

Cours de Mécanique du point matériel

SMPC1

Module 1 : Mécanique 1

Session : Automne 2014

Prof. M. EL BAZ

Chapitre 1: Rappels et compléments mathématiques

I - Grandeurs scalaires et grandeurs vectorielles

Les grandeurs physiques peuvent être de nature scalaire ou vectorielle.

I.1) - Grandeurs scalaires

Pour spécifier une grandeur scalaire il suffit de préciser un nombre (et le plus souvent une unité).

Exemple:

La température, la pression en un point, le potentiel électrique, la masse...

I.2) - Grandeurs vectorielles

Pour spécifier une grandeur vectorielle il faut en plus d'un scalaire représentant l'intensité de la grandeur, préciser la direction, le sens, et le plus souvent en physique, le point d'application de la grandeur vectorielle.

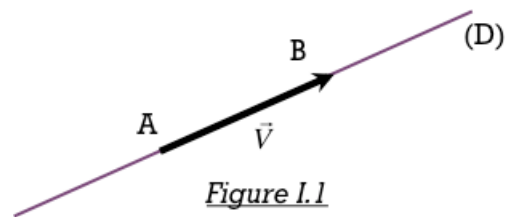
Un vecteur est ainsi caractériser par:

A : Son point d'application, c'est l'origine du vecteur.

$|\vec{V}| = |AB|$: Le module du vecteur.

(D) : La direction du vecteur.

Le sens du vecteur est indiqué par la flèche pointant de l'origine (point A) vers l'extrémité (point B).



Exemple :

La vitesse, la force, le champ électrique...

Vecteur unitaire :

Un vecteur unitaire est un vecteur dont le module est égal à 1.

II – Opérations sur les vecteurs

II.1) - Addition de vecteurs

Géométriquement (voir figure II.1), l'addition de deux vecteurs est effectuée en confondant l'origine du deuxième sur l'extrémité du premier. Le vecteur ayant pour origine l'origine du premier vecteur et comme extrémité, l'extrémité du deuxième définit la somme des deux vecteurs.

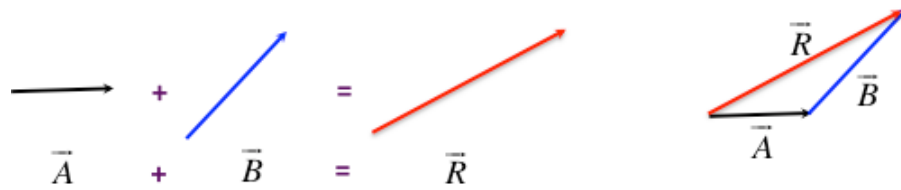


Figure II.1

La méthode peut être généralisée pour l'addition de plus de deux vecteurs (voir figure II.2):

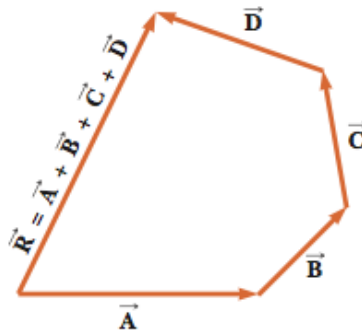


Figure II.2

II.2) - Multiplication par un scalaire

Soit λ un scalaire; le vecteur $\lambda \vec{V}$ est un vecteur ayant la même direction que le vecteur $\vec{V}$, de module $|\lambda| |\vec{V}|$ et dont le sens est celui de $\vec{V}$ si $\lambda > 0$ et opposé au sens de $\vec{V}$ si $\lambda < 0$

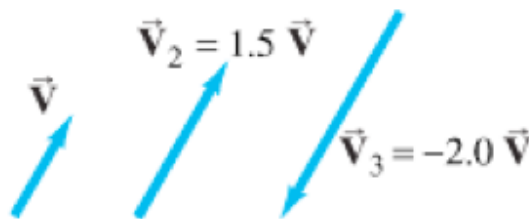


Figure II.3

II.3) - Composantes d'un vecteur

Dans plusieurs situations physiques il est important d'utiliser un repère comme système de référence. Le repère $R(O; X, Y, Z)$ est constitué d'un point d'origine O , et d'un système de trois axes (OX) , (OY) et (OZ) définissant les trois dimensions de l'espace. On associe une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, à ce repère. C'est une base constituée de vecteurs qui sont orthogonaux entre eux et unitaires.

$\vec{i}$: Vecteur unitaire de l'axe (OX) .

$\vec{j}$: Vecteur unitaire de l'axe (OY) .

$\vec{k}$: Vecteur unitaire de l'axe (OZ) .

Les composantes, (x, y, z) , d'un vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{OM}$ sont les projections orthogonales du vecteur position sur les trois axes du repère. Dans ce cas le vecteur position s'écrit :

$$\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})}$$

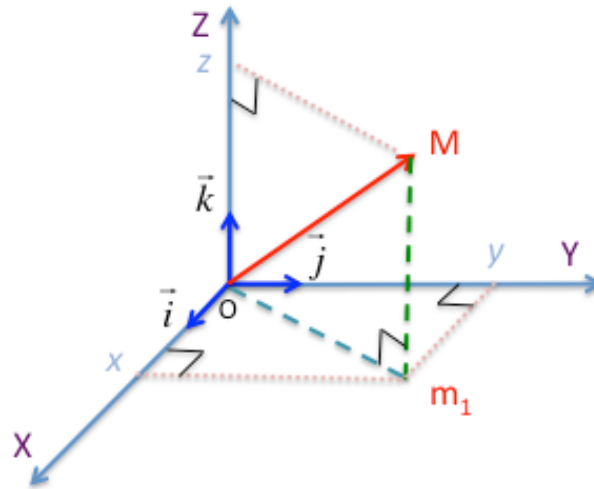


Figure II.4

II.4) - Egalité de deux vecteurs

Deux vecteurs $\vec{V}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ et $\vec{V}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ sont égaux si leurs composantes sont égales une à une ; c.à.d. $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ et $z_1 = z_2$.

II.5) - Produit scalaire

Soit deux vecteurs $\vec{V}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ et $\vec{V}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, faisant un angle θ entre eux $0 \leq \theta \leq \pi$.

Le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ est le scalaire défini par :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |\vec{V}_1| |\vec{V}_2| \cos \theta$$

Le produit scalaire peut être aussi exprimé en termes des composantes des vecteurs :

$$\boxed{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$$

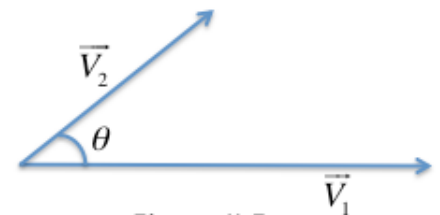


Figure II.5

Propriétés :

- En comparant les deux expressions du produit scalaire, on peut obtenir une expression de l'angle θ en fonction des coordonnées des deux vecteurs :

$$\cos \theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{|\vec{V}_1| |\vec{V}_2|}$$

- Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux ($\theta = \frac{\pi}{2}$) est nul :

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0 \Rightarrow \vec{V}_1 \perp \vec{V}_2.$$

- le produit scalaire permet de définir le module d'un vecteur $\vec{V}$:

$$|\vec{V}| = \sqrt{\vec{V} \cdot \vec{V}} = \sqrt{\vec{V}^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

II.6) – Produit vectoriel

Soit deux vecteurs $\vec{V}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ et $\vec{V}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, faisant un angle θ entre eux. Le produit vectoriel des deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ est un vecteur noté $\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ et caractérisé par :

- Module : $|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2| = |\vec{V}_1| |\vec{V}_2| \sin \theta$ avec $0 \leq \theta \leq \pi$.
- Direction : la direction du vecteur $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.
- Sens : Le sens du vecteur $\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ est tel que le trièdre $(\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V})$ est direct.

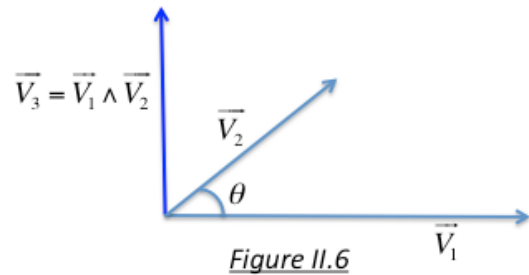


Figure II.6

En terme des composantes des vecteurs, le produit vectoriel est exprimé de la façon suivante :

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ x_2 z_1 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Propriétés du produit vectoriel :

- Le produit vectoriel de deux vecteurs est nul si et seulement si les deux vecteurs ont la même direction ($\theta = 0$) ou l'un des vecteurs est nul.
- Le produit vectoriel est anticommutatif (antisymétrique) : $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$.
- Interprétation géométrique du produit vectoriel :
Le module, $|\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2|$, du produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ représente la surface du parallélogramme formé par $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$.

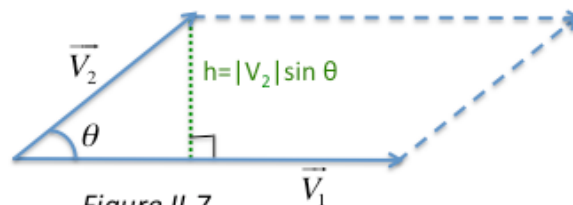


Figure II.7

II.7) - Dérivée d'un vecteur

Soit un vecteur $\vec{V}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$. La dérivée du vecteur $\vec{V}(t)$ dans la base fixe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dont les composantes sont les dérivées des composantes du vecteur $\vec{V}(t)$:

$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Il est important de noter que dans ce cas les vecteurs de la base sont considérés fixe ;

$$c.à.d. \frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}.$$

Propriétés :

- Linéarité : $\frac{d(\alpha\vec{V}_1 + \beta\vec{V}_2)}{dt} = \alpha \frac{d\vec{V}_1}{dt} + \beta \frac{d\vec{V}_2}{dt}$.
- Dérivée d'un produit scalaire : $\frac{d(\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)}{dt} = \frac{d\vec{V}_1}{dt} \cdot \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \cdot \frac{d\vec{V}_2}{dt}$.

- Dérivée d'un produit vectoriel : $\frac{d(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)}{dt} = \frac{d\vec{v}_1}{dt} \wedge \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \wedge \frac{d\vec{v}_2}{dt}$.
- Dérivée du produit d'un vecteur par une fonction scalaire : $\frac{d(f\vec{v})}{dt} = \frac{df}{dt} \vec{v} + f \frac{d\vec{v}}{dt}$
- On peut aussi montrer qu'un vecteur de module fixe : $|\vec{v}| = V = \text{Constante}$, est orthogonal à sa dérivée ; $\vec{v} \perp \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Preuve :

$$\frac{d(\vec{v}^2)}{dt} = \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

D'autre part on a :

$$\frac{d(\vec{v}^2)}{dt} = \frac{d(V^2)}{dt} = 2V \frac{dV}{dt} = 0$$

la dernière égalité vient du fait que le module est constant donc sa dérivée est nul.

En comparant les deux lignes, on trouve que $\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0$, ce qui implique que les deux vecteurs $\vec{v}$ et $\frac{d\vec{v}}{dt}$ sont orthogonaux.

III - Différentielle

III.1) - Différentielle d'une fonction scalaire.

III.1.1) Dérivée partielle d'une fonction à plusieurs variables :

Soit la fonction $f(x,y,z)$ dépendant de trois variables.

La dérivée partielle de $f(x,y,z)$ par rapport à l'une des variables est obtenue en calculant la dérivée en considérant les deux autres variables constantes. Ainsi :

- la dérivée partielle de f par rapport à x , notée $\frac{\partial f}{\partial x}$ est obtenue en dérivant par rapport à x et en considérant y et z comme des constantes.
- la dérivée partielle de f par rapport à y , notée $\frac{\partial f}{\partial y}$ est obtenue en dérivant par rapport à y et en considérant x et z comme des constantes.
- la dérivée partielle de f par rapport à z , notée $\frac{\partial f}{\partial z}$ est obtenue en dérivant par rapport à z et en considérant x et y comme des constantes.

Exemple :

$$f(x, y, z) = xy^2 + \cos z \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy \\ \frac{\partial f}{\partial z} = -\sin z \end{cases}$$

III.1.2) Différentielle totale :

La différentielle du champ scalaire $f(x,y,z)$ est définie par :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz.$$

Géométriquement, elle représente la variation de la fonction f d'un point $M(x,y,z)$ à un point infiniment voisin $M'(x+dx, y+dy, z+dz)$.

Exemple :

$$f(x, y, z) = xy^2 + \cos z \Rightarrow df = y^2 dx + 2xy dy - \sin z dz$$

III.2) - Différentielle d'une fonction vectorielle

La différentielle d'un champ vectoriel $\vec{V}(x, y, z)$ est défini par :

$$d\vec{V} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{V}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{V}}{\partial z} dz.$$

Géométriquement cela représente la variation du champ vectoriel $\vec{V}(x, y, z) = \overrightarrow{OM}$, quand le point matériel se déplace du point $M(x, y, z)$ au point voisin $M'(x + dx, y + dy, z + dz)$, c.à.d. sa variation $\overrightarrow{MM'}$.

IV - Opérateurs différentiels

IV.1) – Gradient

IV.1.1) Définition

Soit $f(x, y, z)$ une fonction continue et dérivable. Le vecteur gradient de la fonction scalaire $f(x, y, z)$ est le vecteur noté $\overrightarrow{\text{grad}} f$ et défini de la façon suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$$

Il est commode d'introduire l'opérateur différentiel $\vec{\nabla}$ (nabla) défini par :

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Ceci permet d'écrire le gradient d'une fonction scalaire $f(x, y, z)$ sous la forme suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{\nabla} f$$

IV.1.2) Relation entre le gradient et la différentielle totale :

En utilisant les définitions données auparavant, on peut établir la relation suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\overrightarrow{OM} = df.$$

Cette relation permet de donner une interprétation géométrique

à $\overrightarrow{\text{grad}} f$. En effet, sur une surface de niveau (S) d'une fonction $f(x, y, z)$, définie par $f(x, y, z) = \text{Cte}$, la variation de $f(x, y, z)$ est nulle, c.à.d. $df = 0$, ce qui donne

$$\overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\overrightarrow{OM} = 0.$$

Ceci permet de montrer que le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}} f$ est perpendiculaire à tout déplacement élémentaire sur la surface de niveau. En d'autres termes, $\overrightarrow{\text{grad}} f$ est perpendiculaire à la surface de niveau $f(x, y, z) = \text{Cte}$ en tout point $M(x, y, z)$.

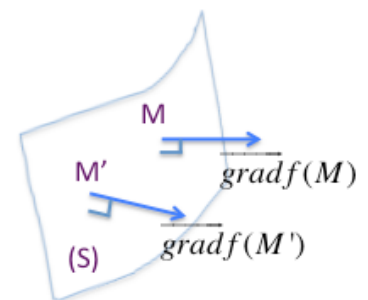


Figure IV.1

IV.2) – Divergence

L'opérateur nabla définit précédemment permet de définir aussi la divergence d'un vecteur d'un vecteur :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$$

Ainsi, la divergence d'un vecteur $\vec{V} = V_x \vec{i} + V_y \vec{j} + V_z \vec{k}$ est donnée par :

$$\operatorname{div} \vec{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}.$$

IV.3) Rotationnel

Soit $\vec{V}(M)$ un champ vectoriel ayant pour composantes au point $M(x,y,z)$:

$$\vec{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} V_x(x, y, z) \\ V_y(x, y, z) \\ V_z(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Le rotationnel du vecteur $\vec{V}(M)$ est un vecteur défini en utilisant l'opérateur $\vec{\nabla}$:

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{V}(M) = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}(M)$$

Les composantes de ce vecteur sont donc :

$$\vec{\operatorname{rot}} \vec{V}(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} V_x(x, y, z) \\ V_y(x, y, z) \\ V_z(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \\ \frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x} \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Propriété :

Si le vecteur $\vec{V}$ peut être écrit comme le gradient d'une fonction $f(x,y,z)$ donnée, alors on peut montrer que $\vec{\operatorname{rot}} \vec{V} = \vec{0}$. En effet, quelque soit la fonction $f(x,y,z)$ (en tenant compte des conditions de dérivabilité) on peut montrer que

$$\vec{\operatorname{rot}} (\vec{\operatorname{grad}} f) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} f) = \vec{0}$$

Ce qui montre que le rotationnel d'un vecteur gradient est toujours nul. Cette propriété peut être utilisé pour montrer qu'un certain champ vectoriel dérive d'un gradient. En effet, il suffit alors de montrer que le rotationnel de ce champ vectoriel est nul $\vec{\operatorname{rot}} \vec{V}(M) = \vec{0}$.

V - Systèmes de coordonnées

V.1) – Coordonnées Cartésiennes

V.1.1) Définitions

Soit le repère fixe orthonormé directe $R(O;X,Y,Z)$ de base orthonormé directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. La position d'un point M peut être repérer par ses trois composantes cartésiennes (x, y, z) , projection orthogonales sur les trois axes du repère :

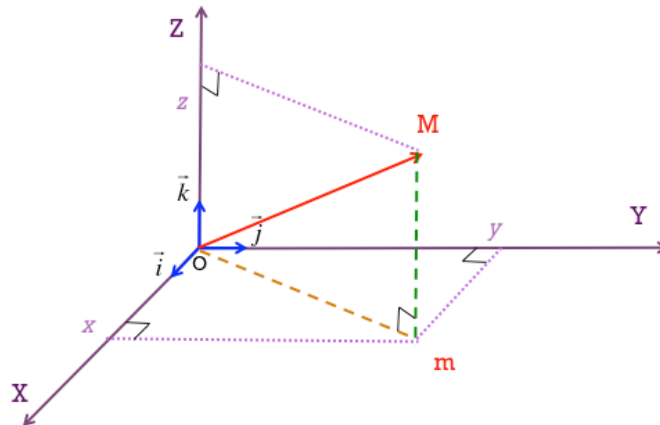


Figure V.1

Le vecteur position s'écrit alors: $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

V.1.2) Déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes

Le déplacement élémentaire du point $M(x,y,z)$ en un point infiniment voisin $M'(x+dx, y+dy, z+dz)$ engendre un déplacement vectoriel $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{OM}$:

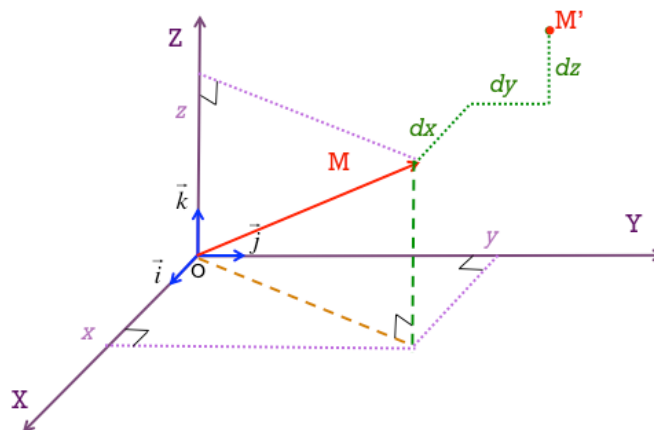


Figure V.2

Ce déplacement élémentaire n'est autre que la différentielle du vecteur position :

$$d\overrightarrow{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

V.1.3) Élément de volume en coordonnées cartésiennes:

Le volume défini par les déplacement élémentaire est appelé élément de volume ou encore volume élémentaire. En coordonnées cartésienne le volume élémentaire est un cube de cote dx , dy et dz :

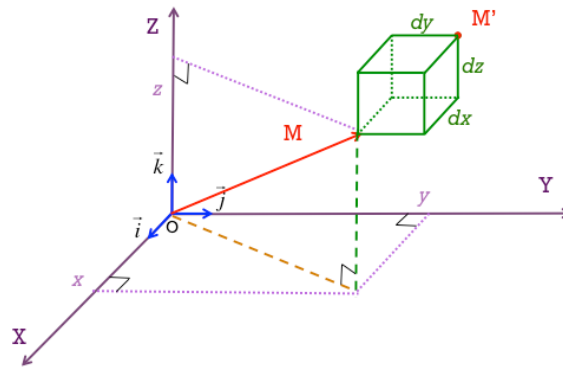
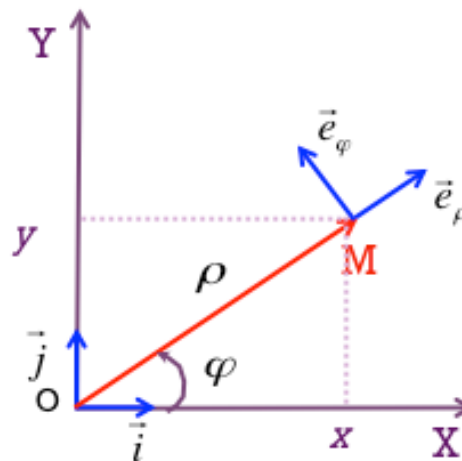


Figure V.3
 $dV = dx \, dy \, dz$

V.2) Coordonnées Polaires

C'est un système de coordonnées utilisé pour repérer la position d'un point M à deux dimensions. Ainsi, la position du point M , est repérée par la donnée de la distance ρ , qui



le sépare de l'origine O et de l'angle φ que fait le vecteur $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe (OX) .

Figure V.4

On a donc

$$\rho = |\overrightarrow{OM}| \quad ; \quad 0 \leq \rho \leq +\infty$$

$$\varphi = (\overrightarrow{OM}, \vec{i}) \quad ; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

En utilisant le schéma dans la figure V.4 on peut trouver les relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$$

On définit la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$ associées aux coordonnées polaires. Le vecteur $\vec{e}_\rho$ est le vecteur unitaire de la direction $\overrightarrow{OM}$, et le vecteur $\vec{e}_\varphi$ est le vecteur **directement** perpendiculaire à $\vec{e}_\rho$. Cette base est relié à la base $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j} \\ \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \end{cases}$$

Le vecteur position en coordonnées polaires s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho$$

V.3) – Coordonnées Cylindriques

V.3.1) Définitions

Il est possible de repérer la position, dans l'espace, d'un point M en utilisant le système de coordonnées cylindriques. Dans ce système la position du point est repérée par la donnée de la composante z (comme dans les coordonnées cartésiennes) et de ses coordonnées polaires qui permettent de repérer la position de la projection orthogonale du point M sur le plan horizontale.

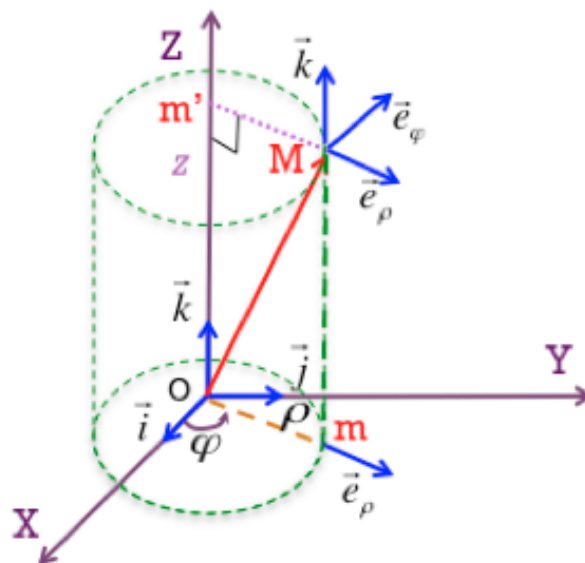


Figure V.5

On a donc d'après le paragraphe précédent :

$$\begin{aligned} \rho &= |\overrightarrow{Om}| \quad ; \quad 0 \leq \rho < +\infty \\ \varphi &= (\overrightarrow{Om}, \vec{i}) \quad ; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \\ z &= \overrightarrow{Om'} \quad ; \quad -\infty < z < +\infty \end{aligned}$$

On peut passer du système de coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes en utilisant les relations :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

ou inversement :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

On associe la base orthonormée $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ aux coordonnées cylindriques, où le vecteur $\vec{e}_\rho$ est le vecteur unitaire de la direction $\overrightarrow{Om}$, et le vecteur $\vec{e}_\varphi$ est défini de tel sorte à ce que le trièdre $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ soit direct.

Cette base est reliée à la base des coordonnées cartésiennes par les relations :

$$\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j} \\ \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \\ \vec{k} = \vec{k} \end{cases}$$

Dans cette base le vecteur position s'écrit de la façon suivante :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{k}$$

V.3.2) Déplacement élémentaire en coordonnées Cylindriques

Le déplacement élémentaire en coordonnées cylindrique s'écrit :

$$d\overrightarrow{OM} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \vec{e}_\varphi + dz \vec{k}$$

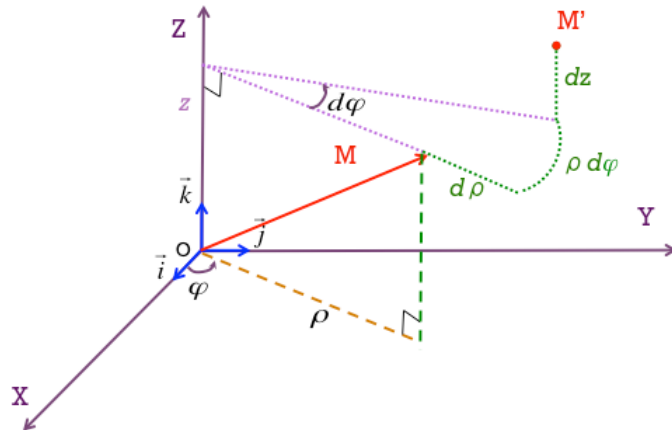


Figure V.6

En effet, le déplacement de M vers M' s'effectue en faisant une translation $d\rho$ suivant $\vec{e}_\rho$, suivi d'une rotation d'un angle $d\varphi$, qui donne lieu à un déplacement de $\rho d\varphi$, puis une translation dz suivant $\vec{k}$.

V.3.3) Élément de volume en coordonnées Cylindriques

Le volume élémentaire engendré par le déplacement élémentaire, décrit ci-dessus, est

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz$$

comme indiqué dans la figure suivante :

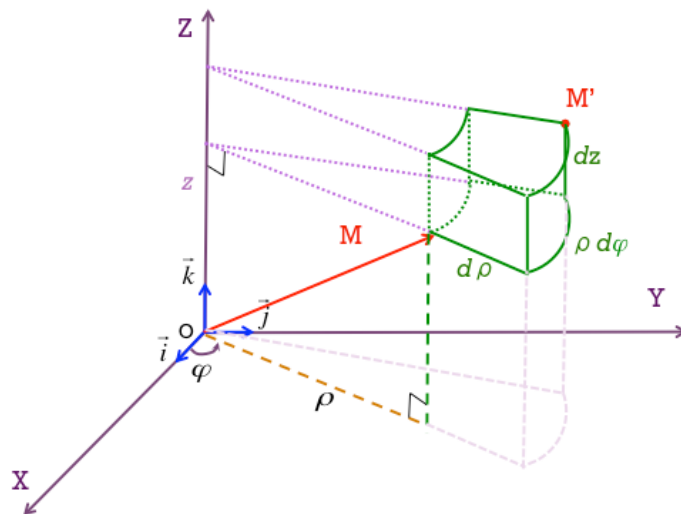


Figure V.7

V.4) - Coordonnées Sphériques

V.4.1) Définitions

Dans l'espace à trois dimensions on peut utiliser le système des coordonnées sphériques, dont la base associée est une base mobile. Ce système de coordonnées est adéquat dans les cas où le système étudié présente un point particulier O , de symétrie autour duquel les rotations sont privilégiées.

La position du point matériel est alors repéré par la distance r et deux angles φ et θ . r étant la distance qui sépare le point matériel M du point particulier O (l'origine). L'angle φ appelé *longitude* ou *azimut* est l'angle que fait la projection du vecteur position sur le plan horizontal avec l'axe (OX) (similaire au cas du système de coordonnées cylindriques). L'angle θ , appelé *colatitude*, est l'angle que fait le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe (OZ) .

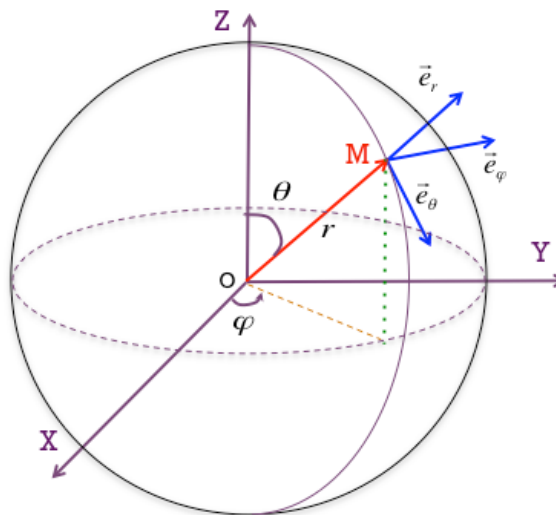


Figure V.8

On a donc :

$$\begin{aligned} r &= |\overrightarrow{OM}| \quad ; \quad 0 \leq r < +\infty \\ \varphi &= (\overrightarrow{Om}, \vec{i}) \quad ; \quad 0 \leq \varphi < 2\pi \\ \theta &= (\overrightarrow{OM}, \vec{k}) \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq \pi \end{aligned}$$

On peut passer du système de coordonnées cylindriques aux coordonnées cartésiennes en utilisant les relations :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

Ces relations peuvent être inversées, pour exprimer les coordonnées sphériques en termes des coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \theta = \arctan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases}$$

La base orthonormée associée aux coordonnées cylindriques est notée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$. Le vecteur $\vec{e}_r$ est le vecteur unitaire dans la direction et le sens de $\overrightarrow{OM}$. $\vec{e}_\theta$ est le vecteur unitaire obtenu par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ à partir de $\vec{e}_r$ dans le plan (OZ, OM) . Le vecteur $\vec{e}_\varphi$ est défini de tel sorte à ce que le trièdre $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ soit directe.

Cette base est reliée à la base des coordonnées cartésiennes par les relations:

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{i} + \sin \theta \sin \varphi \vec{j} + \cos \theta \vec{k} \\ \vec{e}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{i} + \cos \theta \sin \varphi \vec{j} - \sin \theta \vec{k} \\ \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j} \end{cases}$$

Dans cette base, le vecteur position s'écrit de la façon suivante :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{e}_r$$

V.4.2) Déplacement élémentaire en coordonnées Sphériques

Le déplacement élémentaire en coordonnées sphérique s'écrit :

$$d\overrightarrow{OM} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$$

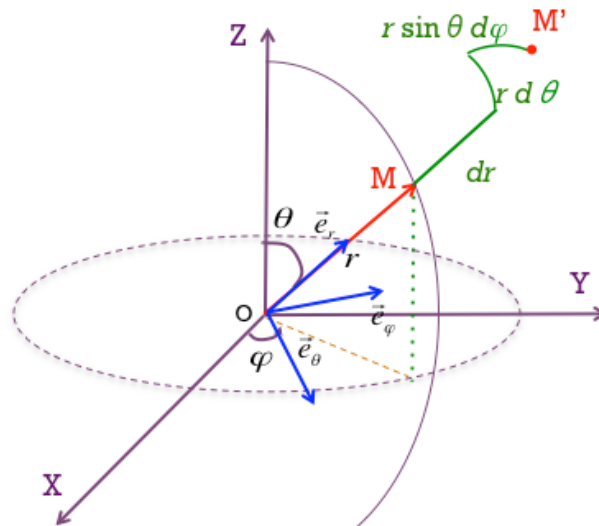


Figure V.9

Ce résultat peut être établi en calculant la différentielle du vecteur position :

$$\begin{aligned} d\overrightarrow{OM} &= d(r\vec{e}_r) \\ &= dr \vec{e}_r + r d\vec{e}_r \\ &= dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

puisque

$$d\vec{e}_r = \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} d\varphi = d\theta \vec{e}_\theta + \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi.$$

Le même résultat peut être obtenue en suivant une approche géométrique. En effet, une variation dr de r donne lieu à un déplacement $dr \vec{e}_r$, une variation $d\theta$ de θ donne lieu à un déplacement $r d\theta \vec{e}_\theta$ et une variation $d\varphi$ de φ donne lieu à un déplacement $r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$.

V.4.3) Élément de volume en coordonnées Sphériques

L'élément de volume en coordonnées sphérique est obtenu en prenant le produit des composantes du déplacement élémentaire:

$$dV = r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\varphi$$

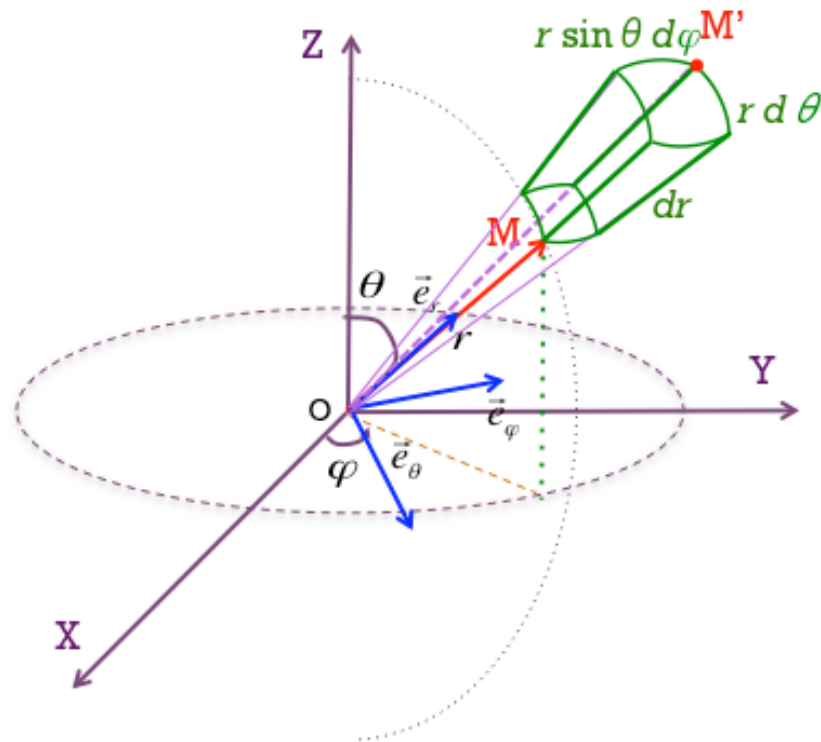


Figure V.10