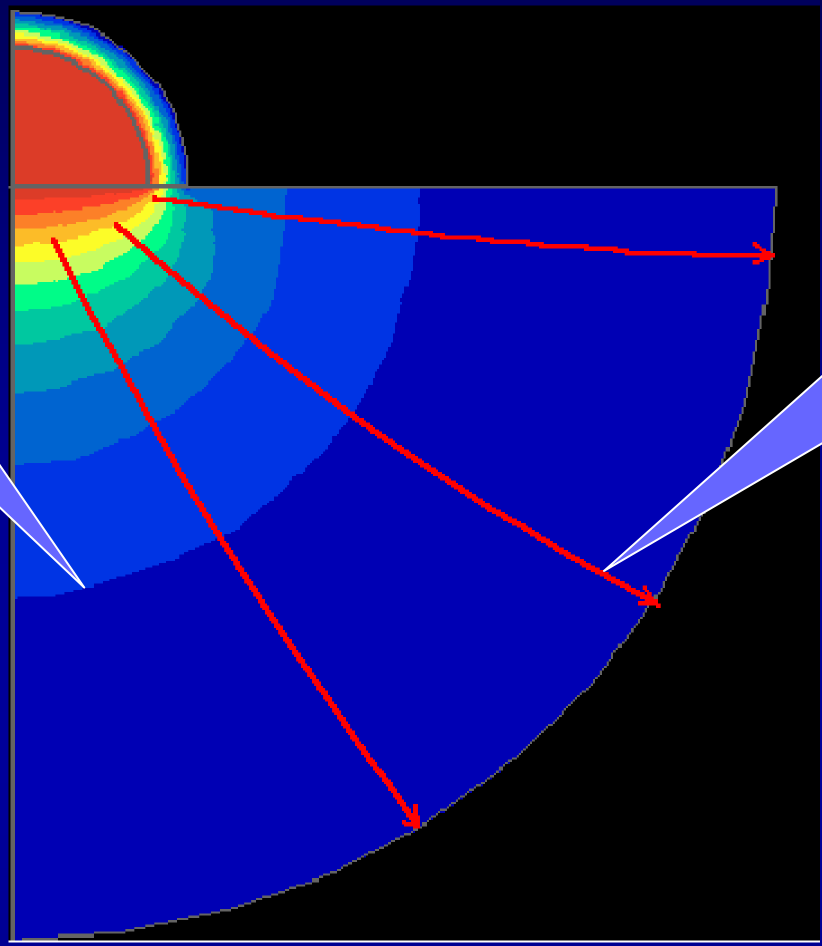
$$dT = 0 \iff \vec{\varphi} \,.\, \overrightarrow{dM} = 0$$

Ceci signifie que les vecteurs densité de flux sont orthogonaux aux surfaces isothermes.



Lignes de flux et isothermes

Surfaces isothermes



Lignes de flux orthogonales aux isothermes

Lieu des points ayant à chaque instant la même température

3.3

Equation fondamentale de transfert chaleur par conduction

Considérons un solide indéformable de volume V :

- **de masse volumique ρ ;**
- **de chaleur massique c ;**
- **de conductivité thermique λ ;**
- **de puissance-chaleur P générée par unité de volume due aux sources internes (ou puit).**

P peut être provoquée par effet Joule, par frottement interne, par des réactions chimiques ou nucléaires, par absorption de rayonnements lumineux, électromagnétiques ou corpusculaires.

En général, c et λ dépendent des variables de l'espace et de la température.

La puissance-chaleur P produite par une source interne par unité de temps est une fonction du temps, de l'espace et de la température.

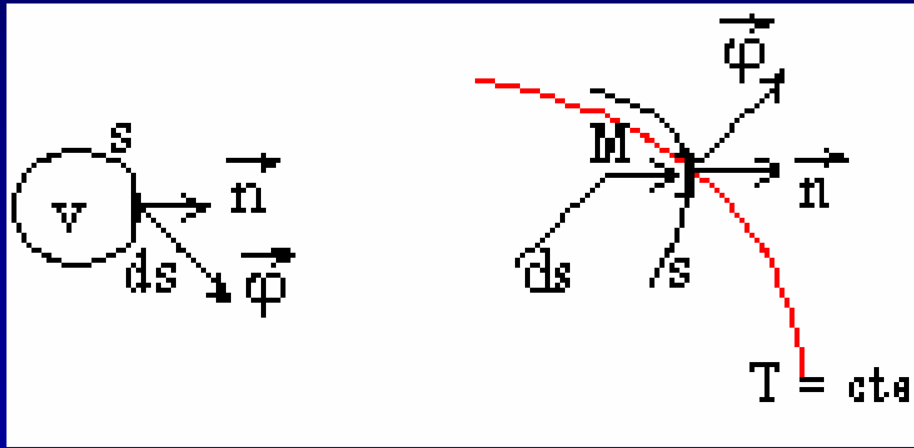
Cas des réactions chimiques : $P = A_0 \exp [- \alpha T]$

Cas de production de chaleur par effet Joule : $P = A(M,t) + B(M,t)$

3.3.1 Bilan énergétique :

On applique le premier principe de la thermodynamique à un volume fini v contenu dans V et limité par une surface s.

L'énergie chaleur qui traverse l'élément de surface ds pendant l'intervalle de temps dt est donnée par la loi de Fourrier :



$$\delta Q = -\lambda \cdot \overrightarrow{grad}(T) \cdot \overrightarrow{ds} \cdot dt$$

ou

$$\delta Q = \vec{\varphi} \cdot \vec{n} \cdot ds \cdot dt$$

La puissance-chaleur sortant à travers la surface s est :

$$\int_{s} \vec{\varphi}\,.\,\vec{n}\,.\,ds$$

La puissance reçue par le volume v à travers sa surface s est :

$$-\int_{s} \vec{\varphi}\,.\,\vec{n}\,.\,ds$$

La puissance-chaleur générée par les sources internes au volume v est :

$$\int_{v} P\,.\,dv$$

Le solide étant indéformable (W^+) = 0, seule la variation de T intervient dans l'expression de l'énergie interne.

La variation d'énergie interne dans l'élément de volume dv de masse m = ρ.dv s'écrit :

$$\boxed{dU = m.c.dT = \rho.dv.c.dT} \Rightarrow \boxed{\int_v \frac{dU}{dt} = \int_v c.\rho.\frac{\partial T}{\partial t}.dv}$$

Le premier principe s'écrit :

$$\boxed{-\int_s \vec{\varphi}.\vec{n}.ds \quad + \quad \int_v P.dv \quad = \quad \int_v \rho.c.\frac{\partial T}{\partial t}.dv}$$

Puissance échangée sur la surface s

Puissance génerée par les sources internes

Variation instantanée de l'énergie interne

Théorème d'Ostrogradky ⟶

$$\int_S (\vec{\varphi} \, . \, \vec{n}) \, . \, ds = \int_V \mathrm{div}(\vec{\varphi}) \, . \, dv$$

D'où Le premier principe s'écrit :

$$\int_V [-\,\mathrm{div}(\vec{\varphi}) + P - \rho.c.\frac{\partial T}{\partial t}].dv = 0$$

Cette relation est vérifiée quel que soit le volume v de V.

On a donc en tout point de V :

$$\mathrm{div}(\vec{\varphi}) + \rho.c.\frac{\partial T}{\partial t} - P = 0$$

C'est l'équation fondamentale de transfert chaleur par conduction.

3.3.2 Cas particulier : milieu homogène et isotrope

- On appelle milieu homogène un milieu constitué par un seul matériau.

- On appelle milieu isotrope un milieu dont les caractéristiques physiques (ρ, c, λ) ne dépendent pas des variables d'espace.

$$\vec{\varphi} = -\lambda \, . \, \overrightarrow{grad}(T) \quad \rightarrow \quad div(\vec{\varphi}) = div[-\lambda \, . \, \overrightarrow{grad}(T)]$$

$$\rightarrow \quad div\,[-\lambda \, . \, \overrightarrow{grad}\,(T)] + \rho.c.\frac{\partial T}{\partial t} - P = 0$$

$$\rightarrow \quad \Delta T + \frac{p}{\lambda} = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}$$

$$a = \frac{\lambda}{\rho.c}$$

diffusivité thermique

Cas particuliers :

- **milieu avec source interne et en régime permanent :**

$$\Delta T + \frac{p}{\lambda} = 0$$

Equation de POISSON

- **milieu sans source interne et en régime permanent :**

$$\Delta T = 0$$

Equation de LAPLACE

- **milieu sans source interne et en régime variable :**

$$\Delta T = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}$$

Equation de FOURIER

L'équation de Fourier est suffisante pour traiter les problèmes usuels.

3.3.3 Equation de Fourier

$$\Delta T = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}$$

En Système de coordonnées :

Cartésiennes

Cylindriques

Sphériques

- En coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=\frac{1}{a}.\frac{\partial T}{\partial t}}$$

- En coordonnées cylindriques :

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}=\frac{1}{a}.\frac{\partial T}{\partial t}}$$

- En coordonnées sphériques :

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2}+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial T}{\partial r}-\frac{\operatorname{tg}\varphi}{r^2}\frac{\partial T}{\partial \varphi}=\frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}}$$

3.4 Phénomènes linéaires de conduction thermique.

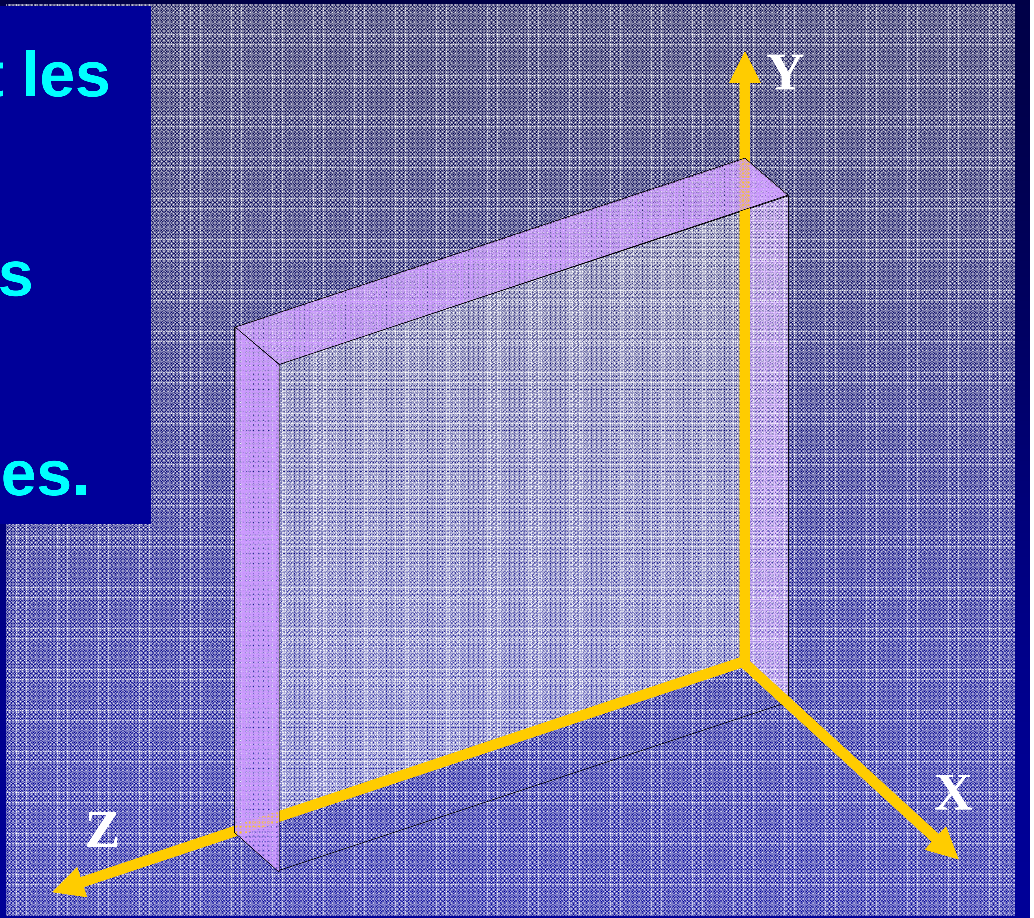
3.4.1 Mur simple sans production de chaleur

La géométrie du solide est supposée définie par des plans parallèles.

Nous prendrons pour axes des X la direction perpendiculaire à ces plans.

Nous supposons que les propriétés physiques du solide ne dépendent que de x.

Considérons une paroi dont les faces sont planes et suffisamment étendues dans les directions y et z pour admettre qu'elles sont infinies.



L'équation fondamentale de transfert - chaleur se réduit à :

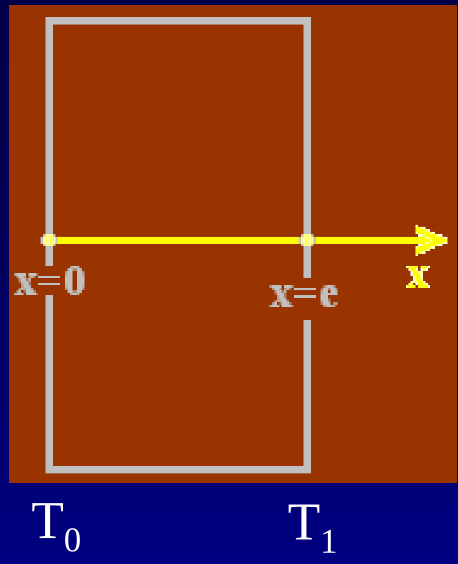
$$\boxed{\frac{d^2T}{dx^2} = 0}$$

dont la solution est de la forme :

$$\boxed{T = a\,x + b}$$

a et b sont des constantes qui dépendent des conditions aux limites.

Admettons que les faces x = 0 et x = e soient respectivement portées aux températures T_0 et T_1 constantes.



La loi de répartition de la température s'écrit donc :

$$T(x) = \frac{T_1 - T_0}{e} x + T_0$$

La densité de flux de chaleur s'écrit :

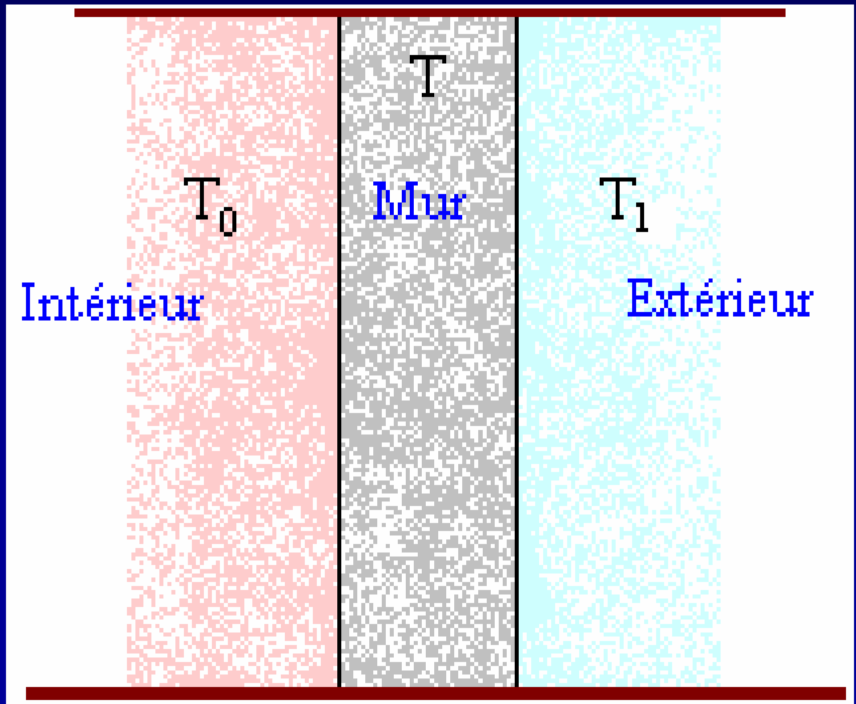
$$\varphi = -\lambda . \frac{dT}{dx} = -\lambda \frac{T_1 - T_0}{e} = cte$$

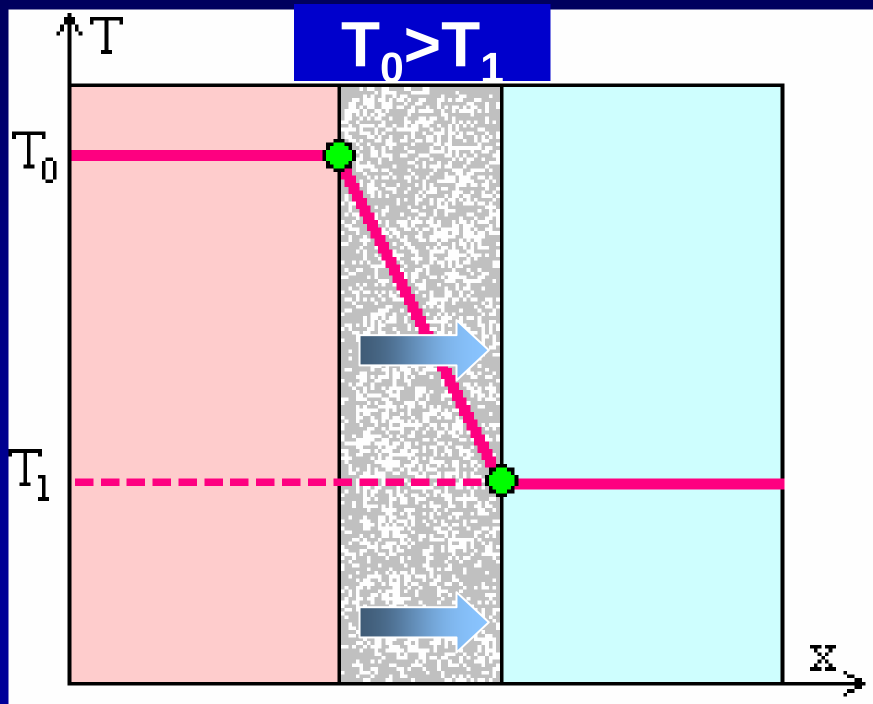
Le flux qui entre par la face x = 0 est le même que celui qui sort par la face x = e.

Si $T_0 < T_1$ alors $\varphi > 0$, la chaleur pénètre par x = 0 et ressort par x = e.

Si $T_0 < T_1$ alors $\varphi < 0$, la chaleur pénètre par x = e et ressort par x= 0.

Exemple: **Profil de température dans un mur de bâtiment, de l'intérieur vers l'extérieur.**





3.4.2. Résistance thermique d'un mur simple :

La densité de flux de chaleur s'écrit :

$$\varphi = -\lambda \frac{T_1 - T_0}{e}$$

Le flux de chaleur ϕ qui traverse une surface S du mur est :

$$\Phi = \varphi . S = -\lambda . S \frac{T_1 - T_0}{e}$$

ou

$$\Delta T = T_0 - T_1 = \frac{e . \Phi}{\lambda . S}$$

Par analogie avec la conduction électrique :

$\Delta T = T0 - T1$ est analogue à une tension V ;

Φ est analogue à un courant I.

Or, selon la loi d'Ohm, V = R.I, donc :

$$R_t = \frac{e}{\lambda S}$$

R_t est l'analogue d'une résistance électrique.

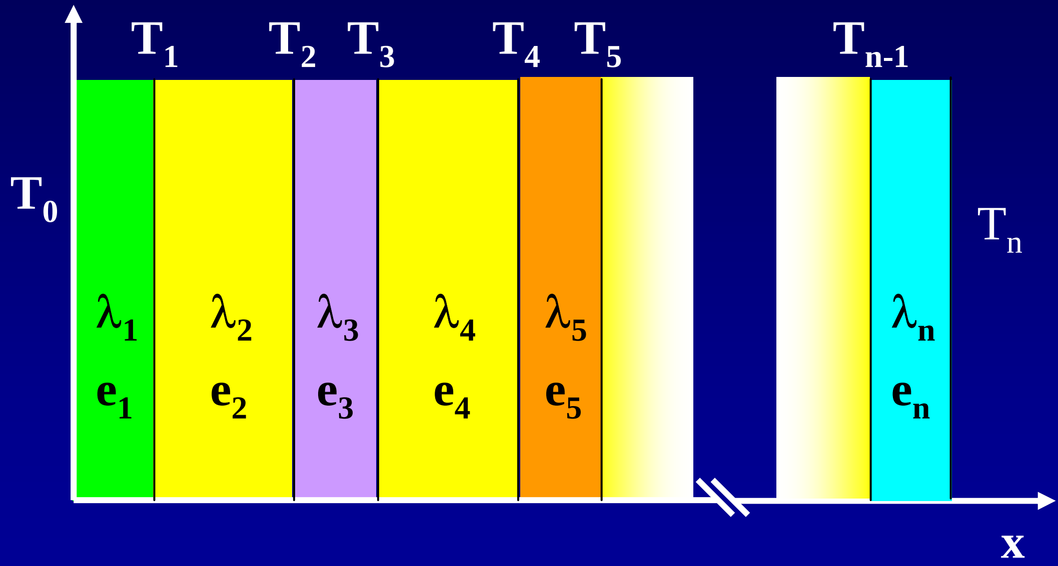
Nous l'appellerons *résistance thermique*.

$U = R.I \quad \longleftrightarrow \quad \Delta T = R_t . \Phi$

- U : ddp
- R : Résistance électrique
- I : Courant électrique
- ΔT : ddT
- R_t : Résistance thermique
- Φ : Flux thermique

3.4.3 Mur composite sans production de chaleur :

On considère un mur composite constitué de n murs simples de conductivités λ_i, (i=1,n) et d'épaisseur e_i, (i=1,n) accolés les uns aux autres.



La densité de flux de chaleur pour chacun des murs s'écrit :

$$\varphi_i = \frac{\lambda_i}{e_i}.(T_{i-1} - T_i) \quad {}_{i=1,n} \Longrightarrow (T_{i-1} - T_i) = \frac{e_i}{\lambda_i}.\varphi_i$$

En régime stationnaire, la densité de flux de chaleur est la même dans tout le mur :

$$\Longrightarrow \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_n = \varphi$$

En ajoutant membre à membre les équations :

$$(T_0 - T_1) = \varphi_1 . \frac{e_1}{\lambda_1}$$

$$(T_1 - T_2) = \varphi_2 . \frac{e_2}{\lambda_2}$$

$$(T_2 - T_3) = \varphi_3 . \frac{e_3}{\lambda_3}$$

....

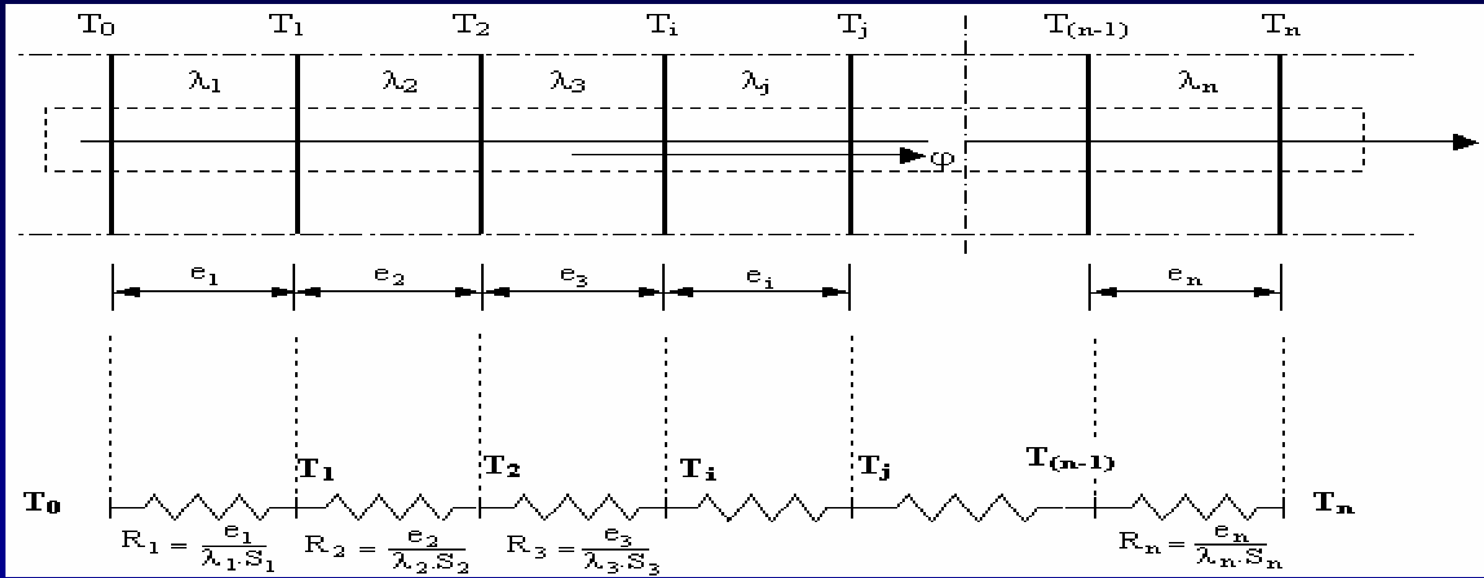
$$(T_{n-1} - T_n) = \varphi_n . \frac{e_n}{\lambda_n}$$

$$\varphi = \frac{(T_0 - T_n)}{\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{e_n}{\lambda_n}}$$

Ou

$$\Phi = \varphi . S = \frac{S.(T_0 - T_1)}{\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{e_n}{\lambda_n}}$$

3.4.4 Résistance thermique d'un mur composite :



Le flux de chaleur qui traverse ce mur est de manière générale :

$$\Phi = \varphi.S = \frac{S.(T_0 - T_n)}{\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + ... + \frac{e_n}{\lambda_n}} = \frac{(T_0 - T_n)}{R_\lambda}$$

R_λ est la résistance thermique du mur composite donnée par :

$$R_\lambda = \frac{1}{S}\left[\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{e_2}{\lambda_2} + ... + \frac{e_n}{\lambda_n}\right]$$

Soit

$$R_\lambda = R_{\lambda 1} + R_{\lambda 2} + ... + R_{\lambda n}$$

3.4.5 Mur simple avec production de chaleur :

L'équation fondamentale de transfert de chaleur par conduction s'écrit dans ce cas :

$$\Delta T + \frac{p}{\lambda} = 0$$

$$T(x) = -\frac{p}{2\lambda}x^2 + bx + c$$

soit

$$\varphi = -\lambda\frac{dT}{dx} = P.x - b.\lambda$$

Profil parabolique

b et c dépendent des conditions aux limites.

3.5 Problème cylindrique de conduction thermique

2.5.1 Équation fondamentale :

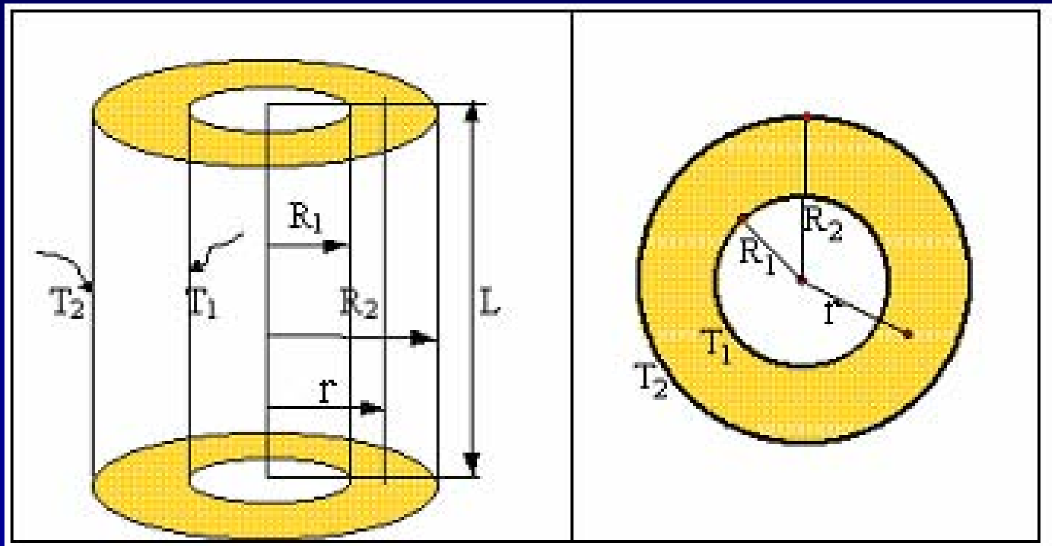
Dans certains cas il serait plus commode d'utiliser les coordonnées cylindriques r, θ et z.

L'équation fondamentale $\Delta T = -\dfrac{p}{\lambda}$ s'écrit :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{p}{\lambda}$$

Si le solide est de révolution autour de l'axe z et est cylindrique, l'équation ne dépend plus de θ et z.

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} = -\frac{p}{\lambda}$$



Si le tube cylindrique circulaire est sans production de chaleur, l'équation fondamentale se réduit à :

$$\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} = 0$$

On multiplie par r l'équation précédente :

$$r\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} = 0 \iff \frac{d}{dr}\left(r\frac{dT}{dr}\right) = 0 \Rightarrow r\frac{dT}{dr} = A$$

La distribution radiale des températures s'écrit donc :

$$\boxed{T = A.\ln r + B}$$

La densité de flux de chaleur s'écrit : $\varphi = -\lambda.\frac{dT}{dr} = -\lambda\frac{A}{r}$

Si pour $r = R_1$, $T = T_1$

$r = R_2$, $T = T_2$

On déduit les constantes d'intégration A et B

$$\begin{cases} A = \dfrac{T_2 \quad T_1}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}} \\ \text{et} \quad B = \dfrac{T_1\ln R_2 - T_2\ln R_1}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}} \end{cases}$$

3.5.2 Résistance thermique d'un tube cylindrique circulaire :

Pour une longueur L du cylindre, le flux de chaleur qui traverse la surface $S = 2\pi rL$ s'écrit :

$$\Phi = 2\pi rL\varphi = -\lambda \cdot \frac{T_2 - T_1}{\ln\frac{R_2}{R_1}} \cdot \frac{1}{r} \cdot 2\pi rL$$

$$|\Phi| = 2\pi\lambda L \cdot \frac{|T_2 - T_1|}{\ln\frac{R_2}{R_1}}$$

Φ est indépendant de r car il n'y a pas de production de chaleur interne.

$$|T_2 - T_1| = \frac{\ln\frac{R_2}{R_1}}{2\pi\lambda L}|\Phi|$$

$$\text{D'où} \quad R_\lambda = \frac{\ln\frac{R_2}{R_1}}{2\pi\lambda L}$$

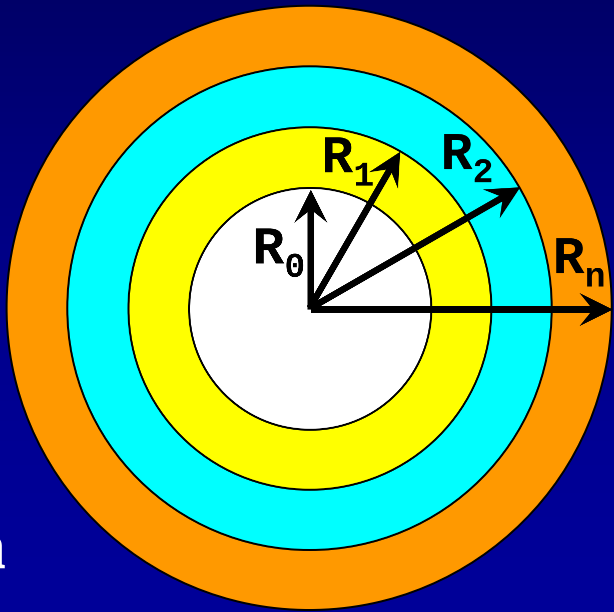
Mur : $$\boxed{R_\lambda = \frac{e}{\lambda S}}$$

Cylindre : $$\boxed{R_\lambda = \frac{\ln\frac{R_2}{R_1}}{2\pi\lambda L}}$$

3.5.3 Tube cylindrique circulaire composite :

Considérons un cylindre composé de n matériaux superposés, limités par les cylindres de rayons R_0, R_1, R_2, … R_n, de conductivités λ_1, λ_2, … λ_n.

Les résistances thermiques de ces cylindres étant :



$$R_{\lambda_1} = \frac{\ln \frac{R_1}{R_0}}{2\pi\lambda_1 L} \quad \cdots\cdots \quad R_{\lambda_n} = \frac{\ln \frac{R_n}{R_{n-1}}}{2\pi\lambda_n L}$$

La résistance thermique de la portion du tube de longueur L est :

$$R_\lambda = \sum_i R_{\lambda i} = \frac{1}{2\pi L} \sum_i \frac{1}{\lambda_i} \ln \frac{R_i}{R_{i-1}}$$

3.5.4 Tube creux avec production de chaleur :

$$\boxed{\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dT}{dr} = -\frac{p}{\lambda}}$$

Cette équation peut aussi s'écrire :

$$r\frac{d^2T}{dr^2} + \frac{dT}{dr} = -\frac{P.r}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr}\left[r\frac{dT}{dr}\right] = -\frac{P.r}{\lambda}$$

Une première intégration donne :

$$r\frac{dT}{dr} = -\frac{P}{\lambda}\frac{r^2}{2} + A \quad \Rightarrow \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{P}{2\lambda}r + \frac{A}{r}$$

$$dT = -\frac{P}{2\lambda}rdr + A\frac{dr}{r} \qquad T(r) = -\frac{P.r^2}{4\lambda} + A.\ln(r) + B$$

Si on choisit comme conditions aux limites :

$T = T_1$ pour $r = R_1$ $\qquad$ $T = T_2$ pour $r = R_2$

On obtient :

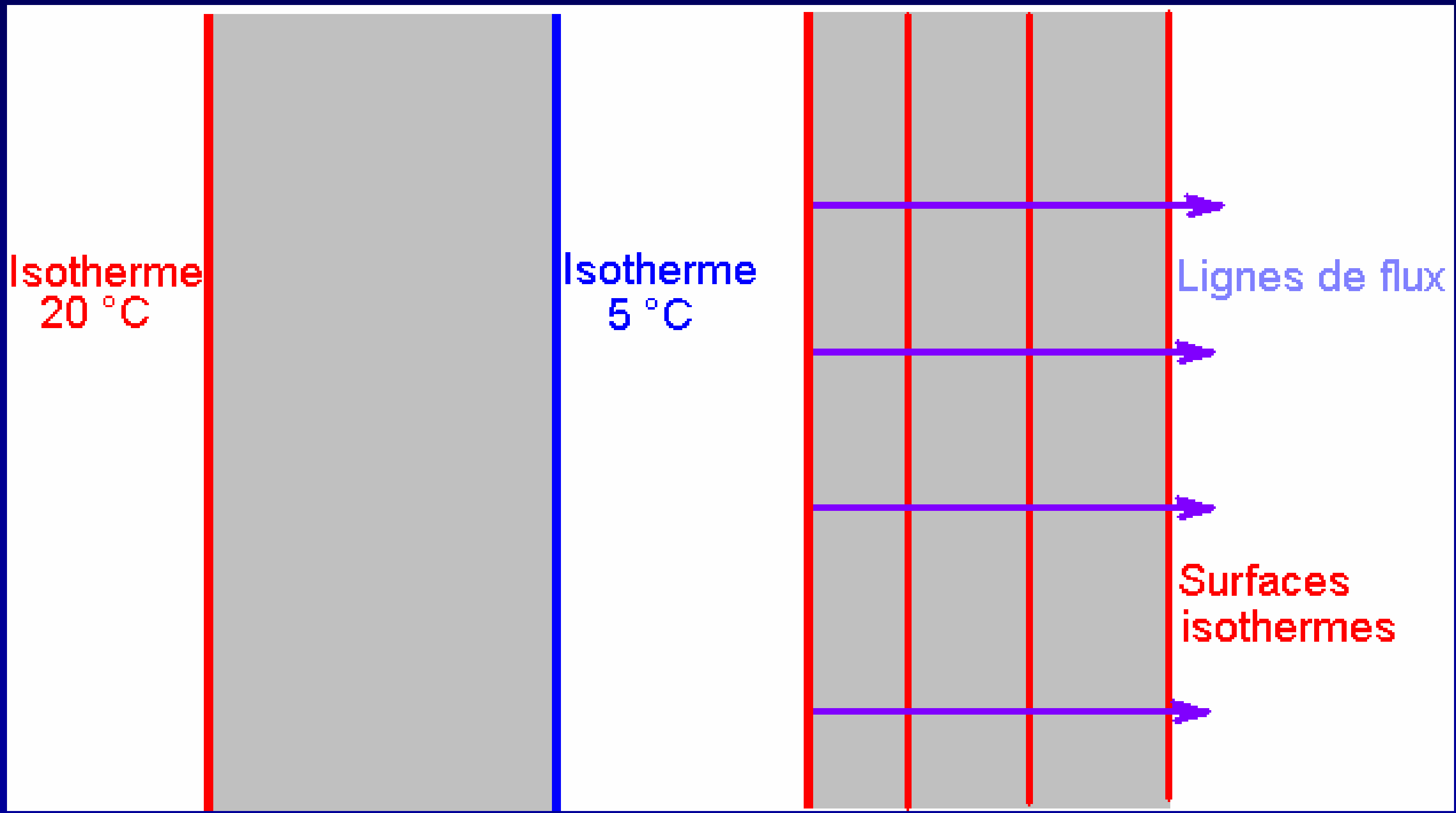
$$A = \frac{T_2 - T_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} + \frac{P}{4\lambda} \frac{R_2^{\,2} - R_1^{\,2}}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

$$B = \frac{T_1.\ln R_2 - T_2.\ln R_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}} + \frac{P}{4\lambda} \frac{R_1^{\,2}.\ln R_2 - R_2^{\,2}.\ln R_1}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$$

La densité de flux est :

$$\varphi = -\lambda \frac{dT}{dr} = \frac{P.r}{2} - \frac{\lambda.A}{r}$$

Exemple : mur en béton

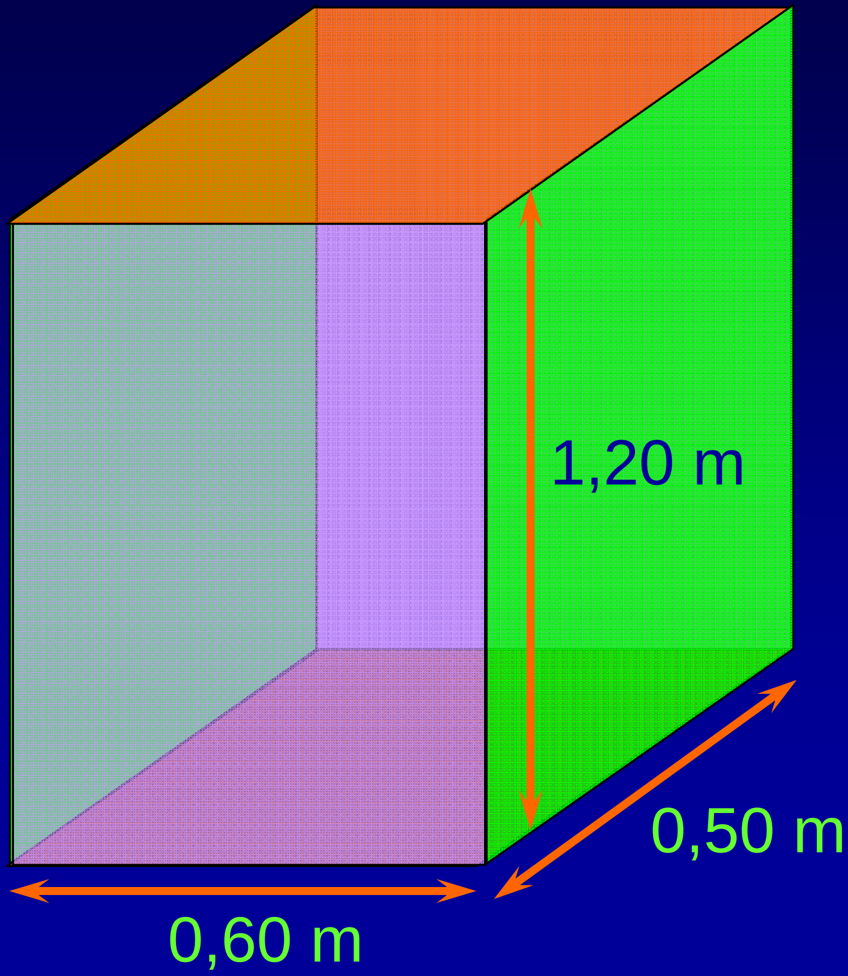


Il s'agit bien d'un problème à 1 seule dimension (1D)

Applications

1. Déperdition thermique d'un réfrigérateur

Un réfrigérateur ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de 1,20 m de haut, 0,60 m de large et 0,50 m de profondeur.



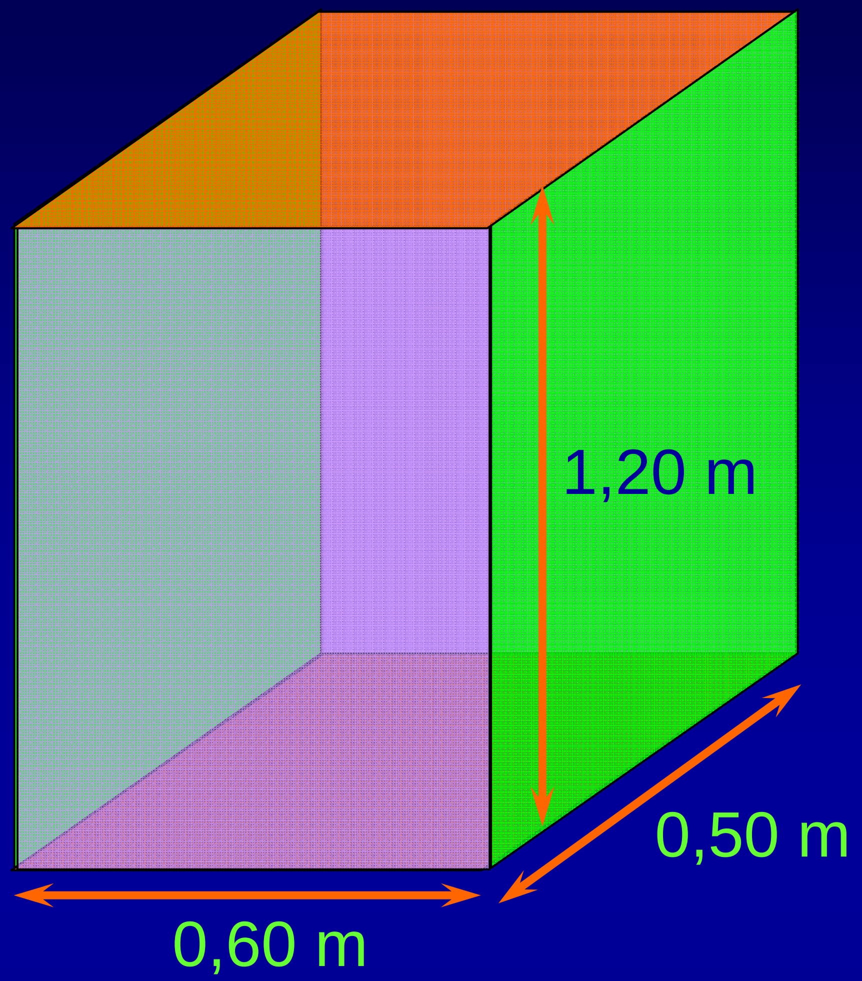
Les parois sont constituées de plaques en plastique, d'épaisseur e = 3 mm et de conductivité thermique λ = 0,12 W.m^{-1}.K^{-1}.

La température moyenne des faces extérieures est de 20 °C.

1. Déperdition thermique d'un réfrigérateur

Calculer la puissance Φ que devrait avoir le groupe frigorifique pour maintenir à 5 °C la température moyenne des faces internes du réfrigérateur.

On admettra que les déperditions calorifiques s'effectuent d'une manière uniforme à travers les 6 faces du réfrigérateur.



Solution :

Calcul de la surface d'échange :

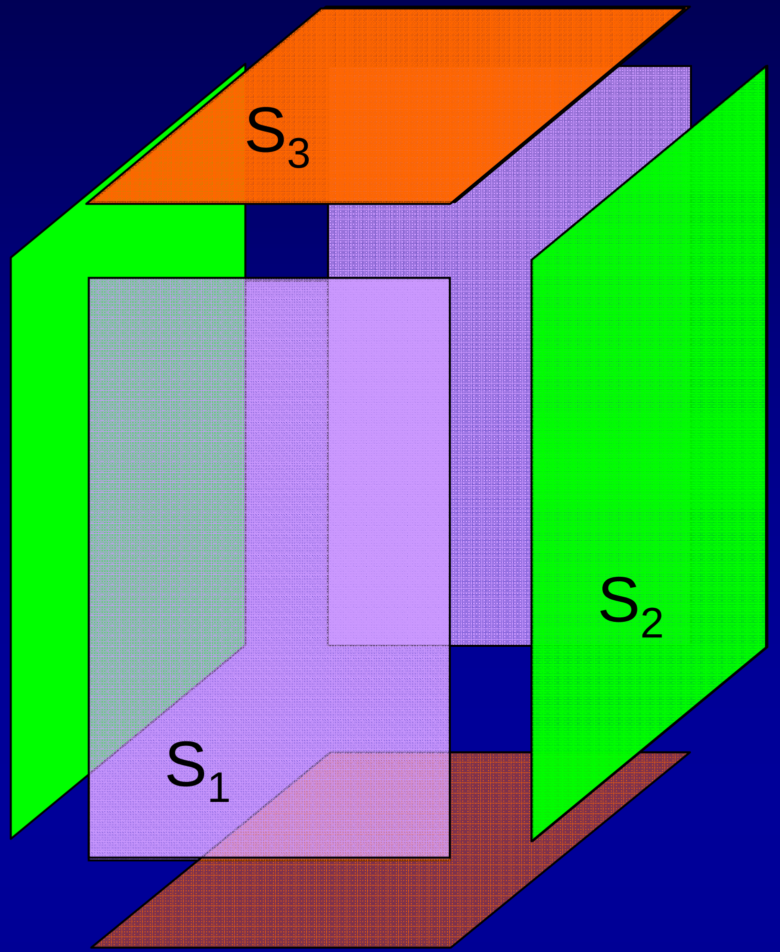
$* \ S_1 = 1{,}2 \times 0{,}6 = 0{,}72 \ m^2$

$* \ S_2 = 1{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}60 \ m^2$

$* \ S_3 = 0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}30 \ m^2$

Soit :

$$S = 2(S_1 + S_2 + S_3) = 3{,}24 \ m^2$$



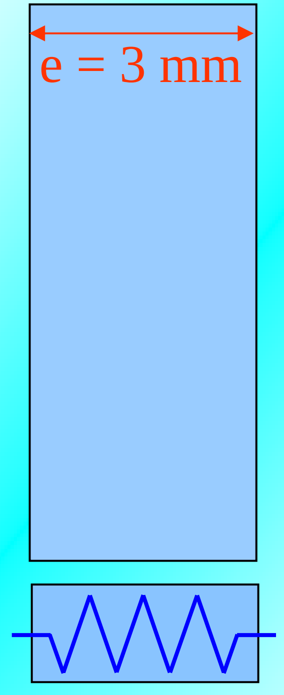
Calcul de la Résistance thermique R_t :

$$R_t = \frac{e}{\lambda S} = \frac{0{,}003}{0{,}12 \times 3{,}24} = 0{,}0077\ \text{K/W}$$

Le flux de chaleur qui traverse les parois du réfrigérateur est :

$$\Phi = \frac{\left|T_1 - T_2\right|}{R_t} = \frac{15}{0{,}0077} = 1944\ \text{W}$$

Simple paroi en plastique d'épaisseur 3 mm



$R_1 = 0{,}0077\ K.W^{-1}$

$\boxed{\Phi = 1944\ W}$

Les déperditions thermiques sont importantes !

Que devient cette puissance si les parois du réfrigérateur étaient constituées de **deux plaques en plastique de 3 mm d'épaisseur** séparées par **une couche de laine de verre de 4 cm d'épaisseur** ?

La conductivité thermique de la laine de verre est de **0,04 $W.m^{-1}.K^{-1}$.**

$$R_1 = 0{,}0077\ K/W$$

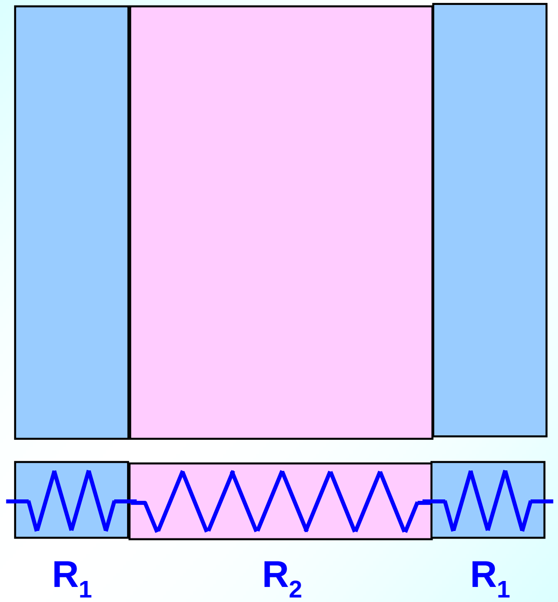
$$R_2 = 0{,}3086\ K/W$$

$$R_t = 2\,R_1 + R_2 = 0{,}324\ K/W$$

$$\Phi = \frac{|T_1 - T_2|}{R_t} = \frac{15}{0{,}324} = 46{,}3\ W$$

Les déperditions thermiques sont moins importantes !

Double parois en plastique d'épaisseur 3 mm séparées par une couche de laine de verre d'épaisseur 4 cm.



$\boxed{R_t = 0{,}324\ K.W^{-1}}$

$\boxed{\Phi = 46{,}3\ W}$

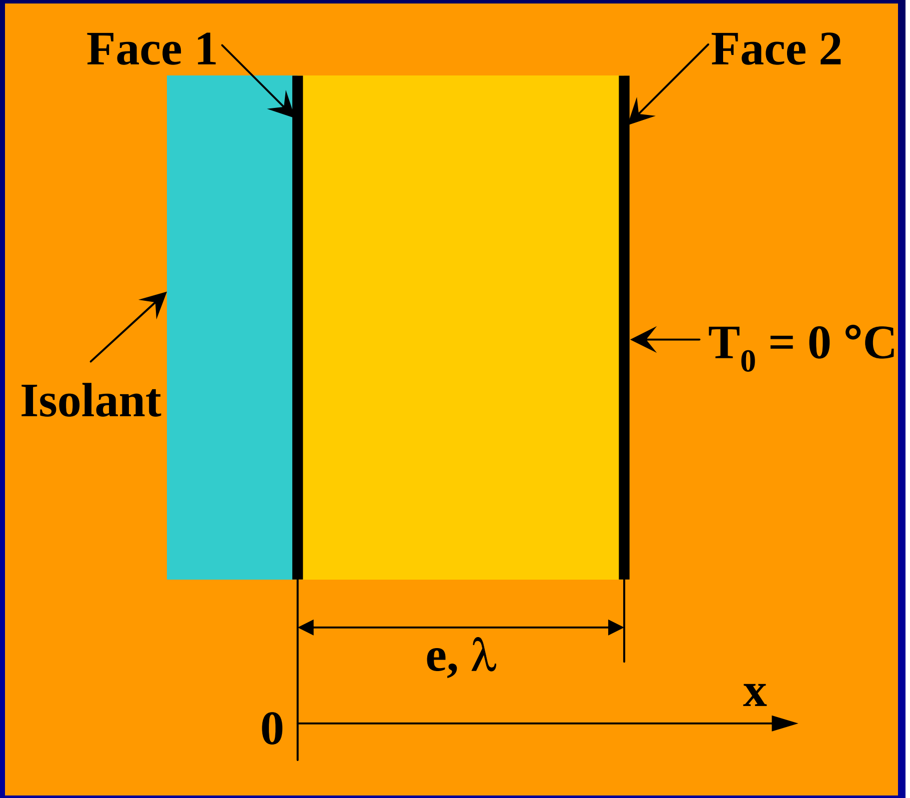
2. Génération de chaleur à flux constant p au sein d'une plaque

Soit une plaque , d'épaisseur e, isolée sur sa face 1 et une température T_0 imposée sur la face 2. En supposant qu'il existe au sein de la plaque une génération de chaleur à flux constant q_0 ($W.m^{-3}$), pour une conductibilité thermique constante, donner l'expression de la température de la plaque. Calculer la température de la face 1.

Données : $\lambda = 40\ W.m^{-1}.K^{-1}$

$q_0 = 10^6\ W.m^{-3}$

$e = 10$ cm.



Solution :

L'équation de la conduction de chaleur en régime permanent est donnée dans ce cas par :

$$\frac{d^2T}{dx^2} + \frac{\dot{q}_0}{\lambda} = 0 \qquad \text{avec} \qquad 0 < x < e$$

Conditions aux limites :

<u>Pour x = 0</u> : $\dfrac{dT(x)}{dx} = 0$

<u>Pour x = e</u> : $T(e) = 0\ °C$

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}_0}{\lambda}x + C_1$$

$$\Longrightarrow \quad T(x) = -\frac{1}{2}\frac{\dot{q}_0}{\lambda}x^2 + C_1x + C_2$$

Pour x = 0 :

$$\left.\frac{dT}{dx}\right|_{x=0} = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow T(x) = -\frac{1}{2}\frac{\dot{q}_0}{\lambda}x^2 + C_2$$

Pour x = e :

$$T(e) = -\frac{1}{2}\frac{\dot{q}_0}{\lambda}e^2 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}\frac{\dot{q}_0}{\lambda}e^2$$

$$\Rightarrow T(x) = -\frac{1}{2}\frac{\dot{q}_0}{\lambda}x^2 + \frac{1}{2}\frac{\dot{q}_0}{\lambda}e^2 = \frac{1}{2}\frac{\dot{q}_0}{\lambda}\left[e^2 - x^2\right]$$

A.N. : x = 0

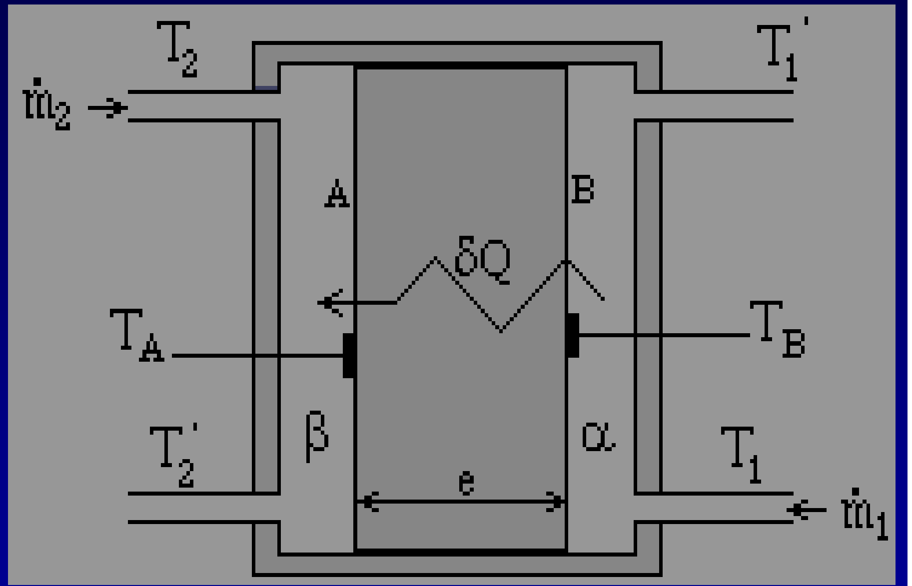
(Face 1)

$$T(0) = \frac{1}{2}\frac{10^6}{40}(0{,}1)^2 = 125\ °C$$

Mesure des conductivités thermiques en régime stationnaire.

Principe de la mesure :

Soit une source produisant une puissance-chaleur $\Phi = \delta Q$. Celle-ci traverse un solide d'épaisseur e et crée de part et d'autre de lui une différence de température δT.



De la relation $R_\lambda = \delta T/\Phi$, on déduit la valeur de la résistance thermique R_λ du solide. Connaissant la relation $R_\lambda(\lambda)$, on déduit la valeur de λ.

L'évaluation de R_λ est plus simple si le solide avait une forme simple. La mesure peut être effectuée en milieu linéaire, cylindrique ou même sphérique.

Mesure absolue en système linéaire :

Par application du premier principe de la thermodynamique au réseau α on obtient le flux de chaleur qui traverse la surface A :

$$\dot{Q}_{\bar{\alpha}} = \phi_B = \dot{m}_1 .(h_1 - h'_1) \approx \dot{m}_1 .c.(T_1 - T'_1)$$

De même pour le réseau β :

$$\dot{Q}^{+}_{\beta} = \phi_A = \dot{m}_2 .(h_2 - h'_2) \approx \dot{m}_2 .c.(T_2 - T'_2)$$

Si les pertes sont négligeables $\Phi_A = \Phi_B = \Phi$

Avec T_A et T_B les températures mesurées sur les surfaces A et B.

$$R_\lambda = \frac{T_A - T_B}{\Phi} = \frac{e}{\lambda\, S}$$

$$\Rightarrow \qquad \lambda = \frac{e}{R_\lambda . S}$$

Fin du chapitre 3

Merci de votre attention

La plupart des processus thermodynamiques sont réalisés en systèmes ouverts. En effet, les cycles en système ouvert sont plus facilement réalisables que les cycles en système fermé.

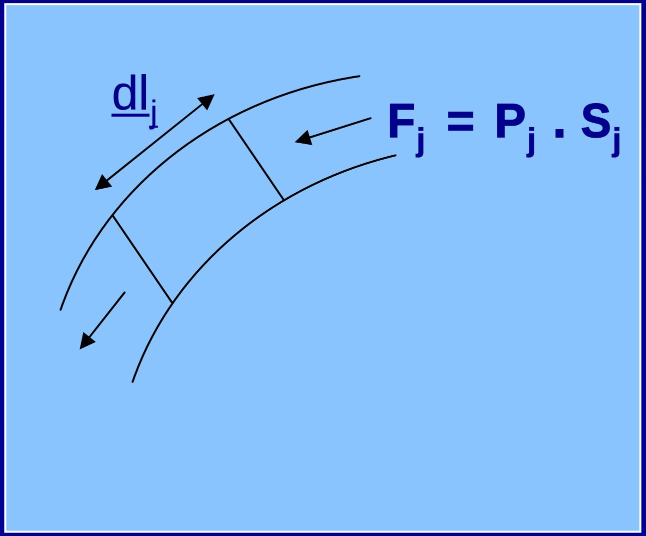
Les échangeurs de chaleur font intervenir uniquement les échanges thermiques ‘pas d’énergie travail) alors que pour les turbines, les compresseurs et les moteurs à combustion interne, il y a échange de chaleur et de travail technique avec le milieu extérieur.

Nous appellerons v_i le volume massique et $e_i = u_i + ec_i + ep_i$ l'énergie interne totale massique de la matière qui entre ou qui sort par la conduite i. la variation d'énergie interne totale dE du volume de contrôle entre les instants t et t + dt est :

$$dE = dQ + dW_{tot} + \Sigma\, e_i\, dm_i$$

Le travail dW_{tot} est constitué du travail dW, appelé « travail technique ou travail utile » échangé entre le système et les parties amovibles d'une machine (piston, turbine …) et du travail de transvasement (travail des forces pressantes qui font entrer ou sortir le fluide du système).

En effet, la force pressante du fluide dans le section S_j met en jeu un certain travail δW_j.



$$dW_j = F_j \,.\, dl_j = P_j \,.\, S_j \,.\, dl_j$$

Or $S_j \,.\, dl_j = dV_j = vj \,.\, dm_j$ donc $dW_j = P_j \,.\, v_j \,.\, dm_j$

On constate que le transfert de matière met en jeu un certain travail de transvasement que l'ont doit distinguer des autres formes d'énergie-travail (électrique, mécanique, chimique …).

Nous appellerons énergie-travail technique une énergie-travail autre que le travail de transvasement, nous pouvons donc écrire :

Cette relation constitue l'expression du premier principe de la thermodynamique pour un système ouvert.

h_{ti} est l'enthalpie massique totale du fluide qui entre ou qui sort par la section i.

L'expression du premier principe en puissance s'obtient en divisant par dt :

$$\frac{dE}{dt} = \sum_i \dot{Q} + \dot{W} + h_{ti}.\dot{m}_i$$

Mesure absolue en système linéaire :

Les mesures sont plus simples si la plaque était rectangulaire ou circulaire.

L'expression du premier principe de la thermodynamique appliqué au réseau α conduit à :

$$\dot{Q}_{\bar{\alpha}} = \dot{m}_1 .(h_1 - h'_1) \approx \dot{m}_1 .c.(T_1 - T'_1)$$

De même pour le réseau β :

$$\dot{Q}_{\bar{\beta}} = \dot{m}_2 .(h_2 - h'_2) \approx \dot{m}_2 .c.(T_2 - T'_2)$$

Si les pertes sont négligeables $\Phi_B = \Phi_A = \Phi$

PREMIER PRINCIPE DE LA THERMODYNAMYQUE : RAPPELS

Outre les échanges d'énergie chaleur et travail effectués par un système ouvert avec le milieu extérieur, le système peut échanger de la matière avec l'extérieur.

L'élément de masse dm_i qui entre dans le système ou qui en sort à travers la section S_i a un caractère algébrique (positif lorsqu'il est reçu par le système, négatif lorsqu'il est cédé).

La plupart des processus thermodynamiques sont réalisés en systèmes ouverts. En effet, les cycles en système ouvert sont plus facilement réalisables que les cycles en système fermé.

Les échangeurs de chaleur font intervenir uniquement les échanges thermiques ‘pas d’énergie travail) alors que pour les turbines, les compresseurs et les moteurs à combustion interne, il y a échange de chaleur et de travail technique avec le milieu extérieur.