Chapitre 2 : Cinématique du point matériel

I - Définitions Générales

I.1)- Cinématique

La cinématique est l'étude du mouvement en fonction du temps indépendamment des causes produisant ce mouvement (les forces appliquées au point matériel).

I.2) – Repère

Pour repérer la position d'une particule, il est nécessaire de définir un repère d'espace.
Cela consiste à choisir un origine O et une base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.
Le trièdre $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ est le repère d'espace.

I.3) – Référentiel

Un référentiel est un repère spatial muni d'un repère temporel (repère + horloge). Un référentiel est donc un objet par rapport auquel on étudie le mouvement.

Tout mouvement est relatif au référentiel utilisé.

II- Cinématique sans changement de référentiel

II.1) – Trajectoire

La trajectoire d'un point mobile M dans un repère donné est la courbe formée par l'ensemble des positions successives du point M dans ce repère.

La trajectoire d'un point mobile dépend du référentiel choisi.

II.2) – Vecteur vitesse d'un point matériel

Puisque la trajectoire d'un point mobile dépend du référentiel choisi, les caractéristiques du mouvement doivent changer d'un référentiel à un autre. Une de ces caractéristiques est le vecteur vitesse du point mobile. C'est pour cette raison qu'on utilise la notation $\vec{V}(M/R)$ pour signifier qu'il s'agit de la vitesse du point M par rapport au référentiel R. On utilisera la même notation pour les deux types de vitesse qu'on va traiter dans la suite, la vitesse moyenne et la vitesse instantanée.

Vitesse moyenne :

Soit un point matériel décrivant une trajectoire *(C)* dans un référentiel *R*. Le point matériel occupe la position *M* à l'instant *t* et la position *M'* à l'instant *t'=t+Δt*.
La vitesse moyenne du point matériel entre *t* et *t'* est alors donnée par:

$$\vec{V}(M/R) = \frac{\overrightarrow{MM'}}{t'-t} = \frac{\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM'}}{\Delta t}$$

Le vecteur vitesse est donc un vecteur qui a la même direction et le même sens que $\overrightarrow{MM'}$ (si *t'>t*).

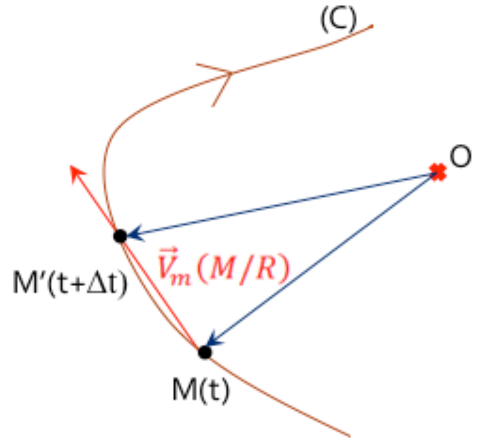


Figure II.1

Vitesse instantanée :

Le vecteur vitesse instantanée de *M* par rapport au référentiel *R* à un instant *t* est obtenue en prenant la limite *Δt →0* dans la définition de la vitesse moyenne, (*c.à.d.* les points *M* et *M'* sont infiniment proche):

$$\vec{V}(M/R) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM'}-\overrightarrow{OM}}{\Delta t} = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R$$

Propriétés du vecteur vitesse instantanée :

- Son origine est la position de la particule à l'instant *t*.
- Sa direction est tangente à la trajectoire à la position considérée.
- Son sens est donné par le sens de parcours de la trajectoire.
- Son module est $\frac{ds}{dt}$ où *ds* représente le déplacement curviligne élémentaire.

On peut résumer ces propriétés dans l'expression :

$$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \frac{\overrightarrow{MM'}}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{u}_\tau$$

où $\vec{u}_\tau$ dénote le vecteur unitaire tangent à la trajectoire de même sens que le sens du mouvement.

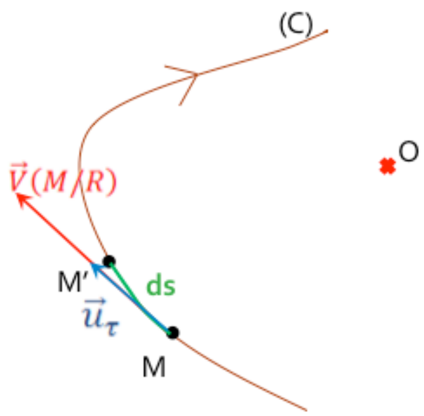


Figure II.2

II.3) – Vecteur accélération

Une autre caractéristique du mouvement d'un point matériel est le vecteur accélération. On utilise une notation similaire à celle pour la vitesse, $\vec{\gamma}(M/R)$, pour signifier qu'il s'agit de l'accélération du point M par rapport au référentiel R.

Le vecteur accélération est la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse, ou de façon équivalente la dérivée seconde du vecteur position par rapport au temps:

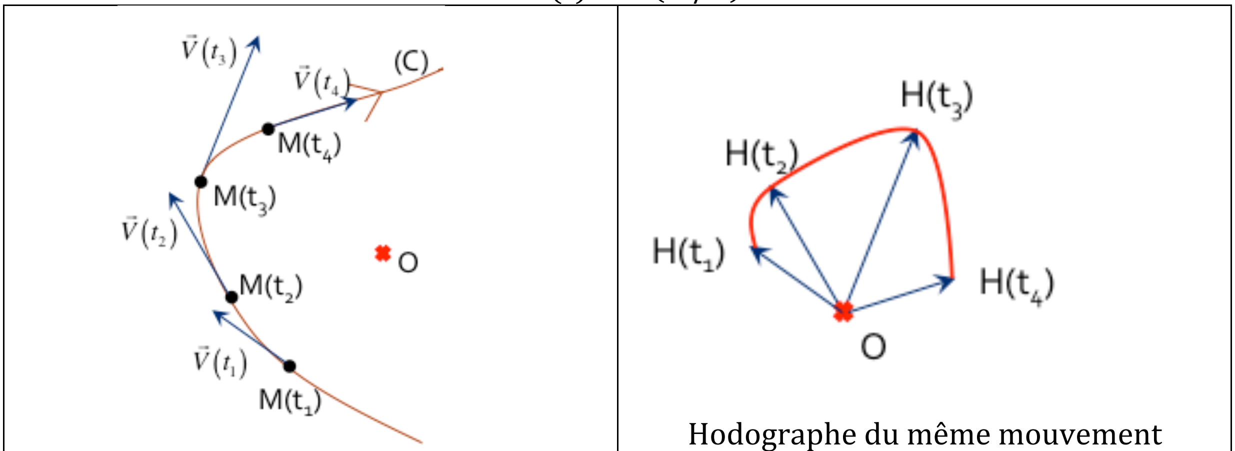
$$\vec{\gamma}(M/R) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_R$$

On peut définir le vecteur accélération moyenne aussi de façon similaire au vecteur vitesse. Il mesure alors la variation moyenne de la vitesse sur un interval de temps Δt.

II.4) – Hodographe du mouvement

L'hodographe *(H)* d'un mouvement par rapport à un point fixe O est l'ensemble des points H tel que à chaque instant :

$$\overrightarrow{OH}(t) = \vec{V}(M/R)$$



Trajectoire d'un point matériel
Figure II.3.a

Hodographe du même mouvement
Figure II.3.b

La figure II.3 ci haut, décrit le mouvement d'un point matériel. A gauche la trajectoire est obtenue en reliant les extrémités du vecteur position à chaque instant t. L'hodographe, à droite, est la courbe décrite par le vecteur vitesse, d'origine O.

II.5) – Vecteur vitesse dans les différents systèmes de coordonnées

II.5.1) Cordonnées cartésiennes :

En dérivant l'expression du vecteur position en coordonnées cartésiennes par rapport au temps, on obtient l'expression de la vitesse en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Les vecteurs de la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ des coordonnées cartésiennes étant fixes, leurs dérivées par rapport au temps sont nulles:

$$\frac{d\vec{\imath}}{dt} = \frac{d\vec{\jmath}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$$

On utilise aussi la notation suivante

$$\vec{V}(M/R) = \dot{x}\,\vec{\imath} + \dot{y}\,\vec{\jmath} + \dot{z}\,\vec{k}$$

où le point sur la variable signifie la dérivée par rapport au temps.

II.5.2) Coordonnées cylindriques :

Pour obtenir l'expression du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques on dérive le vecteur position en coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}\vec{V}(M/R) &= \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \\ &= \frac{d\left(\rho\vec{e}_\rho + z\vec{k}\right)}{dt} \\ &= \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k} + z\frac{d\vec{k}}{dt}\end{aligned}$$

Sachant que $\vec{k}$ est un vecteur fixe sa dérivée est nulle $\frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{0}$. Le vecteur $\vec{e}_\rho$étant mobile, sa dérivée n'est pas nulle en générale. En effet, $\vec{e}_\rho$ dépend de façon implicite de t, à travers sa dépendance de l'angle φ. Ainsi

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}.$$

En utilisant l'expression du vecteur $\vec{e}_\rho$ dan la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ on obtient

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi} = \frac{d(\cos\varphi\ \vec{\imath} + \sin\varphi\ \vec{\jmath}\,)}{d\varphi} = -\sin\varphi\ \vec{\imath} + \cos\varphi\ \vec{\jmath} = \vec{e}_\varphi$$

La dérivée par rapport au temps est alors donnée par:

$$\boxed{\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi}$$

ou encore

$$\boxed{\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi}$$

On obtient alors pour le vecteur vitesse :

$$\boxed{\vec{V}(M/R) = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + \frac{dz}{dt}\vec{k}}$$

ou encore

$$\boxed{\vec{V}(M/R) = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}\,\vec{k}}$$

II.5.3) Coordonnées sphériques :

Le vecteur position en coordonnées sphériques dépend du vecteur $\vec{e}_r$. Ce dernier dépend des angles θ et φ, donc sa dérivée par rapport au temps est donnée par :

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt}.$$

En utilisant les expressions des vecteurs $\left(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\right)$ en fonction des vecteurs $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ données au premier chapitre *(paragraphe V.4.1)*, on montre que

$$\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta} = \vec{e}_\theta \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi} = \sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

Ainsi

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi.$$

Le vecteur vitesse est obtenu en dérivant le vecteur position :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

Ainsi, en coordonnées sphériques, le vecteur vitesse s'écrit :

$$\boxed{\vec{V}(M/R) = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi}$$

ou encore

$$\boxed{\vec{V}(M/R) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi}$$

II.6) – Vecteur accélération dans les différents systèmes de coordonnées

Pour obtenir les expressions des composantes du vecteur accélérations dans les différents systèmes de coordonnées il faut dériver les expressions du vecteur vitesse obtenues dans le paragraphe précédent

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

II.6.1) Coordonnées cartésiennes :

En utilisant l'expression du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes, on a :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\left(\dot{x}\,\vec{\imath} + \dot{y}\,\vec{\jmath} + \dot{z}\,\vec{k}\right)}{dt}$$

Puisque les vecteurs de la base des coordonnées cartésiennes sont fixes, on dérive seulement les composantes du vecteur vitesse, ce qui donne

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

On utilise parfois la notation suivante

$$\vec{\gamma}(M/R) = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}$$

où les deux points sur une variable signifie la dérivée seconde de la variable par rapport au temps.

II.6.2) Coordonnées cylindriques :

En coordonnées cylindriques le vecteur accélération est donné par l'expression suivante :

$$\boxed{\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^{\,2})\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{k}}$$

Preuve :

On utilise l'expression du vecteur vitesse en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\left(\dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}\,\vec{k}\right)}{dt}$$

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d(\dot{\rho}\,)}{dt}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\,\frac{d\left(\vec{e}_\rho\right)}{dt} + \frac{d(\rho)}{dt}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \rho\frac{d(\dot{\varphi}\,)}{dt}\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}\,\frac{d\left(\vec{e}_\varphi\right)}{dt} + \frac{d(\dot{z}\,)}{dt}\vec{k}.$$

On avait obtenu l'expression de la dérivée par rapport au temps du vecteur $\vec{e}_\rho$:

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

On obtient de façon similaire la dérivée du vecteur $\vec{e}_\varphi$:

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d(-\sin\varphi\ \vec{\imath} + \cos\varphi\ \vec{\jmath}\,)}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = (-\cos\varphi\ \vec{\imath} - \sin\varphi\ \vec{\jmath})\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho}$$

En remplaçant dans l'expression de l'accélération ci dessus on obtient :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\,\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{\rho}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - \rho\dot{\varphi}^{\,2}\vec{e}_\rho + \ddot{z}\vec{k}$$

qui donne finalement :

$$\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^{\,2})\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{k}$$

II.6.3) Coordonnées sphériques :

Le vecteur accélération en coordonnées sphériques est :

$$\begin{aligned}\vec{\gamma}(M/R) = \quad & \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\vec{e}_r \\ & + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\vec{e}_\theta \\ & + \left(2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta\right)\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

Preuve :

On utilise l'expression du vecteur vitesse en coordonnées sphériques:

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\left(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi\right)}{dt}$$

Pour dériver les vecteurs de la base $\left(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\right)$ on utilise leurs expressions en fonctions des vecteurs de la base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On obtient alors

$$\frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta} = -\vec{e}_r \quad , \quad \frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\varphi} = \cos\theta\,\vec{e}_\varphi \quad , \quad \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = -\vec{e}_\rho = -(\sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\,\vec{e}_\theta)$$

Les dérivées temporelles des vecteurs de la base $\left(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi\right)$ sont alors données par :

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\theta$$

Ainsi en dérivant les composantes du vecteur vitesse en coordonnées sphériques ainsi que les vecteurs de la base, on obtient alors l'expression finale du vecteur accélération en coordonnées sphériques donnée ci dessus.

II.7) – Repère de Frenet

Dans le cas d'un mouvement plan on peut définir en chaque point M de la trajectoire la base de Frenet. Pour cela on définit en tout point M un vecteur $\vec{u}_\tau$, tangent à la trajectoire et orienté dans le sens de celle ci, et on définit le vecteur $\vec{u}_n$ perpendiculaire à $\vec{u}_\tau$ et orienté vers la concavité de la trajectoire. Pour compléter le trièdre on définit un vecteur $\vec{B}$ tel que le trièdre $\left(\vec{u}_\tau, \vec{u}_n, \vec{B}\right)$ est un trièdre directe *c.à.d.* $\vec{B} = \vec{u}_\tau \wedge \vec{u}_n$. Le trièdre $\left(\vec{u}_\tau, \vec{u}_n, \vec{B}\right)$ est appelé repère de Serret-Frenet.

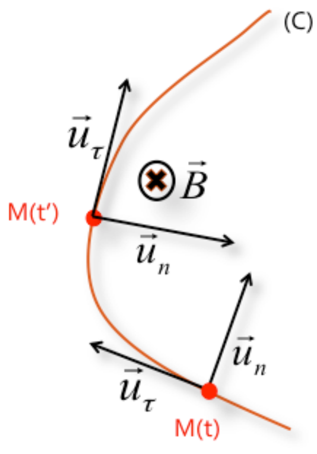


Figure II.4

Abscisse curviligne :

Dans le cas d'un mouvement curviligne il est parfois utile d'utiliser l'abscisse curviligne pour repérer la position du point matériel. Pour cela, on fixe un point *A* de la trajectoire (voir la *figure II.5*). L'abscisse curviligne s(t) est alors définie comme étant la distance curviligne du point fixe *A* au point *M(t)* qu'occupe le point matériel à l'instant t :

$$\widehat{AM} = \text{arc}(AM) = s(t)$$

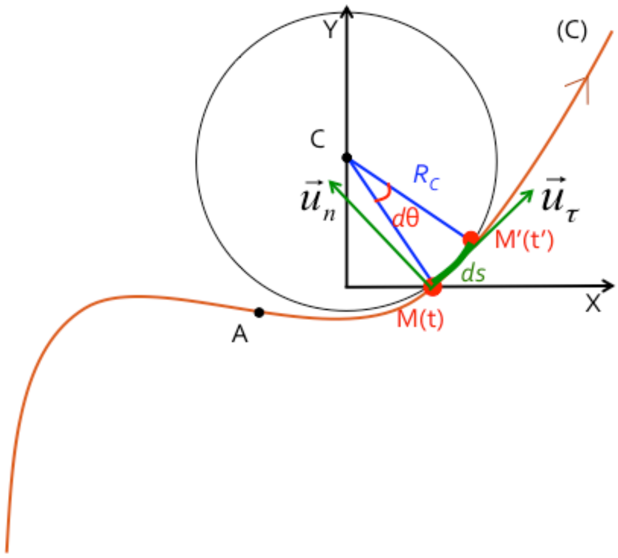


Figure II.5

A l'instant *t' =t+dt*, le point matériel occupant la position *M'(t')* on aura le vecteur position:

$$\widehat{AM'} = \text{arc}(AM') = s(t') \quad ; \quad t' = t + dt$$

Le déplacement élémentaire s'écrit alors :

$$\widehat{MM'} = \text{arc}(MM') = s(t') - s(t) = ds$$

ds est un arc de cercle de centre *C* et de rayon R_C, appelé rayon de courbure.

Les vecteurs $\vec{u}_\tau$ et $\vec{u}_n$ peuvent alors être obtenue de façon analytique de la façon suivante

$$\boxed{\vec{u}_\tau = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds} \quad ; \quad \vec{u}_n = R_C \frac{d\vec{u}_\tau}{ds}}$$

Preuve :

On a $d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = ds\,\vec{u}_\tau$, ce qui donne la définition du vecteur tangent $\vec{u}_\tau = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}$.

Pour le vecteur normal, on remarque d'abord d'après le figure II.5, que $\vec{u}_n$ est le vecteur directement perpendiculaire au vecteur $\vec{u}_\tau$ on a donc *(Voir exercice 2 série I)*:

$$\vec{u}_n = \frac{d\vec{u}_\tau}{d\theta}.$$

D'autre part on a $ds = R_C d\theta \Longrightarrow d\theta = \frac{ds}{R_C}$. Ce qui donne pour $\vec{u}_n$ l'expression $\vec{u}_n = R_C \frac{d\vec{u}_\tau}{ds}$.

Vecteur vitesse dans le repère de Frenet :

En dérivant le vecteur position par rapport au temps on trouve l'expression du vecteur vitesse dans la base de Frenet :

$$\boxed{\vec{V}(M/R) = \frac{ds}{dt}\vec{u}_\tau}$$

En effet, on a déjà vu que $d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = ds\,\vec{u}_\tau$ ce qui donne pour le vecteur vitesse $\vec{V}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{u}_\tau$.

Vecteur accélération dans le repère de Frenet :

Le vecteur accélération dans la base de Frenet est donné par

$$\boxed{\vec{\gamma}(M/R) = \frac{dV}{dt}\vec{u}_\tau + \frac{V^2}{R_C}\vec{u}_n}$$

Preuve :

Pour dériver l'expression du vecteur vitesse obtenue ci-haut, on doit dériver, entre autres, le vecteur tangentielle $\vec{u}_\tau$ par rapport au temps :

$$\frac{d\vec{u}_\tau}{dt} = \frac{d\vec{u}_\tau}{ds}\frac{ds}{dt}$$

Sachant que $\frac{ds}{dt} = V$, le module du vecteur vitesse et que $\frac{d\vec{u}_\tau}{ds} = \frac{1}{R_C}\vec{u}_n$, on obtient

$$\frac{d\vec{u}_\tau}{dt} = \frac{V}{R_C}\vec{u}_n.$$

On dérive le vecteur vitesse pour obtenir l'expression du vecteur accélération :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt} = \frac{d\left(\frac{ds}{dt}\vec{u}_\tau\right)}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{u}_\tau + \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{u}_\tau}{dt} = \frac{dV}{dt}\vec{u}_\tau + \frac{V^2}{R_C}\vec{u}_n$$

Le vecteur accélération peut être décomposé en une composante tangentielle, appelée accélération tangentielle :

$$\vec{\gamma}_\tau = \frac{dV}{dt}\vec{u}_\tau$$

et une composante normale, appelée accélération normale :

$$\vec{\gamma}_n = \frac{V^2}{R_C}\vec{u}_n$$

tel que

$$\vec{\gamma}(M/R) = \vec{\gamma}_\tau + \vec{\gamma}_n$$

ou encore en terme de modules

$$\gamma^2 = \gamma_\tau^2 + \gamma_n^2$$

On peut remarquer que la composante de l'accélération normale est toujours positive, ce qui signifie que l'accélération normale est toujours orientée vers la concavité de la trajectoire.

II.8) – Exemple de mouvement : Le mouvement circulaire

On considère le mouvement d'un point matériel M dont la trajectoire est un cercle dans le plan XOY, de centre O et de rayon R.

Dans ce cas le vecteur position peut s'écrire dans la base cartésienne :

$$\overrightarrow{OM} = R\cos\theta\,\vec{\imath} + R\sin\theta\,\vec{\jmath}$$

ou encore dans la base des coordonnées polaires :

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{e}_\rho = R\vec{u}_r$$

Ici on a introduit le vecteur $\vec{u}_r = -\vec{u}_n$. On remarque ainsi que le trièdre $(\vec{u}_r, \vec{u}_\tau, \vec{k})$ *(à ne pas confondre avec la base de Frenet)* est un trièdre directe.

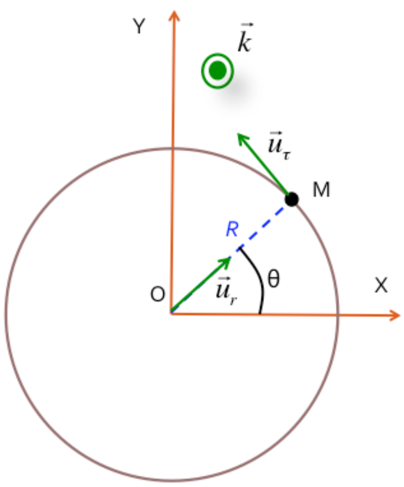


Figure II.6

II.8.1) Le vecteur vitesse :

En utilisant les résultats dans la base de Frenet le vecteur vitesse s 'écrit :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{ds}{dt}\vec{u}_\tau = V\,\vec{u}_\tau$$

On avait aussi vu que $ds = R\,d\theta$, ce qui donne pour la vitesse $\vec{V}(M/R) = R\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\tau$. Ce qui permet d'écrire :

$$V = R\,\omega \qquad \text{où} \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \text{est la vitesse angulaire.}$$

La rotation étant autour de l'axe OZ, on définit le vecteur rotation angulaire dans ce cas de la façon suivante :

$$\vec{\omega} = \omega\,\vec{k} = \frac{d\theta}{dt}\vec{k}$$

On peut ainsi montrer que

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}}$$

Preuve :

Le trièdre $(\vec{u}_r, \vec{u}_\tau, \vec{k})$ étant un trièdre directe on a $\vec{u}_\tau = \vec{k} \wedge \vec{u}_r$ ce qui permet d'écrire pour le vecteur vitesse :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = V\,\vec{u}_\tau = R\,\omega\,\vec{u}_\tau = R\,\omega\,(\vec{k} \wedge \vec{u}_r) = \omega\vec{k} \wedge R\vec{u}_r.$$

En utilisant la définition du vecteur vitesse angulaire, $\vec{\omega} = \omega\,\vec{k}$, et l'expression du vecteur position, $\overrightarrow{OM} = R\,\vec{u}_r$, on obtient alors $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$.

Remarque :

Si $\overrightarrow{OM}$ est un vecteur unitaire : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$, alors on a le résultat important suivant

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}$$

II.8.2) Le vecteur accélération :

Là aussi, en utilisant les résultats obtenus dans la base de Frenet :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \frac{dV}{dt}\vec{u}_\tau + \frac{V^2}{R_C}\vec{u}_n,$$

on réécrit le vecteur accélération en fonction de la vitesse angulaire de la façon suivante

$$\vec{\gamma}(M/R) = R\frac{d\omega}{dt}\vec{u}_\tau + R\omega^2\vec{u}_n$$

$\frac{d\omega}{dt}$ est l'accélération angulaire.

Remarque – Mouvement circulaire uniforme :

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme la vitesse angulaire est constante, c.à.d. que l'accélération angulaire est nulle :

$$\omega = Cte \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\omega}{dt} = 0.$$

L'accélération tangentielle étant nulle, l'accélération n'a qu'une seule composante, la composante normale :

$$\vec{\gamma}(M/R) = \vec{\gamma}_n = R\omega^2\vec{u}_n.$$

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme l'accélération est toujours normale à la trajectoire et orienté vers le centre du cercle : l'accélération est centripète.

III- Cinématique avec changement de référentiel

III.1)- Mouvement relatif et mouvement absolu

On considère deux référentiels $R_1(O_1; X_1,Y_1,Z_1)$ et $R_2(O_2; X_2,Y_2,Z_2)$, de base respectives $(\vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1, \vec{k}_1)$ et $(\vec{\imath}_2, \vec{\jmath}_2, \vec{k}_2)$, en mouvement l'un par rapport à l'autre. On suppose que R_1 est fixe, on l'appel référentiel absolu. Le référentiel R_2 est alors appelé référentiel relatif; il est en mouvement par rapport à R_1. On étudie le mouvement d'un point matériel M par rapport aux deux référentiels :

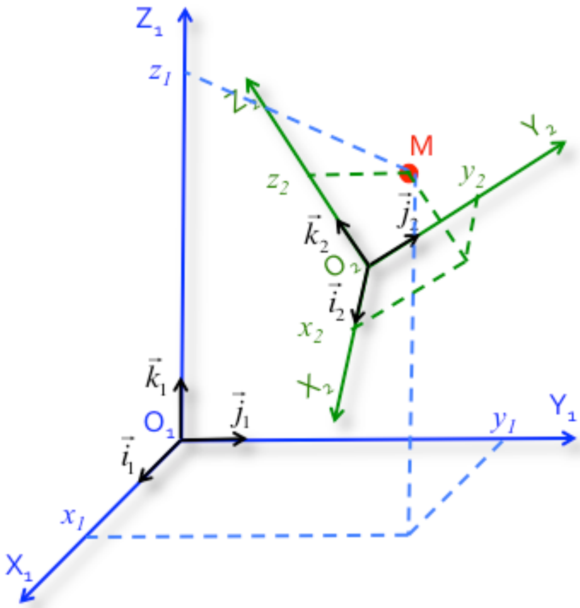


Figure III.1

III.1.1) Le mouvement absolu de M

Le mouvement de M par rapport au référentiel absolu est appelé mouvement absolu. La position du point M est repéré par la donnée des coordonnées cartésiennes dans le référentiel R_1 *(voir figure III.1)*

$$\overrightarrow{O_1M} = x_1\vec{\imath}_1 + y_1\vec{\jmath}_1 + z_1\vec{k}_1$$

La vitesse absolue de M est la vitesse du point matériel M par rapport au référetiel absolu, elle est obtenue en dérivant par rapport au temps le vecteur position dans le référentiel R_1 :

$$\vec{V}(M/R_1) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_1}$$

Les vecteurs de la base $(\vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1, \vec{k}_1)$ étant liés au référentiel R_1 leurs dérivées temporelles respectives sont nulles : $\left.\frac{d\vec{\imath}_1}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\vec{\jmath}_1}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right|_{R_1} = \vec{0}$. Il suffit alors de dériver les composantes :

$$\vec{V}(M/R_1) = \dot{x}_1\vec{\imath}_1 + \dot{y}_1\vec{\jmath}_1 + \dot{z}_1\vec{k}_1.$$

L'accélération absolue est obtenue en dérivant la vitesse absolue par rapport au temps dans le référentiel absolu :

$$\vec{\gamma}(M/R_1) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R_1)}{dt}\right|_{R_1}$$

Là aussi, il suffit de dériver les composantes du vecteur vitesse absolue :

$$\vec{\gamma}(M/R_1) = \ddot{x}_1\vec{\imath}_1 + \ddot{y}_1\vec{\jmath}_1 + \ddot{z}_1\vec{k}_1.$$

III.1.2) Mouvement relatif de M

Le mouvement de M par rapport au référentiel relatif est appelé mouvement relatif. La position du point M est repéré par la donnée des coordonnées cartésiennes dans le référentiel R_2 *(voir figure III.1)*

$$\overrightarrow{O_2M} = x_2\vec{\imath}_2 + y_2\vec{\jmath}_2 + z_2\vec{k}_2$$

La vitesse relative de M est la vitesse du point matériel par rapport au référentiel relatif, elle est obtenue en dérivant par rapport au temps le vecteur position dans le référentiel R_2 :

$$\vec{V}(M/R_2) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_2}$$

Dans ce cas les vecteurs de la base $(\vec{\imath}_2, \vec{\jmath}_2, \vec{k}_2)$ étant liés au référentiel R_2 leurs dérivées temporelles respectives sont nulles : $\left.\frac{d\vec{\imath}_2}{dt}\right|_{R_2} = \left.\frac{d\vec{\jmath}_2}{dt}\right|_{R_2} = \left.\frac{d\vec{k}_2}{dt}\right|_{R_2} = \vec{0}$. Donc là aussi, il suffit de dériver les composantes :

$$\vec{V}(M/R_2) = \dot{x}_2\vec{\imath}_2 + \dot{y}_2\vec{\jmath}_2 + \dot{z}_2\vec{k}_2.$$

L'accélération relative est obtenue en dérivant la vitesse relative par rapport au temps dans le référentiel relatif :

$$\vec{\gamma}(M/R_2) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R_2)}{dt}\right|_{R_2}$$

Elle a comme expression dans la base relative :

$$\vec{\gamma}(M/R_2) = \ddot{x}_2\vec{\imath}_2 + \ddot{y}_2\vec{\jmath}_2 + \ddot{z}_2\vec{k}_2.$$

III.1.3) Cas particulier : R_2 en translation rectiligne par rapport à R_1

Dans ce cas, les vecteurs de la base relative $(\vec{\imath}_2, \vec{\jmath}_2, \vec{k}_2)$ sont aussi fixe par rapport au référentiel R_1 :

$$\left.\frac{d\vec{\imath}_2}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\vec{\jmath}_2}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\vec{k}_2}{dt}\right|_{R_1} = \vec{0}$$

III.1.4) Cas particulier : R_2 en rotation par rapport à R_1

Si le référentiel R_2 est en rotation par rapport au référentiel R_1 avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}(R_2/R_1)$. Les vecteurs de la base relative sont alors aussi en rotation avec la même vitesse angulaire $\vec{\omega}(R_2/R_1) = \vec{\omega}$. En utilisant le résultat exprimé dans la remarque à la fin du paragraphe II.8.1 on obtient les dérivées temporelles respectives des vecteurs de base :

$$\left.\frac{d\vec{\imath}_2}{dt}\right|_{R_1} = \vec{\omega} \wedge \vec{\imath}_2 \ , \qquad \left.\frac{d\vec{\jmath}_2}{dt}\right|_{R_1} = \vec{\omega} \wedge \vec{\jmath}_2 \ , \qquad \left.\frac{d\vec{k}_2}{dt}\right|_{R_1} = \vec{\omega} \wedge \vec{k}_2$$

III.1.5) Cas général : R_1 en mouvement quelconque par rapport à R_2

Tout mouvement d'un référentiel par rapport à l'autre peut être ramené à la composition d'un mouvement de translation rectiligne et d'un mouvement de rotation, d'où l'importance de ces deux types de mouvement.

III.2) – Dérivation en repère mobile

Dans toute la suite (sauf si autrement précisé), on va considérer les deux référentiels R_1 *et* R_2 liés respectivement au repères (O_1; X_1,Y_1,Z_1) et (O_2; X_2,Y_2,Z_2) et caractérisés, respectivement, par les bases orthonormées $(\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k}_1)$ et $(\vec{\imath}_2,\vec{\jmath}_2,\vec{k}_2)$. On considère que R_2 est en mouvement (quelconque) par rapport à R_1 et que ce mouvement est caractérisé par la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \vec{\omega}(R_2/R_1)$.

Soit un vecteur $\vec{A}$ défini par son expression dans le repère relatif R_2 :

$$\vec{A} = x_2\vec{\imath}_2 + y_2\vec{\jmath}_2 + z_2\vec{k}_2$$

Pour dériver le vecteur $\vec{A}$ par rapport au référentiel R_1 il faut dériver les composantes et les vecteurs de la base $(\vec{\imath}_2,\vec{\jmath}_2,\vec{k}_2)$ mobile par rapport à R_1 :

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R_1} = \dot{x}_2\vec{\imath}_2 + x_2\frac{d\vec{\imath}_2}{dt} + \dot{y}_2\vec{\jmath}_2 + y_2\frac{d\vec{\jmath}_2}{dt} + \dot{z}_2\vec{k}_2 + z_2\frac{d\vec{k}_2}{dt}.$$

On a vu que la dérivée d'un vecteur unitaire $\vec{u}$ en rotation avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$ par rapport à un repère fixe est donnée par $\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\vec{u}$. En remplaçant $\vec{u}$ par les vecteurs de la base $(\vec{\imath}_2,\vec{\jmath}_2,\vec{k}_2)$ on obtient alors :

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R_1} = \dot{x}_2\vec{\imath}_2 + \dot{y}_2\vec{\jmath}_2 + \dot{z}_2\vec{k}_2 + x_2(\vec{\omega}\wedge\vec{\imath}_2) + y_2(\vec{\omega}\wedge\vec{\jmath}_2) + z_2(\vec{\omega}\wedge\vec{k}_2).$$

Or $\dot{x}_2\vec{\imath}_2 + \dot{y}_2\vec{\jmath}_2 + \dot{z}_2\vec{k}_2 = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R_2}$ est la dérivée du vecteur $\vec{A}$ dans le référentiel relatif et

$$x_2(\vec{\omega}\wedge\vec{\imath}_2) + y_2(\vec{\omega}\wedge\vec{\jmath}_2) + z_2(\vec{\omega}\wedge\vec{k}_2) = \vec{\omega}\wedge(x_2\vec{\imath}_2 + y_2\vec{\jmath}_2 + z_2\vec{k}_2) = \vec{\omega}\wedge\vec{A}$$

Ce qui permet d'écrire la dérivée du vecteur $\vec{A}$ dans le référentiel R_1 connaissant son expression dans le référentiel R_2.

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\omega}(R_2/R_1)\wedge\vec{A}}$$

III.3) – Composition des vitesses

La loi de composition des vitesses s'écrit :

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r + \vec{V}_e$$

où

$\vec{V}_a = \vec{V}(M/R_1) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_1}$: est la vitesse absolue du point matériel,

$\vec{V}_r = \vec{V}(M/R_2) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_2}$: est la vitesse relative du point matériel,

$\vec{V}_e = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\omega}(R_2/R_1)\wedge\overrightarrow{O_2M}$: est la vitesse d'entrainement.

Preuve :

On commence par décomposer le vecteur position absolu en fonction du vecteur position relatif :

$$\overrightarrow{O_1M} = \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_2M}$$

La vitesse absolue est obtenue en dérivant dans le référentiel absolu R_1 :

$$\vec{V}_a = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right|_{R_1} + \left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_1}$$

En utilisant les résultats obtenus dans le paragraphe précédent concernant la dérivation en repère mobile, on exprime le dernier terme en haut (on remplace $\vec{A}$ par $\overrightarrow{O_2M}$)

$$\left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\omega}(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{O_2M}$$

Ce qui donne pour l'expression de la vitesse absolue :

$$\vec{V}_a = \left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_2} + \left.\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\omega}(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{O_2M}$$

qui est le résultat cherché. Le premier terme est la vitesse relative et les deux derniers termes donnent la vitesse d'entrainement.

III.4) – Composition des accélérations

La loi de décomposition des accélérations s'écrit de la façon suivante

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_c$$

où :

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}(M/R_1) = \left.\frac{d\vec{V}_a}{dt}\right|_{R_1}$$

est l'accélération absolue du point matériel,

$$\vec{\gamma}_r = \vec{\gamma}(M/R_2) = \left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right|_{R_2} = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_2M}}{dt^2}\right|_{R_2}$$

est l'accélération relative du point matériel,

$$\vec{\gamma}_e = \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right|_{R_1} + \frac{d\vec{\omega}(R_2/R_1)}{dt} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\omega}(R_2/R_1) \wedge \left(\vec{\omega}(R_2/R_1) \wedge \overrightarrow{O_2M}\right)$$

est l'accélération d'entrainement, et

$$\vec{\gamma}_c = 2\,\vec{\omega}(R_2/R_1) \wedge \vec{V}_r$$

est l'accélération complémentaire, aussi appelée accélération de Coriolis.

Preuve :

$$\vec{\gamma}_a = \left.\frac{d\vec{V}_a}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d}{dt}\left(\vec{V}_r + \left.\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_2M}\right)\right|_{R_1}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_a = \left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right|_{R_1} + \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right|_{R_1} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\omega} \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_1}$$

On développe le premier et le dernier terme.

$$\left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right|_{R_1} = \left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$$

où on a utilisé la règle de dérivation d'un vecteur dans un repère mobile. Pour le dernier terme on obtient

$$\vec{\omega} \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_1} = \vec{\omega} \wedge \left(\left.\frac{d\overrightarrow{O_2M}}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_2M}\right)$$
$$= \vec{\omega} \wedge \vec{V}_r + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_2M}\right)$$

En rapportant dans l'expression initiale, on obtient l'expression complète de l'accélération absolue :

$$\vec{\gamma}_a = \left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right|_{R_2} + \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right|_{R_1} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_2M} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_2M}\right) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r$$

Le premier terme à droite est l'accélération relative, le dernier est l'accélération de Coriolis et les termes restants composent l'accélération d'entrainement.

III.5) – Exemples de mouvements particuliers

On considère deux cas particuliers de mouvement du référentiel relatif par rapport au référentiel absolu.

III.5.1) Mouvement rectiligne :

Si le référentiel R_2 est en translation rectiligne par rapport au référentiel absolu R_1, la vitesse de rotation angulaire est nulle

$$\vec{\omega}(R_2/R_1) = \vec{0}$$

La formule de décomposition des vitesses devient alors :

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r(M) + \left.\frac{d\overrightarrow{O_1O_2}}{dt}\right|_{R_1}$$

Le second terme n'étant rien d'autre que la vitesse absolue du point O_2 :

$$\vec{V}_a = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_a(O_2)$$

De même, l'accélération absolue s'écrit

$$\vec{\gamma}_a = \left.\frac{d\vec{V}_r}{dt}\right|_{R_2} + \left.\frac{d^2\overrightarrow{O_1O_2}}{dt^2}\right|_{R_1}$$

Le premier terme étant l'accélération relative du point M et le second l'accélération absolue du point O_2 :

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_a(O_2)$$

Si en plus le mouvement relatif est rectiligne uniforme on aura la vitesse du référentiel relatif par rapport au référentiel absolu qui est constante *c.à.d.* $\vec{V}_a(O_2) = \overrightarrow{Constant}$ et $\vec{\gamma}_a(O_2) = \vec{0}$. L'accélération relative est alors égale à l'accélération absolue :

$$\vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_r(M)$$

III.5.2) Mouvement de Rotation uniforme :

On suppose que le référentiel R_2 est en rotation uniforme par rapport au référentiel absolu R_1, et que la rotation s'effectue autour d'un axe passant par l'origine commun aux deux référentiels $O=O_1=O_2$. Dans ce cas $\vec{\omega}(R_2/R_1) = \vec{\omega} = \overrightarrow{constant}$; *c.à.d.* $\frac{d\vec{\omega}(R_2/R_1)}{dt} = \vec{0}$.
Les expressions de la vitesse d'entrainement et de l'accélération d'entrainement deviennent particulièrement simples :

$$\vec{V}_e(M) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$
$$\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$$