Chapitre 4 : Etude Energétique

I – Travail et Puissance d'une force

I.1)- Puissance d'une force

Soit un point matériel M de vitesse $\vec{V}(M/R)$, par rapport à un référentiel R, soumis à une force $\vec{F}$. La puissance de $\vec{F}$ dans le référentiel R est définie par:

$$P(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{V}(M/R).$$

La puissance dépend du référentiel et son unité est le Watts (W).

- Si la puissance est positive, $P(\vec{F}) > 0$, la force est dite *motrice*.
- Si la puissance est négative, $P(\vec{F}) < 0$, la force est dite *résistante*.
- Si la puissance est nulle, $P(\vec{F}) = 0$, Il s'agit d'une force qui ne travail pas. C'est le cas d'une force perpendiculaire au mouvement du point matériel ou d'un point matériel immobile.

I.2) – Travail d'une force

1.2.1) Travail élémentaire d'une force :

Lorsqu'on veut déplacer un objet, l'effort fourni est d'autant plus grand que la distance parcourue est grande et que la force à appliquer est grande. Cet effort peut dépendre aussi de la trajectoire suivie pour déplacer l'objet. Le travail, est une notion physique qui va rendre compte de cet effort.

Le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ appliqué au point matériel M lors de son déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ est donné par

$$\delta W = \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = P(\vec{F})dt.$$

1.2.2) Travail d'une force :

Soit un point matériel M, décrivant une trajectoire *(C)* par rapport à un référentiel R. On suppose que le point matériel passe par le point M_1 à l'instant t_1 et par le point M_2 à l'instant t_2. Le travail de la force $\vec{F}$ lors de ce déplacement est:

$$W_{M_1 \to M_2}(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = \int_{t_1}^{t_2} P(\vec{F})dt.$$

L'unité du travail est le Joule [Joule=N.m]

- La force est dite motrice si son travail est positif $W > 0$.
- La force est résistante si son travail est négatif $W < 0$.
- La force ne travail pas si son travail est nul $W = 0$.

II- Forces conservatives – Energie potentielle

II.1) – Définition

Une force est dite conservative si son travail entre deux point M_1 et M_2 dépend uniquement de la position de départ et de la position d'arrivée. Autrement dit, le travail est indépendant du chemin suivi pour aller de M_1 vers M_2.

Définition équivalente :

Une force $\vec{F}$ est dite conservative si elle dérive d'un potentiel; c.à.d. qu'il existe une fonction scalaire E_p tel que

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p.$$

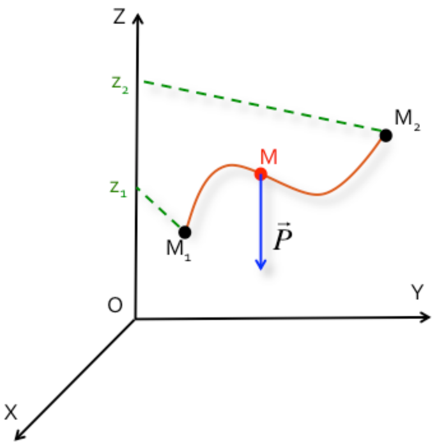
E_p est alors appelé l'énergie potentielle du point M.

Remarques :

- ♠ L'énergie potentielle n'est définie qu'à une constante près ; *c.à.d.* que E_p et $E'_p = E_p + C$ (où C est une constante), donnent lieu à la même force conservative :
$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E'_p = -\overrightarrow{\text{grad}}\left(E_p + C\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p.$$
- ♠ Puisque $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\, f\right) = \vec{0}$, quelque soit la fonction *f*, pour vérifier qu'une force $\vec{F}$ est conservative, il suffit de vérifier que $\overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{F} = \vec{0}$.

II.2) Exemples :

II.2.1) La force de Pesanteur



Dans un référentiel Galiléen R(O;X,Y,Z), on considère le mouvement d'un point matériel M de masse *m* soumis à la pesanteur terrestre: $\vec{P} = -mg\vec{k}$.

Le travail du poids quand le point matériel se déplace de M_1 vers M_2 est

$$W_{M_1 \to M_2}(\vec{P}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{P}.\, d\overrightarrow{OM} = \int_{z_1}^{z_2} -mg dz$$

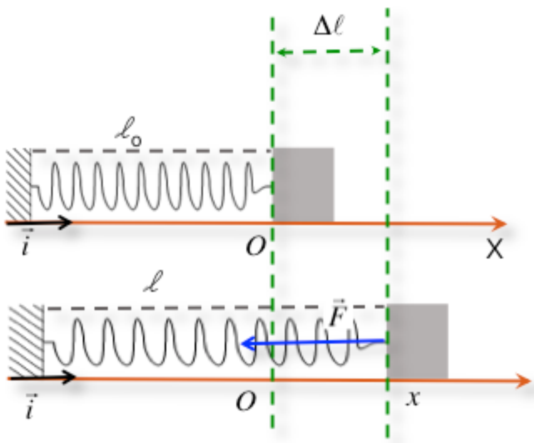
$$W_{M_1 \to M_2}(\vec{P}) = -mg(z_2 - z_1) = -mg\Delta h$$

L'énergie potentielle peut être calculer en utilisant la relation $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p$ et elle est donnée par

$$E_p = mgz + C$$

où C est une constante d'intégration.

II.2.2) La force de rappel d'un ressort



On considère le mouvement d'un point matériel attaché à un ressort de raideur *k*. En se basant sur le schéma à coté, la force de rappel du ressort est donnée par

$$\vec{F} = -k\Delta\ell\,\vec{\imath} = -kx\vec{\imath}$$

Le travail de cette force quand le point matériel se déplace de M_1 vers M_2 est

$$W_{M_1 \to M_2}(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.\, d\overrightarrow{OM} = \int_{x_1}^{x_2} -kxdx$$

$$W_{M_1 \to M_2}(\vec{F}) = -\left(\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2\right).$$

L'énergie potentielle dont dérive la force de rappel est donnée par :

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 + C$$

II.3) Travail d'une force conservative

On remarque d'après les exemples précédents que le travail fourni par la force quand le point matériel se déplace de M_1 vers M_2 est égal à l'opposé de la variation de l'énergie potentielle entre ces deux positions :

$$W_{M_1\to M_2}(\vec{F}) = -\Delta E_p = -\left(E_p(M_2) - E_p(M_1)\right)$$

Travail élémentaire:

C'est un résultat général puisqu'on a

$$dE_p = \overrightarrow{\text{grad}}\, E_p . d\overrightarrow{OM}$$

et pour le travail élémentaire

$$\delta W = \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, E_p . d\overrightarrow{OM}.$$

On obtient donc que :

$$\delta W = -dE_p.$$

Le travail élémentaire peut être exprimé en fonction de la puissance de la façon suivante $\delta W = P(\vec{F})dt$, ce qui permet de trouver la relation suivante entre l'énergie potentielle et la puissance d'une force :

$$P(\vec{F}) = -\frac{dE_p}{dt}$$

III – Energie cinétique

III.1) Définition

L'énergie cinétique d'un point matériel M de masse m animé d'une vitesse $\vec{V}(M/R)$ par rapport à un référentiel Galiléen, R, est définie par

$$E_c = \frac{1}{2}m\vec{V}^2(M/R)$$

ou encore, en fonction de la quantité de mouvement

$$E_c = \frac{1}{2m}\vec{p}^2(M/R).$$

III.2) Théorème de la puissance:

Enoncé :

La puissance de la résultante, $\vec{F}_{\text{ext}}$, de toutes les forces extérieures appliquées à un point matériel dans un référentiel Galiléen est égale à la dérivée de son énergie cinétique:

$$P(\vec{F}_{\text{ext}}) = \frac{dE_c}{dt}$$

Preuve :

La puissance de la résultante des forces extérieures peut être exprimée de la façon suivante

$$P(\vec{F}_{\text{ext}}) = \vec{F}_{\text{ext}}.\vec{V}(M/R) = m\vec{\gamma}(M/R).\vec{V}(M/R) = m\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}.\vec{V}(M/R)$$

où on a utilisé le PFD dans un référentiel Galiléen.

D'autre part nous avons la relation suivante

$$\frac{dV^2}{dt} = \frac{d\vec{V}^2(M/R)}{dt} = \frac{d(\vec{V}.\vec{V})}{dt} = 2\frac{d\vec{V}}{dt}.\vec{V}$$

En remplaçant dans la première relation on trouve

$$P(\vec{F}_{\text{ext}}) = \frac{1}{2}m\frac{dV^2}{dt} = \frac{dE_c}{dt}.$$

III.3) Théorème de l'énergie cinétique

Enoncé :
Dans un référentiel Galiléen, la variation de l'énergie cinétique, entre deux position M_1 et M_2 d'un point matériel soumis à un ensemble de forces extérieurs (dont la résultante est noté $\vec{F}_{\text{ext}}$) est égal au travail de cet résultante entre ces deux points :

$$W_{M_1\to M_2}(\vec{F}_{\text{ext}}) = \Delta E_c = E_c(M_2) - E_c(M_1)$$

Preuve :
Pour le travail élémentaire on a la relation suivante

$$\delta W(\vec{F}_{\text{ext}}) = P(\vec{F}_{\text{ext}})dt = dE_c$$

qui est l'expression locale du théorème de l'énergie cinétique :

$$W_{M_1\to M_2}(\vec{F}_{\text{ext}}) = \Delta E_c$$

IV – Energie mécanique

IV.1) Définition

Dans un référentiel Galiléen, l'énergie mécanique (énergie totale) d'un point matériel est égale à la somme de son énergie cinétique et de son énergie potentielle:

$$E_m = E_c + E_p$$

IV.2) Théorème de l'énergie mécanique

Enoncé :
La variation de l'énergie mécanique d'un point matériel entre deux positions M_1 et M_2 est égale au travail des **forces non conservatives** agissant sur le point matériel:

$$\Delta E_m = E_m(M_2) - E_m(M_1) = W_{M_1\to M_2}(\vec{f}_{NC})$$

Preuve :
Le travail de la résultante des forces extérieures agissant sur un point matériel M est égale à la variation de l'énergie cinétique. D'autre part le travail de cette résultante est égal à la somme des travaux des forces conservatives et des forces non conservatives :

$$W_{M_1\to M_2}(\vec{F}_{\text{ext}}) = \Delta E_c = \Delta E_m - \Delta E_p \quad et \quad W_{M_1\to M_2}(\vec{F}_{\text{ext}}) = W_{M_1\to M_2}(\vec{f}_C) + W_{M_1\to M_2}(\vec{f}_{NC})$$

où

$\vec{F}_{\text{ext}}$: dénote la résultante de toutes les forces agissant sur M.
$\vec{f}_C$: dénote la résultante de toutes les forces conservatives agissant sur M.
$\vec{f}_{NC}$: dénote la résultante de toutes les forces non-conservatives agissant sur M.
On a donc l'égalité suivante :

$$\Delta E_m - \Delta E_p = W_{M_1\to M_2}(\vec{f}_C) + W_{M_1\to M_2}(\vec{f}_{NC})$$

Or $W_{M_1\to M_2}(\vec{f}_C) = -\Delta E_p$, ce qui donne le résultat

$$\Delta E_m = W_{M_1\to M_2}(\vec{f}_{NC})$$

IV.3) Conservation de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique d'un système conservatif est conservée au cours du temps:

$$E_m = E_c + E_p = E_0 = \text{constante}$$

ou encore $\frac{dE_m}{dt} = 0$

V- Equilibre et stabilité d'un système conservatif

V.1) Positions d'équilibre:

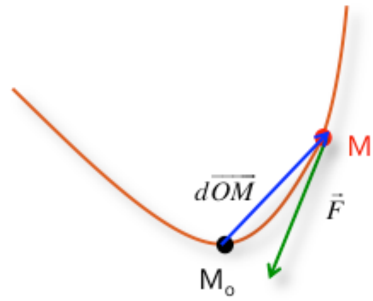
Dans un référentiel Galiléen, On considère un point matériel soumis à des **forces conservatives** dont la résultante est $\vec{F}$. La position d'équilibre du point matériel correspond à un **extremum** de l'énergie potentielle. Donc, si M_0 est une position d'équilibre les dérivées premières de l'énergie potentielle doivent être nulles en ce point :

$$\left.\frac{\partial E_p}{\partial x}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial E_p}{\partial y}\right|_{M_0} = \left.\frac{\partial E_p}{\partial z}\right|_{M_0}$$

V.2) Stabilité de l'équilibre:

La position d'équilibre est dite stable si le point matériel y retourne spontanément suite à une perturbation l'éloignant de cette position. Dans le cas contraire l'équilibre est instable.

V.2.1) Equilibre stable – Ep minimale:



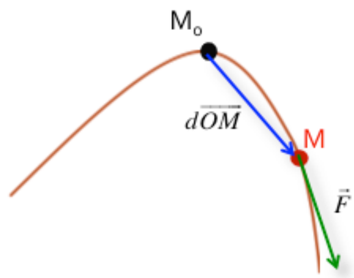
Soit un point matériel M ayant la position d'équilibre M_0.
M_0 est une position d'équilibre stable si l'énergie potentielle est minimale en ce point. Dans le cas d'un mouvement à une dimension ($E_p(x)$), la dérivée seconde de l'énergie potentielle par rapport à la variable x est positive dans une position d'équilibre stable :

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{M_0} > 0$$

c.à.d. que le point M_0 est un minimum de la fonction $E_p(x)$.
Le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ quand le point matériel est éloigné de sa position d'équilibre est négatif :

$$\delta W = \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = -dE_p < 0$$

V.2.2) Equilibre instable–Ep maximale:



M_0 est une position d'équilibre instable si l'énergie potentielle est maximale en ce point. Dans le cas d'un mouvement à une dimension ($E_p(x)$), la dérivée seconde de l'énergie potentielle par rapport à la variable x est négative dans une position d'équilibre instable :

$$\left.\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}\right|_{M_0} < 0$$

c.à.d. que le point M_0 est un maximum de la fonction $E_p(x)$.
Le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ quand le point matériel est éloigné de sa position d'équilibre est positif :

$$\delta W = \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = -dE_p > 0$$