Université Mohammed V-Agdal
Faculté des sciences
RABAT

Année universitaire 2007-2008

Outils Mathématiques pour Biologistes et Géologues

I. Grandeurs physiques et leurs unités

I-1 Grandeurs mesurables

Mesurer une grandeur physique, c'est déterminer le rapport entre cette grandeur et une autre grandeur de même nature choisie comme unité. Le résultat de la mesure s'exprime à l'aide d'un nombre réel suivi d'une unité.

Exemple : la distance qui sépare deux points donnés est d = 3,12 m.

I-2 Grandeurs repérables

Les températures et les dates ne sont pas mesurables, mais repérables, par un thermomètre pour la température, et par un chronomètre pour les dates.

I-3 Grandeurs fondamentales et dérivées

Sept grandeurs fondamentales jouent un rôle majeur en physique. Les autres grandeurs sont des grandeurs dérivées. La vitesse par exemple est une longueur par un temps, son unité est donc $m\ s^{-1}$.

Les grandeurs fondamentales et leurs définitions sont données dans le tableau I. les grandeurs dérivées sont données dans le tableau II.

Tableau I : les sept unités de base du SI

Grandeur	Unité	Symbole	Définition
Longueur	mètre	m	Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de :1/299792458 de seconde.
Masse	kilogramme	kg	Le kilogramme est égal à la masse du prototype international du kilogramme.
Temps	seconde	s	La seconde est la durée de 9192631770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les 2 niveaux hyperfins de l'atome Cs-133.
Courant électrique	ampère	A	L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, maintenu dans 2 conducteurs parallèles rectilignes de longueur infinie, de section circulaire négligeable et placés à une distance de 1 mètre l'un de l'autre dans le vide, produirait entre ces conducteurs une force égale à $2\ 10^{-7}$ N.
Température thermodynamique	kelvin	K	Le kelvin est la fraction 1/273,16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau.

Quantité de matière	mole	mol	La mole est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y d'atomes dans 0,012 kg de C-12.
Intensité lumineuse	candela	cd	La candela est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence 540.10^{12} Hz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est 1.683 Watt par seconde.

Tableau II : Exemples d'unités SI dérivées ayant des noms spéciaux et symboles particuliers.

Grandeur	Nom	Symbole	Expression en d'autres unités	Expression en unité de base du SI
Fréquence	hertz	Hz		s^{-1}
Force	newton	N		$m.kg.s^{-2}$
Pression, contrainte	pascal	Pa	N/m^2	$m^{-1}.kg.s^{-2}$
Energie, travail	joule	J	N.m	$m^2.kg.s^{-2}$
Puissance, flux énergétique	watt	W	J/s	$m^2.kg.s^{-3}$
Viscosité dynamique	poiseuille	Pl	Pa · s	$m^{-1}.kg.s^{-1}$
Potentiel électrique, tension électrique	volt	V	W/A	$m^{-2}.kg.s^{-3}.A^{-1}$
Capacité électrique	farad	F	C/V	$m^{-2}.kg^{-1}.s^4.A^2$
Résistance électrique	ohm	Ω	V/A	$m^2.kg.s^{-3}.A^{-2}$

Les physiciens ont l'habitude d'utiliser aussi des unités qui ne font pas partie du SI d'unités :

Tableau III : grandeurs physiques et unités ne faisant pas partie de SI.

Grandeur	Nom	Symbole	valeur
Longueur	Angström Femtomètre ou Fermi	Å fm	10^{-10} m 10^{-15} m
Angle	Degré Minute Seconde	° ' "	$\frac{\pi}{180}$ (rd) $\frac{\text{degré}}{60}$ (mn) $\frac{\text{minute}}{60}$ (s)
Force	Dyne	dyn	10^{-5} N
Travail	Erg	erg	10^{-7} J
Energie	Watt-heure Electron-volt Calorie	Wh eV cal	3600 J $1,6.10^{-19}$ J 4,185 J
Pression	Bar	bar	10^5 Pa
Viscosité dynamique	Poise	Po	0,1 Pa s
Viscosité cinématique	Stokes	St	10^{-4} m^2 s^{-1}

Quantité d'électricité	Ampère-heure	Ah	3600 C
Température	Degré Celsius	°C	t = T-273,15
Induction magnétique	Gauss	G	1G = 10^{-4} T
Flux d'induction magnétique	Maxwell	Mx	1 Mx = 10^{-8} Wb
Masse	Unité de masse atomique	u (uma)	1 u = $1{,}6610^{-27}$ kg

I-3 Multiples et sous-multiples décimaux des unités du SI

Une série de préfixes et de symboles de préfixes ont été adoptés pour former les noms et les symboles des multiples et sous-multiples décimaux des unités SI de 10^{-12} à 10^{12}.

Tableau IV : Préfixes d'unités du SI

Sous-multiples			*multiples*		
Puissance	*Nom*	*Symbole*	*Puissance*	*Nom*	*Symbole*
10^{-1}	Déci	d	10^{1}	Déca	d
10^{-2}	Centi	c	10^{2}	Hecto	h
10^{-3}	Milli	m	10^{3}	Kilo	k
10^{-6}	Micro	µ	10^{6}	Méga	M
10^{-9}	Nano	n	10^{9}	Giga	G
10^{-10}	Angstroem	Å			
10^{-12}	Pico	p	10^{12}	Tera	T

Remarques :

- Une grandeur dont la mesure s'exprime sans unité n'a pas de dimension.
- Deux grandeurs qui s'expriment à l'aide de la même unité sont de même dimension.
- On ne peut pas additionner des grandeurs de dimensions différentes.
- L'angle qui est un rapport de 2 longueurs est sans dimension même s'il est une grandeur qui a une unité. Pour les angles plans l'unité est le radian (rd), et pour les angles solides l'unité est le stéradian (sr).

I-4 Equations aux dimensions

Les grandeurs qui ont des unités sont des grandeurs dimensionnées. En mécanique on utilise 3 dimensions : la longueur [L], la masse [M] et le temps [T]. La vitesse qui est une grandeur dérivée a pour dimension $[v] = LT^{-1}$. Cette équation est l'équation aux dimensions de la vitesse. Son intérêt est de vérifier l'homogénéité d'une formule.

Exemple : vous ne vous rappelez plus laquelle des 2 formules suivantes donne la période d'un pendule de longueur l :

i) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{g}{l}}$ ou ii) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$

Où g est l'accélération gravitationnelle, $[g] = [LT^{-2}]$, 2π n'a pas de dimension.

i) $[T] \neq \sqrt{\dfrac{[LT^{-2}]}{[L]}} = \dfrac{1}{[T]}$ faux

ii) $[T] = \sqrt{\dfrac{[L]}{[LT^{-2}]}} = [T]$ correcte

I-5 Systèmes d'unités CGS, MKSA et SI

Le problème que posent les unités est celui de l'universalité et de la cohérence, d'où l'intérêt du choix d'un système international qui définit les unités étalonnées de façon identique en tout point du globe.

a) Le système CGS est fondé sur le Centimètre, le Gramme et la Seconde.

b) Le système MKSA est basé sur le Mètre, le Kilogramme, la Seconde et l'Ampère. C'est le système précurseur du système international d'unités (SI).

c) Les unités légales du système international (SI) : Le SI est fondé sur le MKSA à qui on a ajouté le kelvin (K), la mole (mol), la candela (cd), le radian (rd) et le stéradian (sr).

II. Erreurs et incertitudes

II-1 Erreur

Une erreur est toujours en relation avec quelque chose de juste ou considéré comme tel. Il y a deux sortes d'erreurs :

L'erreur accidentelle, qu'on élimine simplement en multipliant les opérations (faire 10 pesées au lieu de n'en faire qu'une).

L'erreur systématique est commise sans cesse et se renouvelle (erreur de zéro d'un appareil de mesure). Pour l'éliminer on doit refaire la mesure avec un autre appareil de mesure.

a) Erreur absolue

La valeur de la célérité de la lumière qui est considérée actuellement comme vraie est $c_0 = 299\,792$ km s^{-1}. Si un expérimentateur trouve lors d'une mesure $c = 305000$ kms^{-1}, il commet alors une erreur absolue $\Delta c = |c - c_0| = 5208 \text{kms}^{-1}$.

b) Erreur relative :

Dans le cas de la mesure précédente, on définit l'erreur relative par : $\frac{\Delta c}{c_0} = \frac{5208}{299792} \approx 0.017$. C'est une valeur sans unité, elle indique l'exactitude du résultat obtenu et elle est exprimée en pourcentage : $\frac{\Delta c}{c} = 1{,}7\%$

Remarque : on ne parle d'erreur que si l'on a à disposition une valeur de référence considérée comme vraie.

II-2 Incertitudes :

En physique, lors de la plupart des mesures, on ne possède pas de valeur de référence, on ne dispose que des valeurs expérimentales. Nous pouvons quand même estimer l'erreur commise qui dépend des instruments de mesure utilisés.

a) Incertitude absolue : Si on désigne par x la valeur la plus probable d'une grandeur G, par x_0 la vraie valeur et par Δx l'incertitude absolue, on a : $x - \Delta x < x_0 < x + \Delta x$ que nous pouvons écrire sous la forme : $G = x \pm \Delta x$.

b) Incertitude relative : est donnée par $\frac{\Delta x}{x}$ qui est sans unité et exprimée en pourcentage.

L'incertitude relative nous renseigne sur la qualité de la mesure.

II-3 Calcul d'incertitude

Si $G = A + B$ et $G' = A - B$ alors $\Delta G = \Delta G' = \Delta A + \Delta B$.

L'incertitude absolue sur une somme ou sur une différence est la somme des incertitudes absolues de chaque terme.

Si $G=\frac{AB}{C}$ alors $\frac{\Delta G}{G}=\frac{\Delta A}{A}+\frac{\Delta B}{B}+\frac{\Delta C}{C}$

L'incertitude relative sur un produit ou un quotient est la somme des incertitudes relatives de chaque terme.

Nous pouvons aussi utiliser la méthode des logarithmes :

Exemples :

1) $$G=\frac{A^n B^m}{C}$$

On prend le logarithme de G : $\ln G=\ln\left(A^n\right)+\ln\left(B^m\right)-\ln C$

$$\ln G = n\ln A + m\ln B - \ln C$$

En passant aux différentiels :

$$\frac{dG}{G}=n\frac{dA}{A}+m\frac{dB}{B}-\frac{dC}{C}$$

Et enfin l'incertitude relative est donnée par :

$$\frac{\Delta G}{G}=|n|\frac{\Delta A}{A}+|m|\frac{\Delta B}{B}+\frac{\Delta C}{C}$$

2) $$G'=\frac{L^2}{T^2}\cos\theta$$

$$\ln G' = 2\ln L - 2\ln T + \ln\left(\cos\theta\right)$$

$$\frac{dG'}{G'}=2\frac{dL}{L}-2\frac{dT}{T}+\frac{d(\cos\theta)}{\cos\theta}$$

$$\frac{dG'}{G'}=2\frac{dL}{L}-2\frac{dT}{T}-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}d\theta$$

$$\frac{\Delta G'}{G'}=2\frac{\Delta L}{L}+2\frac{\Delta T}{T}+|\mathrm{tg}\theta|\Delta\theta$$

III. Les approximations

Faire une approximation, c'est remplacer une formule exacte, mais d'application compliquée par une formule plus simple, mais mathématiquement inexacte. On applique en générale la formule du binôme.

$(1+\varepsilon)^n \approx 1+n\varepsilon$ ε étant négligeable devant l'unité

Cas où n=1/2 : $\sqrt{1+\varepsilon}\approx 1+\frac{\varepsilon}{2}$

Cas où n = -1 : $\frac{1}{1+\varepsilon}\approx 1-\varepsilon$

Nous utilisons aussi en physique les équivalences des infiniment petits

$\sin(\varepsilon)\approx\varepsilon\approx\tan(\varepsilon)$ avec ε en radian

$$\cos(\varepsilon)\approx 1-\frac{\varepsilon^2}{2}$$

$$e^{\varepsilon}\approx 1+\varepsilon$$

$$\ln(1+\varepsilon)\approx\varepsilon$$

IV. Comment présenter un résultat

IV-1 Chiffres significatifs

Les chiffres significatifs (cs) d'un résultat de mesure sont un ensemble de chiffres dont on est certain en plus du dernier qui peut être douteux.

Exemple : d = 21,348 km le résultat comporte 5 cs dont un qui est douteux qui est le 8. C'est celui qui porte l'erreur.

<u>Règle des zéros dans le dénombrement des cs d'un résultat :</u>

Les zéros placés à gauche d'un nombre ne sont pas des cs.

Exemple : d = 0,008 km ce résultat ne contient qu'un cs qui est le 8. En effet ce résultat peut s'écrire d = 8 m

Par contre les zéros qui sont placés à droite d'un chiffre sont tous des cs.

Exemples : L = 1,030 m ce résultat comporte 4 cs.
S = 25 000 m^2 comporte 5 cs.
R = 0,280 cm comporte 3 cs.

Si on indique l'incertitude absolue d'un résultat, le nombre de chiffres doit être cohérent avec celui de la grandeur.

Exemple : A = 123,45 $\pm$ 0,08 Bq et non A = 123,45 $\pm$ 0,082 Bq.

Si une mesure de longueur par exemple est donnée au millimètre près, a = 1,375 $\pm$ 0,001 m, il ne faut pas indiquer le résultat avec un nombre de cs insuffisant, a = 1,3 $\pm$ 0,001 car la précision obtenue nécessite l'indication du chiffre des millimètres.

Si un résultat est obtenu avec son incertitude relative, il ne faudra alors conserver que le nombre de chiffres vraiment significatifs.

Exemple : ν = 834,571 Hz à 1,1% et $\Delta\nu$ = 9 Hz, **alors** ν = (835 $\pm$ 9) Hz.

V. Quelques rappels trigonométriques

a)

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha) \qquad \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) \qquad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin(\alpha) \qquad \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos(\alpha)$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha \qquad \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$$

b) Relation de transformation :

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\beta}{180} = \frac{\gamma}{200}$$ avec α en radian, β en degré et γ en grade.

c) Formules d'addition des arcs :

$$\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

Si a = b alors $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$

$$\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

Si a = b alors $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$$

Nous pouvons retrouver ces relations en utilisant les formules suivantes :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \qquad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$$

d) formule de transformation :

* Produit en somme :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

* Somme en produit :

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$$

$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$$

$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$$

$$\sin(p) - \sin(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$$

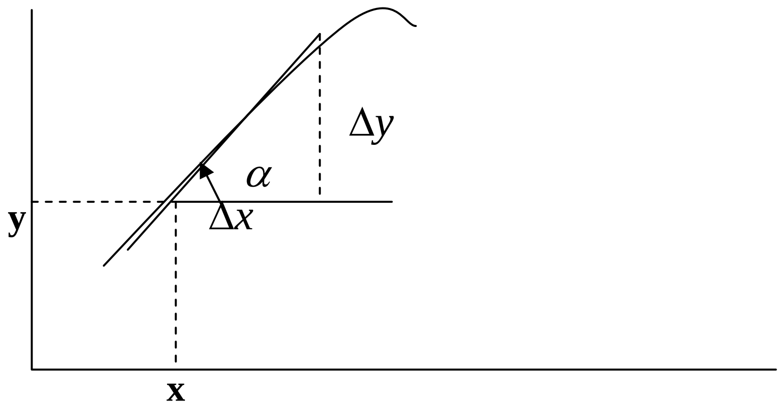
VI. Valeurs de quelques constantes physiques

Tableau V : Quelques constantes importantes en physique

Constante	**Symbole**	**Valeur**
Célérité de la lumière dans le vide	c_0	299 792 458m $s^{-1} \approx 3.10^{8} m.s^{-1}$
Nombre d'Avogadro	N	$6{,}022.10^{23}$ mol^{-1}
Constante gravitationnelle	G	$6{,}67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}
Charge électrique élémentaire	e	$1{,}602.10^{-19}$ C
Masse de l'électron	m_e	$9{,}1.10^{-31}$ kg
Masse du proton	m_p	$1{,}672621.10^{-27}$ kg
Masse du neutron	m_n	$1{,}674927.10^{-27}$ kg
Unité de masse atomique	u (ou uma)	$1{,}66.10^{-27}$kg
Permittivité diélectrique du vide	ε_0	$8{,}854.10^{-12}$ F m^{-1}
Permittivité magnétique du vide	μ_0	$1{,}257.10^{-6}$H m^{-1}
Constante de Planck	h	$6{,}625.10^{-34}$J s^{-1}
Constante de Boltzmann	k	$1{,}38.10^{-23}$J K^{-1}
Constante de Stefan	σ	$5{,}6687.10^{-2}$ W m^{-2} K^{-4}
Constante des gaz parfaits	R	8,314 J $mol^{-1}K^{-1}$

VII. Dérivée d'une fonction

La dérivée d'une fonction $y(x)$ est la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ lorsque Δx tend vers zéro. Elle est représentée par $\frac{dy}{dx}$.



Graphiquement $\frac{dy}{dx}$ est la pente de la tangente à la courbe au point y.

$$\frac{dy}{dx} = tg\alpha$$

Exemples de dérivées de quelques fonctions

Tableau VI : Dérivées de quelques fonctions

f(x)	x^n	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x^n}$	sinx	cosx
$\frac{df(x)}{dx}$	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	cosx	-sinx

f(x)	tan(x)	e^x	a^x	lnx	$\log_a x$
$\frac{df(x)}{dx}$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + tg^2 x$	e^x	$a^x \ln a$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\log_a e}{x}$

VIII. Dérivées de fonction à plusieurs variables

Soit une fonction f qui dépend de trois variables x, y et z

$$F = f(x, y, z)$$

La dérivée de F par rapport à x, en considérant y et z constants, est appelée dérivée partielle de F par rapport à x. Elle se note :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}$$

La dérivée de F par rapport à y, en considérant x et z constants, est appelée dérivée partielle de F par rapport à y. Elle se note :

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}$$

La dérivée de F par rapport à z, en considérant x et y constants, est appelée dérivée partielle de F par rapport à z. Elle se note :

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}$$

La dérivée totale de F est la somme des dérivées partielles de F par rapport à x, y et z. elle se note :

$$dF=\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}dy+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}dz$$

Exemple : Calculer la dérivée totale de :

$$F=f(x,y,z)=x^2yz+xy+yz^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}=2xyz+y$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}=x^2z+x+z^2$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}=x^2y+2yz$$

$$dF=\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}dy+\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}dz$$

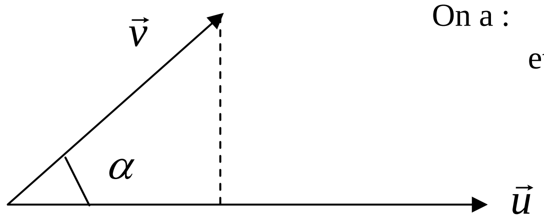
$$=(2xyz+y)dx+(x^2z+x+z^2)dy+(x^2y+2yz)dz$$

IX. Produit scalaire de deux vecteurs

On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le produit algébrique :

$\vec{u}.\vec{v}=u.v.\cos\alpha$, où u et v sont les longueurs des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\vec{u}.\vec{v}$ n'est pas un vecteur mais un scalaire.

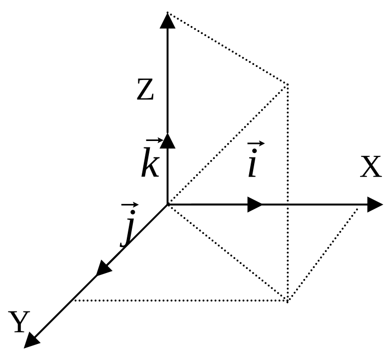


On a : $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$

et $\vec{u}.\vec{v}=0$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

$$\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$

$$\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$$



$$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$$

$$\vec{i}.\vec{i}=\vec{j}.\vec{j}=\vec{k}.\vec{k}=1$$

$$\vec{i}.\vec{j}=\vec{j}.\vec{k}=\vec{k}.\vec{i}=0$$

Comme exemple du produit scalaire, citons le travail d'un vecteur constant $\vec{f}$ effectuant un déplacement rectiligne $\vec{l}$: $\vec{f} \cdot \vec{l}$

X. Produit vectoriel de deux vecteurs

On appelle produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ un vecteur $\vec{w}$ perpendiculaire à ces deux vecteurs, tel que le trièdre $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ soit direct.

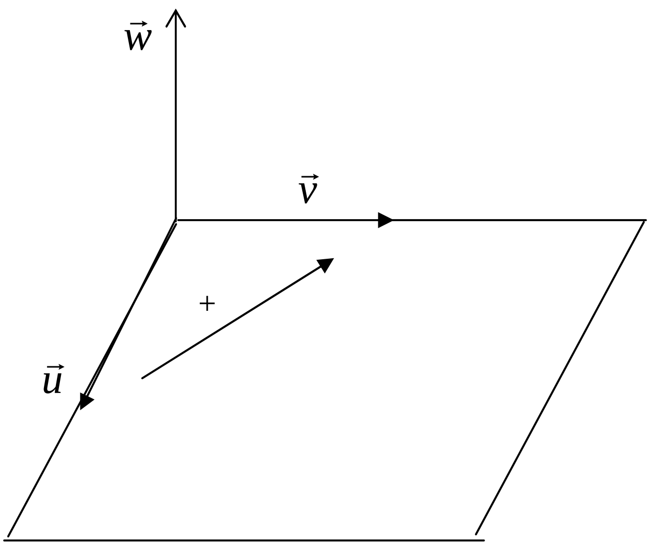
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$$

Le trièdre $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ est dit direct si le sens $\vec{u}$ vers $\vec{v}$ vers $\vec{w}$ se fait contrairement à celui des aiguilles d'une montre.

Le module de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est donné par :

$$\left|\vec{u} \wedge \vec{v}\right| = u.v.\sin\theta$$

θ est l'angle que fait $\vec{u}$ avec $\vec{v}$.



Si on considère les coordonnées de chaque vecteur :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$$

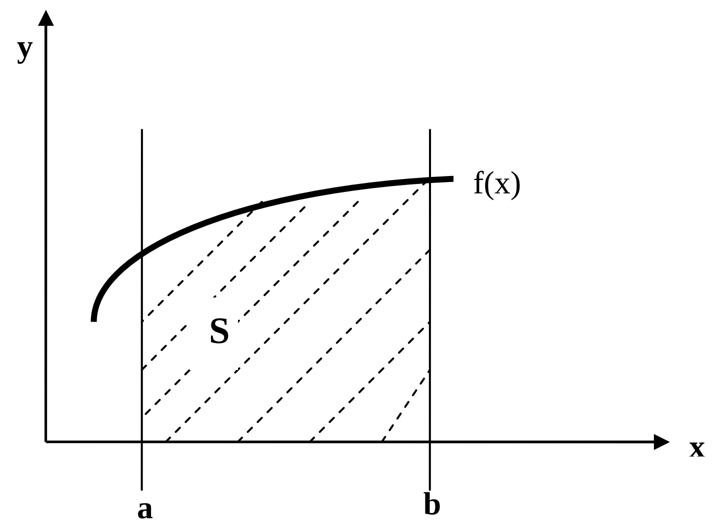
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - y'z)\vec{i} - (xz' - x'z)\vec{j} + (xy' - x'y)\vec{k}$$

Le moment d'un vecteur $\vec{AB}$ par rapport à un point O est un exemple du produit vectoriel :

$$\vec{\mathrm{M}} = \vec{OA} \wedge \vec{AB}$$

XI. Intégrales

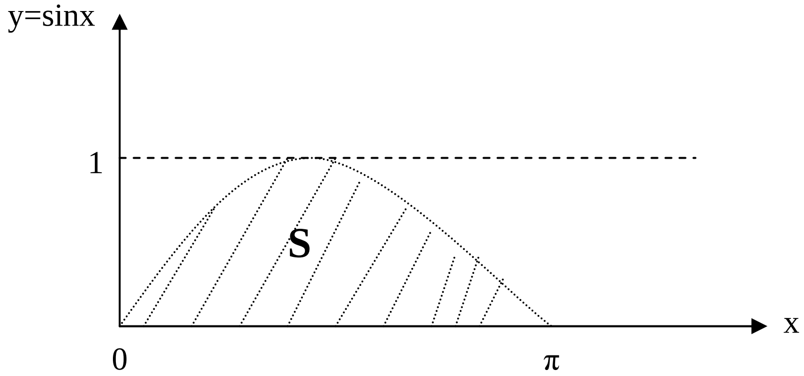
Le problème de physique fait généralement intervenir des courbes, des surfaces et des volumes. Le calcul intégral permet de déterminer ces éléments en faisant la somme des effets dus à ces éléments.
Soit la fonction y = f(x) représentée par la courbe suivante :



On montre que l'intégrale de la fonction y = f(x) dans l'intervalle (a,b) représente la surface comprise entre la courbe représentative de y , l'axe des x et les droites x = a et x = b.

$$s = \int_b^a f(x)dx$$

Exemple : Calculer la surface S comprise entre la courbe y = sinx et l'axe des x entre x = 0 et x = π



$$S = \int_0^\pi \sin x dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 2$$ unités de surface

Exemples d'intégrales simples :

Tableau VII : Intégrales de quelques fonctions

F(x)	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	x^n	cos(x)	sin(x)	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\int F(x)dx$	$-\frac{1}{x}+C$	$2\sqrt{x}+C$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	sin(x)+C	-cos(x)+C	tan(x)+C

F(x)	$\frac{1}{\sin^2(x)}$	e^x	$\frac{1}{x}$	lnx	$\frac{e^x+e^{-x}}{2}$	$\frac{e^x-e^{-x}}{2}$
$\int F(x)dx$	-cotanx+ Cste	e^x +Cste	ln$\lvert x \rvert$+ Cste	xlnx-x +Cste	$\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ +Cste	$\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ +Cste

Lorsque l'intégrale est difficile on peut, par des changements de variables, se ramener à des intégrales connues.

Exemple1 :

$$\int_a^x tgx.dx = \int_0^x \frac{\sin x.dx}{\cos x}$$

$\sin(x)\cdot dx$ est la différentielle de $-\cos x$. Posons $\cos x = u$:

$$\int_a^x tgx.dx = \int_{\cos a}^{\cos x} \frac{-du}{u} = \left[-\ln|u|\right]_{\cos a}^{\cos x} = \ln\left|\frac{\cos a}{\cos x}\right|$$

Exemple2 :

$$\int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \quad , \ |x| < 1$$

Posons $u = \sin\alpha$,

Alors $1-u^2 = \cos^2 \alpha$ et $du = \cos\alpha \cdot d\alpha$

$$\int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int_0^{\alpha_1} d\alpha = [\alpha]_0^{\alpha_1} = \alpha_1 = \arcsin x$$

XII. Equations différentielles

1) Equation différentielle du premier ordre linéaire et à coefficients constants

Une équation différentielle est une relation entre une fonction et ses dérivées. Elle est dite du premier ordre si la dérivée est première. Elle est linéaire si la fonction et sa dérivée figurent au premier degré.

a) Soit la fonction $y(t)$ satisfaisant à l'équation différentielle :

$\frac{dy}{dt} = -ky$ t est le temps, k est une constante

En séparant les variables on a :

$$\frac{dy}{y} = -kt$$

$$\int_{yo}^{y} \frac{dy}{y} = -k\int_{0}^{t} dt$$

L'intégration donne : $\ln \frac{y}{y_o} = -kt$

et $y = y_o e^{-kt}$

b) Soit la fonction $y(t)$ satisfaisant à l'équation différentielle :

$\frac{dy}{dt} = m-ky$ t est le temps, m et k sont constants

Posons $y-\frac{m}{k} = z$

On a :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{d(y-\frac{m}{k})}{dt} = \frac{dy}{dt} = m-ky = -k(y-\frac{m}{k}) = -kz$$

$$z = z_o e^{-kt}$$

Donc :

$$y = \frac{m}{k} + (y_o - \frac{m}{k})e^{-kt}$$

2) Equation différentielle du second ordre

L'équation différentielle du second ordre contient des dérivées première et seconde :

$y''+w^2y = 0$ w^2 est un coefficient constant.

Multipliant par $2y'$

$$2y'y''+w^2 \cdot 2yy' = 0$$

Or $y'' = \frac{d(y')}{dt}$ et $y' = \frac{dy}{dt}$

$$2y' \cdot d(y') + w^2 \cdot 2y \cdot dy = 0$$

L'intégration donne :

$y'^2 + w^2y^2 = c^2$; c^2 est la constante d'intégration (positive car somme de 2 carrés)

L'équation obtenue est du premier ordre, mais elle n'est pas linéaire.

Faisant une séparation de variables :

$$y' = \frac{dy}{dt} = \sqrt{c^2-w^2y^2}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{c^2-w^2y^2}} = dt$$

Rappelons que :

$$\int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin x$$

Et en faisant le changement de variable $\frac{wy}{c} = u$:

$$\frac{dy}{c\sqrt{1-(\frac{wy}{c})^2}} = dt$$

$$\frac{d(\frac{wy}{c})}{\sqrt{1-(\frac{wy}{c})^2}} = wt$$

L'intégration donne :

$\arcsin(\frac{wy}{c}) = wt + \varphi$ φ est la deuxième constante d'intégration

$$y = \frac{c}{w}\sin(wt+\varphi)$$

$$y = (\frac{c}{w}\cos\varphi)\sin wt + (\frac{c}{w}\sin\varphi)\cos wt$$

Posons $A = \frac{c}{w}\cos\varphi$ et $B = \frac{c}{w}\sin\varphi$

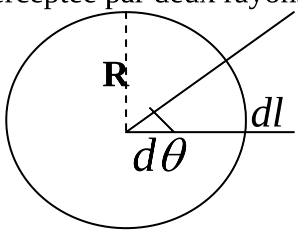
La solution générale est :

$$y = A\sin wt + B\cos wt$$

XIII. Angle plan et angle solide

a) définition de l'angle plan

L'angle plan se définit, dans l'espace à deux dimensions, par le rapport θ = *l/R* entre la longueur *l* interceptée par deux rayons sur le cercle, et le rayon *R* du cercle.



$dl = Rd\theta$

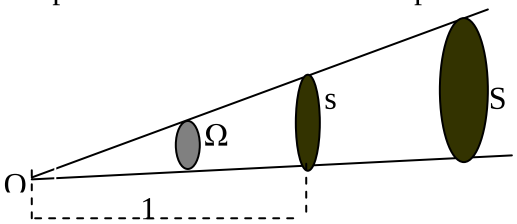
si $R = 1$; $dl = d\theta$:

L'angle en radian = longueur du cercle de rayon unité

$\theta_{total} = 2\pi R = 2\pi$ radians

b) définition de l'angle solide

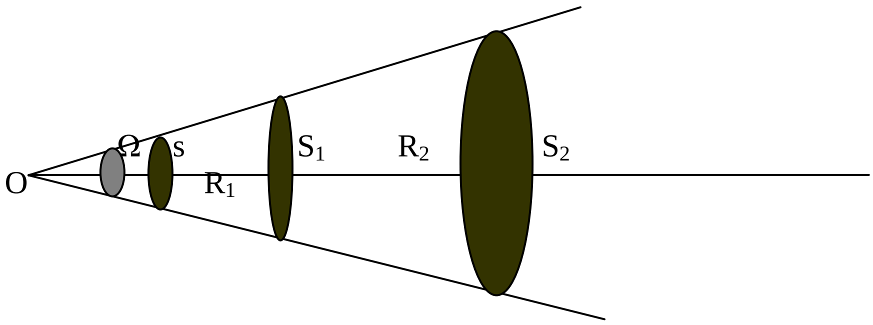
Dans l'espace la surface S est vue du point O sous l'angle solide Ω :



Par analogie à l'angle plan Ω a même mesure que l'aire s (de R=1) découpée par les génératrices du cône qui le forment sur la sphère de centre O et de rayon unité.

$\Omega = s$ exprimé en stéradians

Si l'on coupe le cône de sommet O par des sphères centrées en O et de rayons R_1 et R_2 :



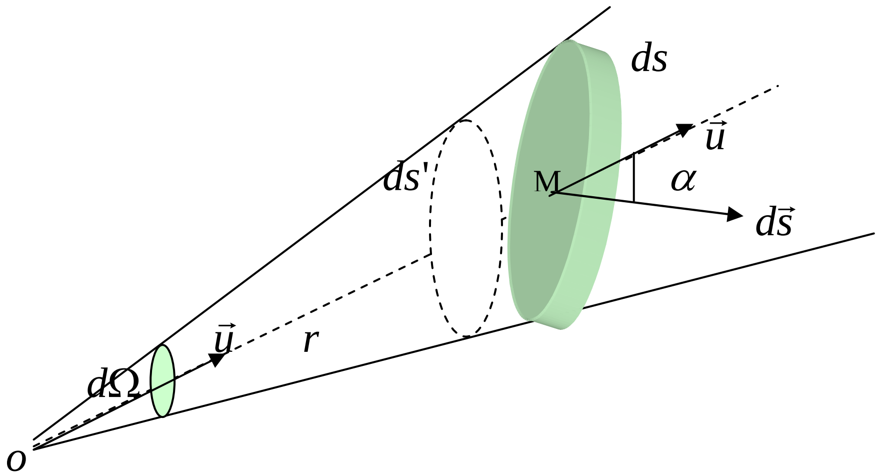
Les sphères étant homothétiques, les surfaces s, S_1 et S_2 sont aussi homothétiques

Les rapports $\frac{S_1}{R_1^2} = \frac{S_2}{R_2^2} = \frac{s}{R^2} = \frac{s}{1^2} = s = \Omega$ sont indépendants de R.

Si l'angle solide balaye tout l'espace, $\Omega = 4\pi$ stéradians

Si l'angle solide balaye le demi-espace limité par un plan (demi- sphère), $\Omega = 2\pi$ stéradians

Expression scalaire de l'angle solide



dS est vue de O sous dΩ. Le cône de sommet O qui s'appuie sur dS découpe sur la sphère centrée en O et de rayon OM= r, la surface dS'.

On a donc :

$$d\Omega = \frac{ds'}{r^2} = \frac{ds\cos\alpha}{r^2} = \frac{d\vec{s}.\vec{u}}{r^2}$$

et

$$d\Omega = \frac{d\vec{s}.\vec{u}}{r^2} = \frac{d\vec{s}.\vec{r}}{r^3}$$

TABLEAU PÉRIODIQUE DES ÉLÉMENTS

http://www.ktf-split.hr/periodni/fr/

NUMÉRO DU GROUPE RECOMMANDATIONS DE L'IUPAC (1985) — 13 IIIA — NUMÉRO DU GROUPE CHEMICAL ABSTRACT SERVICE (1986)

NOMBRE ATOMIQUE — 5; MASSE ATOMIQUE RELATIVE (1) — 10.811; SYMBOLE — B; NOM DE L'ÉLÉMENT — BORE

PÉRIODE	GROUPE 1 IA	2 IIA	3 IIIB	4 IVB	5 VB	6 VIB	7 VIIB	8 VIIIB	9 VIIIB	10 VIIIB	11 IB	12 IIB	13 IIIA	14 IVA	15 VA	16 VIA	17 VIIA	18 VIIIA
1	1 1.0079 H HYDROGÈNE																	2 4.0026 He HÉLIUM
2	3 6.941 Li LITHIUM	4 9.0122 Be BÉRYLLIUM											5 10.811 B BORE	6 12.011 C CARBONE	7 14.007 N AZOTE	8 15.999 O OXYGÈNE	9 18.998 F FLUOR	10 20.180 Ne NÉON
3	11 22.990 Na SODIUM	12 24.305 Mg MAGNÉSIUM											13 26.982 Al ALUMINIUM	14 28.086 Si SILICIUM	15 30.974 P PHOSPHORE	16 32.065 S SOUFRE	17 35.453 Cl CHLORE	18 39.948 Ar ARGON
4	19 39.098 K POTASSIUM	20 40.078 Ca CALCIUM	21 44.956 Sc SCANDIUM	22 47.867 Ti TITANE	23 50.942 V VANADIUM	24 51.996 Cr CHROME	25 54.938 Mn MANGANÈSE	26 55.845 Fe FER	27 58.933 Co COBALT	28 58.693 Ni NICKEL	29 63.546 Cu CUIVRE	30 65.39 Zn ZINC	31 69.723 Ga GALLIUM	32 72.64 Ge GERMANIUM	33 74.922 As ARSENIC	34 78.96 Se SÉLÉNIUM	35 79.904 Br BROME	36 83.80 Kr KRYPTON
5	37 85.468 Rb RUBIDIUM	38 87.62 Sr STRONTIUM	39 88.906 Y YTTRIUM	40 91.224 Zr ZIRCONIUM	41 92.906 Nb NIOBIUM	42 95.94 Mo MOLYBDÈNE	43 (98) Tc TECHNÉTIUM	44 101.07 Ru RUTHÉNIUM	45 102.91 Rh RHODIUM	46 106.42 Pd PALLADIUM	47 107.87 Ag ARGENT	48 112.41 Cd CADMIUM	49 114.82 In INDIUM	50 118.71 Sn ETAIN	51 121.76 Sb ANTIMOINE	52 127.60 Te TELLURE	53 126.90 I IODE	54 131.29 Xe XÉNON
6	55 132.91 Cs CÉSIUM	56 137.33 Ba BARYUM	57-71 La-Lu Lanthanides	72 178.49 Hf HAFNIUM	73 180.95 Ta TANTALE	74 183.84 W TUNGSTÈNE	75 186.21 Re RHÉNIUM	76 190.23 Os OSMIUM	77 192.22 Ir IRIDIUM	78 195.08 Pt PLATINE	79 196.97 Au OR	80 200.59 Hg MERCURE	81 204.38 Tl THALLIUM	82 207.2 Pb PLOMB	83 208.98 Bi BISMUTH	84 (209) Po POLONIUM	85 (210) At ASTATE	86 (222) Rn RADON
7	87 (223) Fr FRANCIUM	88 (226) Ra RADIUM	89-103 Ac-Lr Actinides	104 (261) Rf RUTHERFORDIUM	105 (262) Db DUBNIUM	106 (266) Sg SEABORGIUM	107 (264) Bh BOHRIUM	108 (277) Hs HASSIUM	109 (268) Mt MEITNERIUM	110 (281) Uun UNUNNILIUM	111 (272) Uuu UNUNUNIUM	112 (285) Uub UNUNBIUM		114 (289) Uuq UNUNQUADIUM				

Lanthanides

6	57 138.91 La LANTHANE	58 140.12 Ce CÉRIUM	59 140.91 Pr PRASÉODYME	60 144.24 Nd NÉODYME	61 (145) Pm PROMÉTHIUM	62 150.36 Sm SAMARIUM	63 151.96 Eu EUROPIUM	64 157.25 Gd GADOLINIUM	65 158.93 Tb TERBIUM	66 162.50 Dy DYSPROSIUM	67 164.93 Ho HOLMIUM	68 167.26 Er ERBIUM	69 168.93 Tm THULIUM	70 173.04 Yb YTTERBIUM	71 174.97 Lu LUTÉTIUM

Actinides

7	89 (227) Ac ACTINIUM	90 232.04 Th THORIUM	91 231.04 Pa PROTACTINIUM	92 238.03 U URANIUM	93 (237) Np NEPTUNIUM	94 (244) Pu PLUTONIUM	95 (243) Am AMÉRICIUM	96 (247) Cm CURIUM	97 (247) Bk BERKÉLIUM	98 (251) Cf CALIFORNIUM	99 (252) Es EINSTEINIUM	100 (257) Fm FERMIUM	101 (258) Md MENDELÉVIUM	102 (259) No NOBÉLIUM	103 (262) Lr LAWRENCIUM

(1) Pure Appl. Chem., 73, No. 4, 667-683 (2001)

La masse atomique relative est donnée avec cinq chiffres significatifs. Pour les éléments qui n'ont pas de nucléides stables, la valeur entre parenthèses indique le nombre de masse de l'isotope de l'élément ayant la durée de vie la plus grande.

Toutefois, pour les trois éléments Th, Pa et U qui ont une composition isotopique terrestre connue, une masse atomique est indiquée.

Editor Michel Ditria