UNIVERSITE MOHAMED V
FACULTE DES SCIENCES
RABAT-AGDAL
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Année Universitaire 2004/2005

COURS DE MECANIQUE DU POINT MATERIEL. POUR LE PREMIER SEMESTRE DES FILIERES SM ET SMI.

Par : MHIRECH Abdelaziz
Professeur à L'Université Mohamed V
Faculté des Sciences – Rabat – Agdal.

SOMMAIRE

CHAPITRE 1 :

A) SYSTEMES DE COORDONNEES

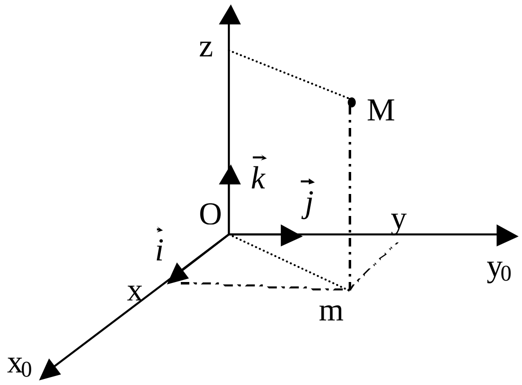
Selon la nature de la trajectoire d'une particule, sa position sera repérée par l'un des systèmes de coordonnées : cartésiennes, cylindriques ou sphériques.

Soient $R_0(O,x_0y_0z_0)$ un repère direct orthonormé de base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et M la particule à repérer.

I] Système de coordonnées cartésiennes.

Dans R0, la position de la particule M est donnée par ses trois coordonnées cartésiennes (x,y,z) telles que :
x = abscisse de M ; y = ordonnée de M ; z = côte de M.

$x = \mathrm{Pr}\,oj_{Ox_0}\,\overrightarrow{OM}$; $y = \mathrm{Pr}\,oj_{Oy_0}\,\overrightarrow{OM}$; $z = \mathrm{Pr}\,oj_{Oz_0}\,\overrightarrow{OM}$.



Dans R_0, le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,.$$

Déplacement élémentaire.

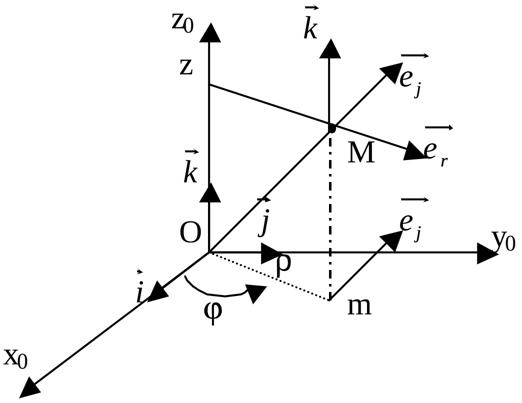
Le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{MM'}$ (M' est rès voisin de M) s'écrit:

$$\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{M} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$$

(Dans R_0, $d\vec{i} = d\vec{j} = d\vec{k} = \vec{0}$)

II] Systèmes de coordonnées cylindriques.

Si la trajectoire du point M possède une symétrie axiale de révolution, il est intéressant d'utiliser les coordonnées cylindriques de ce point (ρ,φ,z) définies comme suit : $r = |\overrightarrow{Om}|$ (m est la projection de M sur le plan (x_0Oy_0)), $j = angle(\overrightarrow{Ox_0},\overrightarrow{Om})$ et z est la projection du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sur l'axe $\overrightarrow{Oz_0}$.

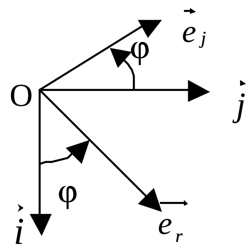


Une nouvelle base orthonormée directe $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ est associée à ce système de coordonnées telle que :

$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}.$$
$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}.$$

avec $\dfrac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi} = \vec{e}_\varphi$

et $\dfrac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} = -\vec{e}_\rho$.



Quand le point M décrit tout l'espace, les intervalles de variation de ρ, φ et z sont :
0 ρ < +∞ ; 0 φ 2π ; -∞ < z < +∞.
Dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$, le vecteur position $\overrightarrow{Om}$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho\,\vec{e}_\rho + z\vec{k}\,.$$

Déplacement élémentaire:

Le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{MM'}$ (M' très voisin de M) est:

$$\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{M} = d\rho\,\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\,\vec{e}_\varphi + z\vec{k}\,.$$

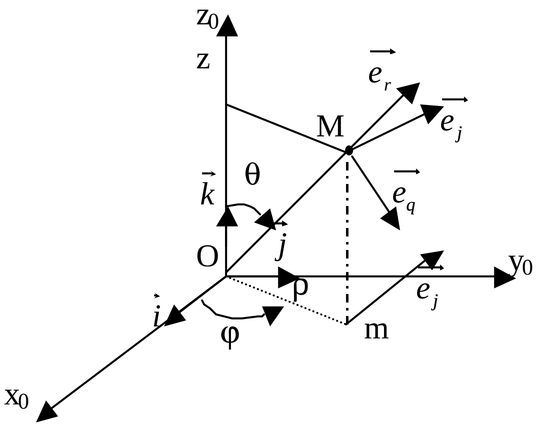
Cas particulier:

Si la trajectoire de M est plane, ce point peut être repéré par ses *coordonnées polaires* ρ et φ.

III] <u>Système de coordonnées sphériques.</u>

Lorsque le problème présente une symétrie sphérique autour d'un point O que l'on prend pour origine du repère d'espace, il est pratique d'utiliser les coordonnées sphériques (r,θ,φ) de la particule à étudier telles que :

$r = \left|\vec{OM}\right|$; $\theta = angle(\vec{Oz_0}, \vec{OM})$; $\varphi = angle(\vec{Ox_0}, \vec{Om})$.

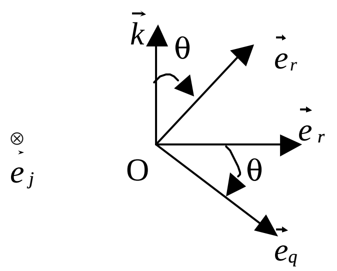


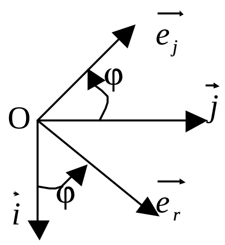
Quand M décrit tout l'espace,

$$0 \quad r < +\infty \; ; \; 0 \quad \varphi \quad 2\pi \; ; \; 0 \quad \theta \quad \pi.$$

Une nouvelle base s'introduit alors : $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$. Où

$$\begin{cases} \vec{e_r} = \sin\theta\,\vec{e_r} + \cos\theta\,\vec{k} = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k} \\ \vec{e_\theta} = \cos\theta\,\vec{e_r} - \sin\theta\,\vec{k} = \cos\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \cos\theta\sin\varphi\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k} \\ \vec{e_\varphi} = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}. \end{cases}$$





Dans la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_\varphi})$, le vecteur position s'écrit :

$$\vec{OM} = r\vec{e_r}.$$

<u>Déplacement élémentaire :</u>

Le déplacement élémentaire de la particule M en coordonnées sphériques est donné par:

$$d\vec{OM} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\theta\,\vec{e_\theta} + r(\sin\theta)\,d\varphi\,\vec{e_\varphi}.$$

B) CINEMATIQUE DU POINT MATERIEL.

- L'objet de la cinématique est de décrire les mouvements d'une particule sans tenir compte des causes qui les produisent.
- La description du mouvement d'une particule met en œuvre trois vecteurs :
  - i) Le vecteur position.
  - ii) Le vecteur vitesse.
  - iii) Le vecteur accélération.
- Le corps mobile sera appelé ***point matériel***. On parle de point matériel lorsque les dimensions du mobile sont considérées négligeables dans les conditions du problème.
- En mécanique classique, la vitesse V du point M est négligeable par rapport à la vitesse de la lumière dans le vide.
-

I) Vecteur vitesse :

a) Vitesse moyenne.

Le vecteur vitesse moyenne d'une particule M qui se trouve à l'instant t_1 en M_1 et à l'instant t_2 en M_2 est donnée par:

$$\vec{V}_m(M) = \frac{\overrightarrow{OM}(t_2) - \overrightarrow{OM}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{OM}_2 - \overrightarrow{OM}_1}{t_2 - t_1}$$

b) Vitesse instantanée.

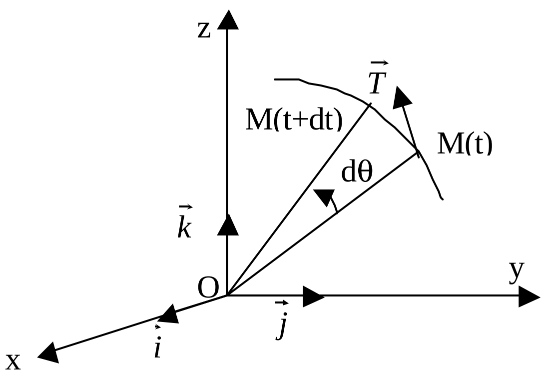
Le vecteur vitesse instantanée de la particule en M par rapport à un repère orthonormé R(O,xyz) est :

$$\vec{V}(M/R) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{V}_m(M) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t},$$

donc $$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R$$

b) Vitesse algébrique:

Dans ce cas, c'est la trajectoire elle même qui sert à repérer le mobile à l'aide de l'abscisse curviligne s (ou *coordonnée intrinsèque*) du point M. Δs = arc (M(t)M(t+Δt)).



Le vecteur vitesse est porté par le vecteur unitaire $\vec{T}$ tangent à la trajectoire.

La vitesse algébrique de M est $v = \dfrac{ds}{dt}$. Le vecteur vitesse instantanée peut donc s'écrire:

$$\vec{V}(M/R) = \frac{ds}{dt}\vec{T} \ .$$

II) Vecteur accélération.

La dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse ci-dessus donne le vecteur accélération, qui s'écrit comme suit :

$$\vec{g}(M/R) = \frac{d^2 s}{dt^2}\vec{T} + \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{T}}{dt}.$$

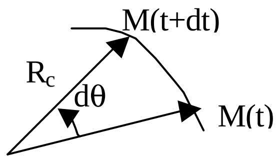
Or $\dfrac{d\vec{T}}{dt} = \dfrac{d\vec{T}}{d\theta}.\dfrac{d\theta}{dt}$ et

$\dfrac{d\vec{T}}{d\theta} = \vec{N}$ désigne le vecteur normal dirigé vers le centre de courbure de la trajectoire du point M.

Par ailleurs, nous avons, $\Delta s = R_c\theta$ ou $ds = R_c d\theta$

Donc $\dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{1}{R_c}\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{v}{R_c}$.

Par conséquent, $\dfrac{d\vec{T}}{dt} = \dfrac{v}{R_c}\vec{N}$.



Le vecteur accélération instantanée du point M s'écrit alors :

$$g(M/R) = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R_c}\vec{N} = g_t\vec{T} + g_n\vec{N} = \vec{g}_t + \vec{g}_n .$$

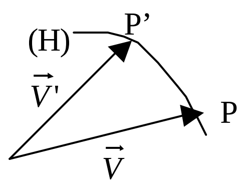
- La direction définie par le vecteur $\vec{N}$ est la normale principale en M à la trajectoire.
- Le vecteur unitaire $\vec{B} = \vec{T} \wedge \vec{N}$ est appelé vecteur de la binormale.
- Le repère $(M;\vec{T},\vec{N},\vec{B})$ est le repère de ***Frenet-Serret.***

Hodographe du mouvement.

Définition :

L'hodographe d'un mouvement (noté (H)) est l'ensemble des point P tels que :

A tout instant, $\overrightarrow{OP} = \vec{V}(M/R)$; où O désigne le pôle de (H).



III) Composantes des vecteurs vitesse et accélération.

a) Coordonnées cartésiennes (x,y,z)

Soit un référentiel R(O,xyz) fixe muni d'une base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
Le vecteur position est :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Le vecteur vitesse s'écrit alors :

$$\vec{V}(M/R) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

Les vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont fixes dans le repère R, donc :

$$\left.\frac{d\vec{i}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{j}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_R = \vec{0}.$$

Et l'accélération instantanée du point M s'écrit :

$$\vec{g}(M/R) = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}.$$

b) Coordonnées cylindriques (r , j ,z) :

Le vecteur position est

$$\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}\vec{e}_r + z\vec{k}.$$

Le vecteur déplacement élémentaire s'écrit :

$$d\overrightarrow{OM} = d\boldsymbol{r}\vec{e}_r + \boldsymbol{r}d\boldsymbol{j}\vec{e}_j + dz\vec{k}.$$

Le vecteur vitesse est alors :

$$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\vec{e}_r + \boldsymbol{r}\frac{d\boldsymbol{j}}{dt}\vec{e}_j + \frac{dz}{dt}\vec{k}.$$

Ou bien $\vec{V}(M/R) = \dot{\boldsymbol{r}}\vec{e}_r + \boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{j}}\vec{e}_j + \dot{z}\vec{k}$.

Le vecteur accélération est:

$$\vec{g}(M/R) = \left.\frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right|_R = \ddot{\boldsymbol{r}}\vec{e}_r + \dot{\boldsymbol{r}}\left.\frac{d\vec{e}_r}{dt}\right|_R + \dot{\boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{j}}\vec{e}_j + \boldsymbol{r}\ddot{\boldsymbol{j}}\vec{e}_j + \boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{j}}\left.\frac{d\vec{e}_j}{dt}\right|_R + \ddot{z}\vec{k},$$

Qui peut encore s'écrire:

$$\vec{g}(M/R) = \begin{cases} \ddot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}\dot{\boldsymbol{j}}^2 \\ \boldsymbol{r}\ddot{\boldsymbol{j}} + 2\dot{\boldsymbol{r}}\dot{\boldsymbol{j}} \\ \ddot{z} \end{cases}_{\vec{e}_r,\vec{e}_j,\vec{k}}$$

Remarque:

Dans le cas d'un mouvement plan, nous avons z = 0 et le vecteur accélération s'écrit alors:

$$\vec{g}(M/R) = \begin{cases} \ddot{r} - r\dot{j}^2 & \textit{composante radiale.} \\ r\ddot{j} + 2\dot{r}\dot{j} & \textit{composante orthoradiale.} \end{cases}_{\vec{e}_r,\vec{e}_j}$$

c) <u>Coordonnées sphériques</u> (r,è,ö)

La base associée à ce système de coordonnées est $(\vec{e}_r, \vec{e}_q, \vec{e}_j)$.

Nous rappelons que, le vecteur position est $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$ et le vecteur déplacement élémentaire s'écrit $d\overrightarrow{OM} = dr\vec{e}_r + rdq\vec{e}_q + r(\sin q)dj\vec{e}_j$.

- Le vecteur vitesse est alors: $\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{dq}{dt}\vec{e}_q + r(\sin q)\frac{dj}{dt}\vec{e}_j$.

  Ou $\vec{V}(M/R) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{q}\vec{e}_q + r(\sin q)\dot{j}\vec{e}_j$

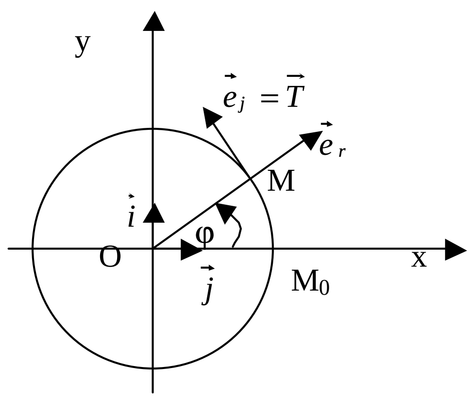
- Le vecteur accélération est:

$$\vec{g}(M/R) = (\ddot{r} - r\dot{q}^2 - r\dot{j}^2\sin^2 q)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{q} + r\ddot{q} - r\dot{j}^2\cos q\sin q)\vec{e}_q + (2\dot{r}\dot{j}\sin q +$$
$$2r\dot{q}\dot{j}\cos q + r\ddot{j}\sin q)\vec{e}_j$$

IV) <u>Exemple de mouvement particuliers.</u>

1) <u>Mouvement circulaire.</u>

Dans ce cas, le mobile se déplace sur un cercle (C) de rayon R et de centre O. Ce cercle est situé dans le plan (xOy). Pou étudier le mouvement de M, il préférable d'utiliser les coordonnées ses polaires (ñ,ö).



En coordonnées polaires, le vecteur position s'écrit: $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r = R\vec{e}_r$.

Le vecteur vitesse du point M est: $\vec{V}(M/R) = R\dot{\varphi}\,\vec{e}_{\varphi}$,
et le vecteur accélération est donné par:

$$\vec{\gamma}(M/R) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_{\varphi} = -R\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_r + R\ddot{\varphi}\,\vec{e}_{\varphi}\,.$$

Dans le cas où le mouvement circulaire est uniforme, nous avons:

ö = ùt et $\dot{\varphi} = \omega = Cte.$ Le vecteur vitesse de M devient: $\vec{V}(M/R) = R\omega\vec{e}_{\varphi}$, et le vecteur accélération se réduit à: $\vec{\gamma}(M/R) = -R\omega^2\,\vec{e}_r$.
L'accélération du point M est alors normale à sa trajectoire (l'accélération tangentielle est nulle, car le module du vecteur vitesse est constant).

En coordonnées intrinsèques, l'arc $M_0M = \Delta s = R\varphi(t)$,
d'où $\vec{V}(M/R) = \dfrac{ds}{dt}\vec{T} = R\dot{\varphi}\,\vec{T}$,
et l'accélération est $\vec{\gamma}(M/R) = \dfrac{d^2s}{dt^2}\vec{T} + \dfrac{v^2}{R_c}\vec{N} = R\ddot{\varphi}\,\vec{T} + R\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_{\varphi}$.
Et $\vec{\gamma}(M/R) = \gamma_t\,\vec{e}_{\varphi} - \gamma_n\,\vec{e}_r$, donc $\vec{e}_{\varphi} = \vec{T}$ et $\vec{e}_r = -\vec{N}$.

<u>Remarque:</u> Le vecteur vitesse peut aussi s'écrire:

$$\vec{V}(M/R) = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{OM} = \omega\vec{k}\wedge R\vec{e}_r = R\omega\vec{e}_{\varphi} = R\omega\vec{T}\,.$$

2) <u>Mouvement à accélération centrale.</u>

Un mouvement à accélération centrale est un mouvement dont l'accélération de la particule M, $\vec{\gamma}(M/R)$, est parallèle au vecteur position $\overrightarrow{OM}$ à tout instant t. Il en découle $\overrightarrow{OM}\wedge\vec{\gamma}(M/R) = \vec{0}$.
Par ailleurs:

$$\overrightarrow{OM}\wedge\vec{\gamma}(M/R) = \frac{d[\overrightarrow{OM}\wedge\vec{V}(M/R)]}{dt} = \vec{0}\,.$$

D'où $\overrightarrow{OM}\wedge\vec{V}(M/R) = \vec{C}$.

$\vec{C}$ est un vecteur constant en module, en sens et en direction. $\vec{C}$ est alors perpendiculaire au plan formé par $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{V}(M/R)$. Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ et le vecteur vitesse $\vec{V}(M/R)$ appartiennent donc au même plan quelque soit l'instant t considéré.
Par conséquent, tout ***mouvement à accélération centrale*** est ***un mouvement plan***. Pour étudier le mouvement du point M, il est alors préférable d'utiliser ses coordonnées polaires.

Nous rappelons que dans le cas général d'un mouvement plan les vecteurs position, vitesse et accélération s'écrivent, respectivement, comme suit:

$$\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}\vec{e}_r \,.$$

$$\vec{V}(M/R) = \dot{\boldsymbol{r}}\,\vec{e}_r + \boldsymbol{r}\,\dot{\boldsymbol{j}}\,\vec{e}_j \,.$$

$$\vec{g}(M/R) = (\ddot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}\,\dot{\boldsymbol{j}}^2)\vec{e}_r + (2\,\dot{\boldsymbol{r}}\,\dot{\boldsymbol{j}} + \boldsymbol{r}\,\ddot{\boldsymbol{j}})\vec{e}_j \,.$$

Puisque l'accélération du point M est centrale (parallèle au vecteur position), elle doit s'écrire dans ce cas:

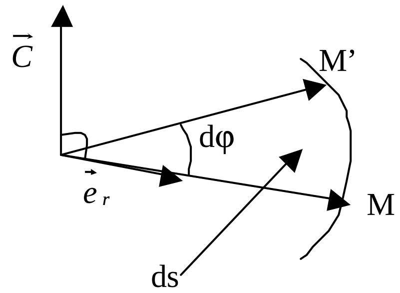
$\vec{g}(M/R) = (\ddot{\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{r}\,\dot{\boldsymbol{j}}^2)\vec{e}_r$, et donc sa composante orthoradiale est nulle:

$2\,\dot{\boldsymbol{r}}\,\dot{\boldsymbol{j}} + \boldsymbol{r}\,\ddot{\boldsymbol{j}} = 0$ qui peut s'écrire $\dfrac{1}{\boldsymbol{r}}\dfrac{d(\boldsymbol{r}^2\,\dot{\boldsymbol{j}})}{dt} = 0$ d'où $\boldsymbol{r}^2\,\dot{\boldsymbol{j}} = Cte$.

Finalement, $\boldsymbol{r}^2\,\dot{\boldsymbol{j}} = C = \left|\vec{OM} \wedge \vec{V}(M/R)\right|$, appelée constante des aires.

<u>Loi des aires:</u>

Calculons l'aire balayée, par unité de temps, par le rayon vecteur $\overrightarrow{OM} = \boldsymbol{r}\vec{e}_r$.



$$\vec{C} = O\overrightarrow{M} \wedge \vec{V}(M/R)$$

$ds = \dfrac{1}{2}\left|\vec{OM} \wedge \vec{MM'}\right|$, M' est très voisin de M.

Donc $ds = \left|\boldsymbol{r}\vec{e}_r \wedge (d\boldsymbol{r}\vec{e}_r + \boldsymbol{r}d\boldsymbol{j}\vec{e}_j)\right| = \dfrac{1}{2}\boldsymbol{r}^2 d\boldsymbol{j}$, et

$\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{C}{2}$ d'où $ds = \dfrac{C}{2}dt$ et $\int_0^s ds = \dfrac{C}{2}\int_0^t dt$.

Donc $s = \dfrac{C}{2}t$ où $\dfrac{C}{2}$ est la vitesse aréolaire (Cm²/s).

Ce résultat est appelé $2^{\text{ème}}$ loi de Kepler.

Formules de BINET:

a) **cas de la vitesse:**

Dans le cas d'un mouvement à accélération centrale, le carré du module du vecteur vitesse est: $V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{j}^2$.

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dj}\frac{dj}{dt}.$$

On pose $u = \frac{1}{r}$, donc $du = -\frac{dr}{r^2}$ et $\frac{du}{dj} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dj}$,

Ce qui donne $\frac{dr}{dj} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dj}$.

D'autre part,

$$C = r^2\dot{j} \quad \text{peut s'écrire} \quad \dot{j} = Cu^2 .$$

Et $\quad V^2 = [-(\frac{1}{u^2}\frac{du}{dj})]^2.C^2u^4 + \frac{1}{u^2}.C^2u^4$,

La première formule de BINET s'écrit:

$$\boxed{V^2 = C^2[(\frac{du}{dj})^2.+u^2]}$$

Cette formule permet de déterminer l'équation polaire ñ = ñ(ö) ou bien u = u(ö) connaissant la vitesse du point M et inversement.

b) cas de l'accélération

La deuxième formule de BINET permet de déterminer l'accélération de la particule étudiée si l'on connaît l'équation polaire et inversement.

Le mouvement du point M étant à accélération centrale, on a:

$\vec{g}(M/R) = (\ddot{r} - r\dot{j}^2)\vec{e}_r$ dont la valeur algébrique est $g = \ddot{r} - r\dot{j}^2$.

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dj}\frac{dj}{dt} = \frac{d}{dj}(-C\frac{du}{dj}).Cu^2 = -C^2u^2\frac{d^2u}{dj^2}.$$

Et $r j^2 = \frac{1}{u}C^2u^4 \quad = C^2u^3$.

La deuxième formule de BINET s'écrit alors

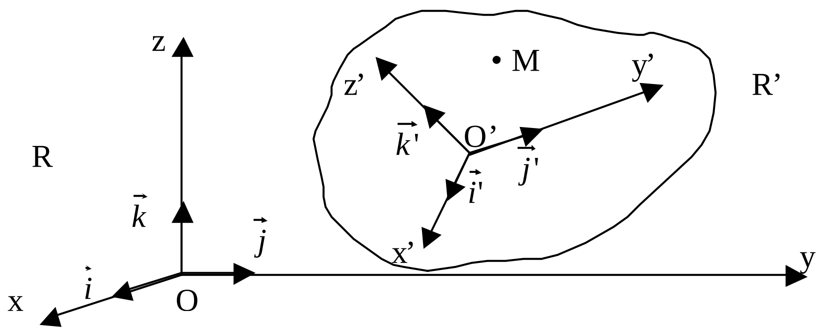
$$\boxed{g = -C^2u^2[\frac{d^2u}{dj^2} + u]}$$

CHANGEMENTS DE REFERENTIELS

Soit à étudier le mouvement d'une particule M par rapport à un repère fixe R, appelé repère absolu. Il est parfois intéressant d'introduire un second repère R', dit repère relatif, par rapport au quel le mouvement de M soit simple à étudier.

Soient,

- R(O,xyz) un repère absolu (repère fixe).
- R'(O',x'y'z') un repère relatif (repère mobile par rapport à R).



R' peut être animé d'un mouvement de translation et/ou de rotation par rapport à R.
La rotation de R' par rapport à R se fait avec une vitesse angulaire ω(R'/R) telle que :
Dans le repère R,

$$\begin{cases} \left.\dfrac{d\vec{i}'}{dt}\right|_R = \vec{w}(R'/R) \wedge \vec{i}' \\ \left.\dfrac{d\vec{j}'}{dt}\right|_R = \vec{w}(R'/R) \wedge \vec{j}' \\ \left.\dfrac{d\vec{k}'}{dt}\right|_R = \vec{w}(R'/R) \wedge \vec{k}' \end{cases}$$

Dans R',

$$\left.\frac{d\vec{i}'}{dt}\right|_{R'} = \left.\frac{d\vec{j}'}{dt}\right|_{R'} = \left.\frac{d\vec{k}'}{dt}\right|_{R'} = \vec{0}.$$

1) Dérivation en repère mobile.

Soit $\vec{A}$ un vecteur quelconque. Dans le repère R, ce vecteur s'écrit

$$\vec{A} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Dans le repère R' le vecteur $\vec{A}$ s'écrit,

$$\vec{A} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}.$$

$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_R = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} = \dot{x}'\vec{i}' + x'\left.\frac{d\vec{i}'}{dt}\right|_R + \dot{y}'\vec{j}' + y'\left.\frac{d\vec{j}'}{dt}\right|_R + \dot{z}'\vec{k}' + z'\left.\frac{d\vec{k}'}{dt}\right|_R ,$$

qui peut s’écrire aussi,

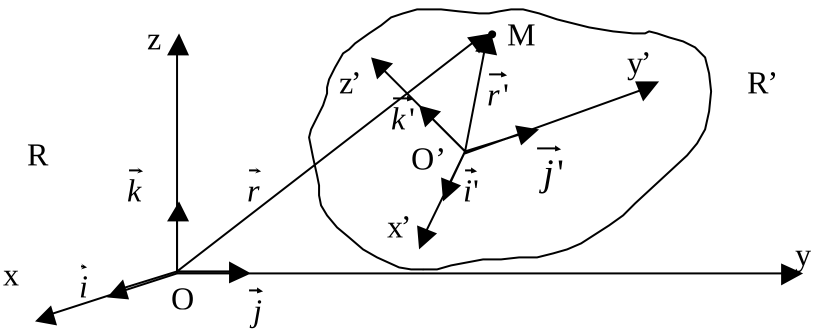
$$\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_R = \dot{x}'\vec{i}' + \dot{y}'\vec{j}' + \dot{z}'\vec{k}' + x'\vec{w}(R'/R) \wedge x'\vec{i}' + y'\vec{w}(R'/R) \wedge y'\vec{j}' + z'\vec{w}(R'/R) \wedge z'\vec{k}' \ ,$$

Ou

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{R'} + \vec{w}(R'/R) \wedge \vec{A}}$$

2) <u>Composition des vitesses</u>

Soient R(O,xyz) un repère absolu et R’(O’,x’y’z’) un repère relatif.



Les vecteurs position de la particule M dans les repères R et R’ sont, respectivement :
$\overrightarrow{OM} = \vec{r}$ $\ et\ $ $\overrightarrow{O'M} = \vec{r}'$.

On peut écrire,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} .$$

Donc la vitesse absolu du point M est,

$$\vec{V}_a(M) = \vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{R'} + \vec{w}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'M} ..$$

Où

$$\vec{V}(M/R') = \vec{V}_r(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{R'}$$ désigne la vitesse relative du point M. Et ,

$$\vec{V}_e(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + \vec{w}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'M} \quad ,$$

est la vitesse d’entraînement de M. La vitesse d’entraînement de M est la vitesse absolu du point (imaginaire) qui coï ncide avec M à l’instant t et supposé fixe dans le repère R’.

On peut aussi noter la vitesse d'entraînement de M comme suit,

$$\vec{V}_e(M) = \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_R \quad (M \ \ fixe\ dans\ \ R').$$

Nous avons donc,

$$\boxed{\vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M).}$$

3) Composition des accélérations.

L'accélération absolue du point M est,

$$\vec{g}_a(M) = \vec{g}(M/R) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}\right|_R = \left.\frac{d\vec{V}_a}{dt}\right|_R .$$

$$\vec{g}_a(M) = \left.\frac{d(\vec{V}_r(M) + \vec{V}_e(M))}{dt}\right|_R$$

$$= \left.\frac{d\vec{V}_r(M)}{dt}\right|_R + \frac{d}{dt}\left[\left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_R + \vec{w}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'M}\right]_R$$

$$* \quad \left.\frac{d\vec{V}_r(M)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d\vec{V}_r(M)}{dt}\right|_{R'} + \vec{w}(R'/R) \wedge \vec{V}_r = \vec{g}_r(M) + \vec{w}(R'/R) \wedge \vec{V}_r$$

$$* \quad \left.\frac{d}{dt}(\vec{w}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'M})\right|_R = \frac{d\vec{w}(R'/R)}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{w}(R'/R) \wedge \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_R$$

Par conséquent l'accélération absolue peut s'écrire,

$$\vec{g}_a(M) = \vec{g}_r(M) + 2\vec{w}(R'/R) \wedge \vec{V}_r(M) + \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_R + \frac{d\vec{w}(R'/R)}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{w}(R'/R) \wedge (\vec{w}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'M}).$$

Dont

$$\left.\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right|_R + \frac{d\vec{w}(R'/R)}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{w}(R'/R) \wedge (\vec{w}(R'/R) \wedge \overrightarrow{O'M}) = \vec{g}_e(M) \quad ,$$

désigne l'accélération d'entraînement, et

$$2\vec{w}(R'/R) \wedge \vec{V}_r(M) = \vec{g}_c(M)$$

est l'accélération de Coriolis ou complémentaire.

Nous écrivons alors

$$\boxed{\vec{g}_a(M) = \vec{g}_r(M) + \vec{g}_e(M) + \vec{g}_c(M).}$$

Cas particulier :

Quand le repère R' est en translation par rapport à R,

$$\vec{w}(R'/R) = \vec{0} \ .$$

Par conséquent

$$\begin{cases} \vec{V}_a(M) = \vec{V}_r(M) + \vec{V}_a(O') \\ et \\ \vec{g}_a(M) = \vec{g}_r(M) + \vec{g}_a(O'). \end{cases}$$

Si en plus, R' est en translation uniforme par rapport à R,

$$\vec{V}_a(O') = \overrightarrow{cte} \qquad et \qquad \boxed{\vec{g}_a(M) = \vec{g}_r(M).}$$

CHAPITRE 2

DYNAMIQUE DU POINT MATERIEL :
LOI FONDAMENTALE ET THEOREMES GENERAUX.

La dynamique est l'étude des mouvements en fonction des causes qui les produisent. Ces causes sont les interactions entre particules et sont représentées par les forces.

I) Loi fondamentale de la dynamique.

1) Principe d'inertie.

Lorsqu'un point matériel en mouvement n'est soumis à aucune force, son mouvement est rectiligne uniforme. C'est la première loi de Newton.

2) Loi fondamentale de la dynamique.

L'accélération d'un point matériel M en mouvement est proportionnelle à la résultante des forces qui s'exercent sur lui et inversement proportionnelle à sa masse :

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{g}\ (M)$$

C'est la deuxième loi de Newton.

3) Axes de la mécanique.

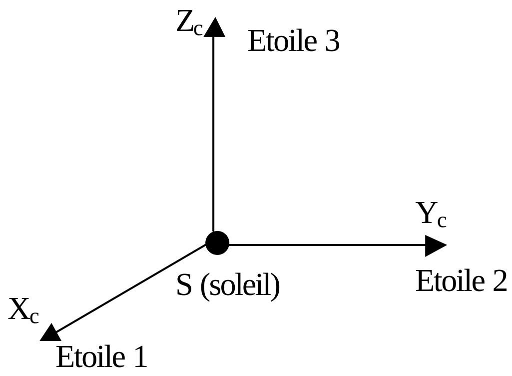
Nous avons vu au chapitre précédent,

$$\vec{g}_a(M) = \vec{g}_r(M) + \vec{g}_e(M) + \vec{g}_c(M).$$

Par conséquent, le principe fondamental de la dynamique ne s'écrira pas de la même manière dans R et dans R'.

Nous nous basons alors sur un résultat de mécanique céleste qui suppose que le principe fondamental de la dynamique est valable dans un système de référence appelé référentiel de Copernic. Ce référentiel est noté $R_c(S,X_cY_cZ_c)$.

Le repère $R_c(S,X_cY_cZ_c)$ a pour origine le centre du soleil. Ses trois axes sont dirigés suivant trois étoiles supposées fixes.



Remarque :

Si l'on étudie le mouvement du point M par rapport au repère R', avec R' en translation uniforme par rapport au repère de Copernic, la loi fondamentale de la dynamique sera aussi valable dans R'.

En effet,

$$\vec{g}(M/R_c) = \vec{g}\ (M/R_c)\ ,$$

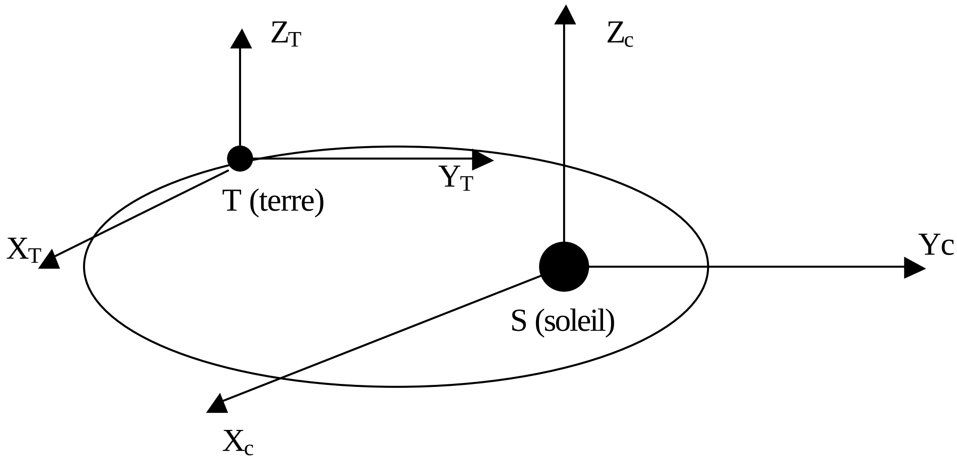
car

$$\vec{g}_e(M) = \vec{g}_c(M) = \vec{0}.$$

Définition :
Tout repère en translation rectiligne uniforme par rapport au repère de Copernic portera le nom de repère galiléen.

4) Dynamique terrestre.

Repère géocentrique.
Soient: $R_c(S,X_cY_cZ_c)$ le repère de Copernic et $R_T(T,X_TY_TZ_T)$ le repère géocentrique.
$R_T(T,X_TY_TZ_T)$ est un repère orthonormé dont l'origine T est le centre de la terre et les axes $\overrightarrow{TX}_T$, $\overrightarrow{TY}_T$ et $\overrightarrow{TZ}_T$ sont respectivement parallèles aux axes $\overrightarrow{SX}_c$, $\overrightarrow{SY}_c$ et $\overrightarrow{SZ}_c$ du repère de Copernic.



La terre tourne autour du soleil en une année. C'est le mouvement orbital elliptique.
La durée ô des expériences sur terre est très faible devant la période du mouvement orbital elliptique (ô << 365 jours).
Par conséquent, on suppose que le mouvement de la terre autour du soleil est rectiligne uniforme au cours d'une expérience donnée.
Le référentiel R_T est donc considéré comme référentiel galiléen. On peut alors écrire:

$$\vec{g}(M/R_T) = \vec{g}(M/R_c).$$

On définit aussi le repère R_L appelé référentiel du Laboratoire dont l'origine est un point L à la surface de la terre, de latitude ë et dont l'axe $\overrightarrow{LZ}_L$ est perpendiculaire à la surface du sol terrestre. R_L est en mouvement de rotation par rapport au repère R_T. C'est le mouvement de rotation de la terre sur elle-même. R_L est un repère non galiléen.

5) Loi fondamentale de la dynamique dans un référentiel non galiléen.

Soient R un référentiel galiléen et R' un référentiel non galiléen. R' est mobile par rapport à R.
R est le référentiel absolu. R' est le référentiel relatif.
On désigne par $\vec{g}_a(M)$ l'accélération du point M dans le repère R et par $\vec{g}_r(M)$ l'accélération du même point dans le repère R'.
La loi de composition des accélérations donne:

$$\vec{g}_a(M) = \vec{g}_r(M) + \vec{g}_e(M) + \vec{g}_c(M).$$

Le principe fondamental de la dynamique dans R s'écrit:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{g}_a(M) = m\vec{g}_r(M) + m\vec{g}_e(M) + m\vec{g}_c(M),$$

où m est la masse du point m et $\sum \vec{F}_{ext}$ désigne la résultante de toutes les forces extérieures appliquées à M.

Dans le repère R', le principe fondamental de la dynamique est,

$$m\vec{g}_r(M) = m\vec{g}_a(M) - m\vec{g}_e(M) - m\vec{g}_c(M) = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_e + \vec{F}_c \ .$$

Où

$\vec{F}_e$ est la force d'inertie d'entraînement,

$\vec{F}_e$ est la force d'inertie de Coriolis ou complémentaire.

Dans le référentiel non galiléen, la loi fondamentale de la dynamique s'écrit de la même façon que dans le repère galiléen à condition de tenir compte des forces d'inertie $\vec{F}_e$ et $\vec{F}_c$.

6) Classification des forces.

a) Forces réelles (ou extérieures):

Les forces réelles sont de deux types,

- ***Forces à distance*:**
  Exemple : - Force d'attraction universelle.
  - Force électrostatique.
- ***Forces de contact:***
  Exemple: - Force de frottement.
  - Force élastique (cas d'un ressort).

b) Forces d'inertie (ou intérieure):

C'est la résistance que manifestent les corps au mouvement. Cette résistance est due à leur masse. Se sont,

- La force d'inertie d'entraînement: $\vec{F}_e = -m\vec{g}_e$.
- La force d'inertie de Coriolis: $\vec{F}_c = -m\vec{g}_c$.

Les forces $\vec{F}_e$ et $\vec{F}_c$ n'apparaissent que dans les repères galiléen.

7) Quantité de mouvement et moment cinétique.

1) Définition:

Soit un point matériel M de masse m et de vecteur vitesse $\vec{V}(M)$ dans un repère R(O,xyz) quelconque.

- La quantité de mouvement de M dans le repère R est

$$\vec{P}(M) = m\vec{V}(M).$$

- Le moment cinétique de M par rapport au point fixe O est:

$$\vec{s}_O(M) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{P}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M) \ .$$

- Le moment cinétique du point M par rapport à une droite (D), passant par O et de vecteur unitaire $\vec{u}$, est donnée par le scalaire,

$$\mathbf{M}_D(\vec{P}) = \vec{s}_O(M).\vec{u} \ .$$

2) Théorème.

$$\frac{d\vec{P}(M)}{dt} = \left.\frac{d(m\vec{V}(M))}{dt}\right|_R = m\left.\frac{d\vec{V}(M)}{dt}\right|_R = m\vec{g}(M/R)$$

Donc

$$\left.\frac{d\vec{P}(M)}{dt}\right|_R = m\vec{g}(M/R) = \sum \vec{F}_{ext} \ .$$

La dérivée par rapport au temps de la quantité de mouvement n'est autre que la résultante des forces extérieures appliquées à la particule M (le repère R est supposé galiléen).

Dans le cas où R n'est pas galiléen:

$$\left.\frac{d\vec{P}(M)}{dt}\right|_R = m\vec{g}(M/R) = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_e + \vec{F}_c \, .$$

2) **Quantité d'accélération, moment dynamique, théorème du moment cinétique.**

a. **Définition du vecteur quantité d'accélération.**

On appel quantité d'accélération, $\vec{\Gamma}(M)$, du point M par rapport à un repère R, le produit de sa masse m par son vecteur accélération $\vec{g}(M/R)$:

$$\vec{\Gamma}(M/R) = m\vec{g}(M/R) = \left.\frac{d\vec{P}(M/R)}{dt}\right|_R \ .$$

b. **Moment dynamique du point M par rapport au point fixe O.**

Le moment dynamique, $\vec{d}_O(M/R)$, d'une particule M par rapport à un fixe O, dans un repère R, est par définition:

$\vec{d}_O(M/R) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\Gamma}(M/R)$.

c. **Théorème du moment cinétique.**

$$\left.\frac{d\vec{s}_O(M)}{dt}\right|_R = \left.\frac{d(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M))}{dt}\right|_R = \vec{V}(M) \wedge m\vec{V}(M) + \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{g}(M/R)\, .$$

Donc: $\vec{d}_O(M/R) = \left.\dfrac{d\vec{s}_O(M/R)}{dt}\right|_R = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{\Gamma}(M/R) = \overrightarrow{OM} \wedge \sum \vec{F}_{ext}$.

Le moment dynamique d'une particule M, en un point fixe O, dans un repère galiléen R est égal au moment, en ce point, de la résultante de toutes les forces appliquées à M.

CHAPITRE III

TRAVAIL ET ENERGIE

I) Puissance et travail d'une force.

- La puissance instantanée d'un point matériel M est le produit scalaire de la résultante des forces qui agissent sur M par la vitesse de ce point:

$$P = \sum \vec{F}.\vec{V}(M) \qquad \text{[Watts].}$$

- Le travail élémentaire fourni par un point matériel se déplaçant d'une quantité finie $d\overrightarrow{OM}$, est donné par,

$$dW = \sum \vec{F}.d\overrightarrow{OM}\ .$$

Comme $\vec{V}(M) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$, nous écrivons $dW = \sum \vec{F}.\vec{V}(M).dt = P.dt$.

II) Forces conservatives: Energie potentielle.

- Si une force $\vec{F}$ est conservative, alors elle dérive d'une énergie potentielle E_p. Donc cette force peut s'écrire:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p\ .$$

L'énergie potentielle n'est définie qu'à une constante additive près ($\overrightarrow{grad}(Cte) = \vec{0}$).

- Pour qu'une force $\vec{F}$ soit conservative, il faut que :

$$\overrightarrow{rot}\vec{F} = \vec{0}\,.$$

Travail d'une force conservative

Soit $\vec{F}$ une force conservative. Son travail étant: $dW = \vec{F}.d\overrightarrow{OM}$.
Cette force est conservative, elle peut donc s'écrire

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}E_p = \begin{cases} -\dfrac{\partial E_p}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial E_p}{\partial y} \\ -\dfrac{\partial E_p}{\partial z} \end{cases}_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}} \qquad \text{et} \qquad d\dot{OM} = \begin{cases} dx \\ dy \\ dz \end{cases}_{\vec{i},\vec{j},\vec{k}}$$

$$dW = -\frac{\partial E_p}{\partial x}dx - \frac{\partial E_p}{\partial y}dy - \frac{\partial E_p}{\partial z}dz = -dE_p\ .$$

Le travail d'une force conservative pour déplacer un point matériel est égal à la diminution de son énergie potentielle.

II) Energie cinétique.

1) Définition:

L'énergie cinétique d'une particule M de masse m et de vecteur vitesse $\vec{V}(M)$ est le scalaire E_c défini par:

$$E_c = \frac{1}{2}mV^2(M)\ .$$

2) Théorème:

Le travail de la résultante, $\sum \vec{F}$, de toutes les forces (conservatives et non conservatives) appliquées à un point matériel M, dans un référentiel quelconque R_0, entre la position initiale A et la position finale B, est égale à la variation de son énergie cinétique entre A et B

Démonstration:

Le travail de la résultante des forces, $\sum \vec{F}$, quand la particule se déplace de la position A à la position B, est

$$W_{A\to B}\big|_{R_0} = \int_{AB} \sum \vec{F}.d\overrightarrow{M} = \int m \frac{d\vec{V}(M/R_0)}{dt} d\overrightarrow{M} = \int_{AB} m\vec{V}(M/R_0).d\vec{V}(M/R_0)$$

Car $\quad \overrightarrow{dM} = \vec{V}(M/R_0)dt$

Donc

$$W_{A\to B}\big|_{R_0} = \int_{V(M\equiv A)}^{V(M\equiv B)} d(\frac{1}{2}mV^2(M/R_0)),$$

et

$$W_{A\to B}\big|_{R_0} = \frac{1}{2}mV^2(M\equiv B) - \frac{1}{2}mV^2(M\equiv A).$$

D'où

$$\boxed{W_{A\to B} = E_c(B/R_0) - E_c(A/R_0),}$$

et

$$\boxed{dW = dE_c.}$$

III) Enérgie mécanique.

1) Définition.

On appel énergie mécanique (ou énergie totale) $E_m(M/R_0)$ d'une particule M, la somme de ses énergies cinétique $E_c(M/R_0)$ et potentielle $E_p(M/R_0)$:

$$\boxed{E_m(M/R_0) = E_c(M/R_0) + E_p(M/R_0)}$$

2) **Cas d'un système conservatif.**

Définition.

Une particule M constitue un système conservatif si les seules forces, appliquées à cette particule, qui travaillent au cours du mouvement, dérivent d'un potentiel.

Dans ce cas, nous avons :

$$dW = -dE_p.$$

D'autre part ,

$$dW = dE_c.$$

Donc

$$dE_c = -dE_p \text{ ou } d(E_c + E_p) = dE_m = 0.$$

Par conséquent : $\boxed{E_m = Cte.}$

L'énergie mécanique $E_m(M/R_0)$, d'un système conservatif, reste constante au cours du mouvement et conserve sa valeur initiale.

V) <u>Stabilité d'un équilibre.</u>

Soit un référentiel R(O,xyz), et soit un point matériel M soumis à des forces conservatives dont la résultante $\vec{F}$:

Nous avons, $\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,E_p$.

Donc, $F_x = -\frac{\partial E_p}{\partial x}$, $F_y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}$ et $F_z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}$.

Si le point M est à l'équilibre, $\vec{F} = \vec{0}$ et par conséquent:

$\frac{\partial E_p}{\partial x} = \frac{\partial E_p}{\partial y} = \frac{\partial E_p}{\partial z} = 0$. L'énergie potentielle est donc extrémale (E_p est minimale ou maximale).

On dit que l'équilibre est stable quand le point M est soumis à une force de rappel qui le ramène à sa position d'équilibre. Dans le cas contraire, l'équilibre est dit instable.

a) <u>E_p minimale (équilibre stable).</u>

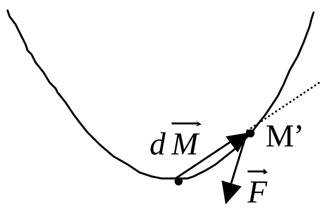
Soit M la position d'équilibre et M' est très voisin de M.

On a: l'énergie potentielle en M', E_p(M'), est supérieure à celle en M, E_p(M).

Hors équilibre, la force exercée pour déplacer la particule de M vers M' est non nulle. Son travail de M vers M' est donné par:

$$dW = \vec{F}.d\overrightarrow{M} = -dE_p < 0.$$

La force $\vec{F}$ est alors une force de rappel. Elle ramène la particule M à sa position d'équilibre.

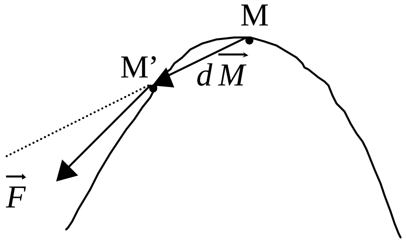


<u>b) Energie potentielle maximale (équilibre instable).</u>

Dans ce cas, l'énergie potentielle de la particule en M' est inférieur à celle en M'. Donc $dE_p < 0$.

Le travail élémentaire effectuer par la force $\vec{F}$ pour déplacer la particule de la position M à la position M' est: $dW = \vec{F}.d\overrightarrow{M} = -dE_p > 0$.

Par conséquent la force $\vec{F}$ tend à éloigner le point M de sa position d'équilibre.



CHAPITRE IV

MOUVEMENTS A FORCE CENTRALE

I) Définition

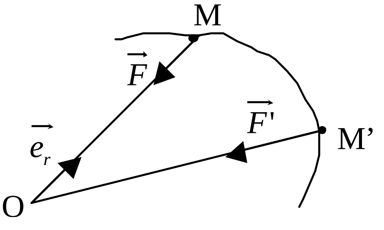
Une force $\vec{F}$ est centrale si sa ligne d'action passe constamment par un point O appelé pôle. Le vecteur position et la force appliquée à la particule sont alors dirigés suivant le même vecteur unitaire $\vec{e}_r$ relatif aux coordonnées polaires de M.

Nous avons alors,

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r\,,$$

et

$$\vec{F} = F.\vec{e}_r \quad \text{(force radiale).}$$



Donc le moment de la force $\vec{F}$ par rapport au point O est: $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$.

Exemples de forces centrales:

- Force d'interaction gravitationnelle entre deux masses m et M distantes de r:

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{r^2}\vec{e}_r\,.$$

  Où G désigne la constante d'attraction universelle.

- Force d'interaction électrostatique entre deux particules de charges électrostatiques q_1 et q_2 distantes de r:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_1}{r^2}\vec{e}_r\,.$$

ε_0 est la permittivité du vide.

II) Propriétés des mouvements à force centrale.

- Le moment cinétique de la particule M par rapport à un point fixe O, dans un repère R, est constant.

$$\left.\frac{d(\vec{\sigma}_O(M/R)}{dt}\right|_R = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}\,.$$

  Donc le moment cinétique de M s'écrit:

$$\vec{\sigma}_O(M/R) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(m/R) = m\vec{C} = \overrightarrow{OM}_0 \wedge m\vec{V}_0(m/R)\,,$$

où M_0 et $\vec{V}_0(M/R)$ sont la position et la vitesse initiales de M dans R.

- Si le vecteur $\vec{C}$ est nul, alors le vecteur vitesse $\vec{V}(M/R)$ et le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sont parallèles. Le mouvement est alors rectiligne.
- Si le vecteur $\vec{C}$ est non nul, les vecteurs position $\overrightarrow{OM}$ et vitesse $\vec{V}(M/R)$ appartiennent à un plan perpendiculaire à $\vec{C}$. La trajectoire du point M est alors plane.

- les mouvements à force centrale vérifient la loi des aires:
  En effet, supposons que la trajectoire de la particule M est situé dans le plan (xOy) d'un repère R(O,xyz), nous aurons,

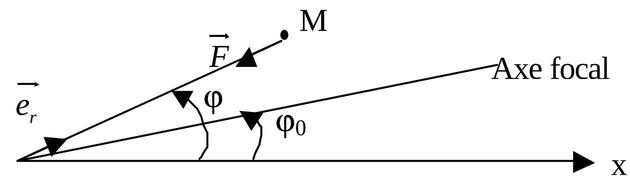
le vecteur position $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$, le vecteur vitesse $\vec{V}(M/R) = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$ et le vecteur moment cinétique $\vec{\sigma}_O(M/R) = mr^2\dot{\varphi}\,\vec{k}$. La constante des aires s'écrit alors,

$$\boxed{C = r^2\dot{\varphi}\,.}$$

- L'énergie cinétique d'une particule M soumise à une force centrale est
$$E_c(M) = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}mC^2\left[(\frac{du}{d\varphi})^2 + u^2\right]$$. C'est ***la première formule de Binet***.
Avec u=1/r.
- La force s'exerçant sur une particule est:
$$\vec{F} = m\vec{\gamma}(M/R) = -mC^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right]\vec{e}_r$$. C'est ***la deuxième formule de Binet.***

III <u>Champ Newtonien.</u>

On considère un axe polaire de référence $\overrightarrow{Ox}$ pris dans le plan de la trajectoire, et repérons la position du point matériel M par ses coordonnées polaires (r,ö).



Un champ Newtonien est un champ de forces dont l'expression est de la forme:

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r = -k\frac{\vec{r}}{r^3}.$$ K est une constante.

Si la constante k est positive, la force est attractive.
Si k est est négative la force est répulsive.
La force $\vec{F}$ étant centrale. Donc,

$$\begin{cases} \vec{F} = -mC^2u^2\left[\dfrac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right]\vec{e}_r \\ \vec{F} = -\dfrac{k}{r^2}\vec{e}_r = -ku^2\,\vec{e}_r \end{cases}$$

Par conséquent,

$$-mC^2u^2\left[\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u\right] = -ku^2.$$

La solution u = 0 correspond à r infini et ne présente donc aucun intérêt.

Il reste alors: $$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{k}{mC^2}.$$

C'est une équation différentielle du second ordre à coefficients et second membre constants.
La solution générale de cette équation est la suivante:

$$u(\varphi) = u_0\cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{k}{mC^2},$$

où $u_0 \cos(\varphi - \varphi_0)$ est al solution de l'équation sans membre et $\dfrac{k}{mC^2}$ est la solution particulière de l'équation différentielle ci-dessus.
Les constantes u_0 et φ_0 sont déterminées à partir des conditions initiales.

On pose $P = \dfrac{mC^2}{|k|} = \dfrac{\sigma_O^2}{m|k|}$ ou bien $\dfrac{\varepsilon}{P} = \dfrac{k}{mC^2} = \dfrac{mk}{\sigma_O^2}$ et $e = Pu_0$,
avec $\varepsilon = +1$ si $k > 0$, et $\varepsilon = -1$ si $k < 0$.

L'équation de la trajectoire de la particule M s'écrit donc,

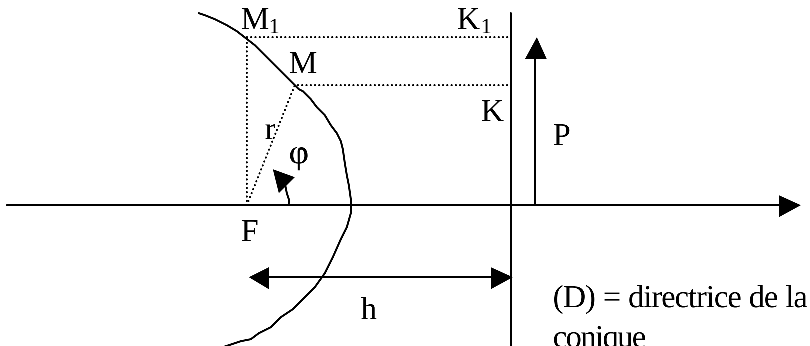
$$u(\varphi) = \frac{e}{P}\cos(\varphi - \varphi_0) + \frac{\varepsilon}{P} \quad \text{ou bien} \quad r(\varphi) = \frac{P}{\varepsilon + e\cos(\varphi - \varphi_0)}.$$

C'est l'équation en coordonnées polaires d'une conique de paramètre P et d'excentricité e, dont l'axe focal fait un angle φ_0 avec l'axe polaire et dont l'un des foyers coïncide avec le point O.

N.B.
Dans la suite de ce chapitre, nous prendrons $\varphi_0 = 0$ et $\varepsilon = +1$ (cas des forces attractives correspondant au mouvement des planètes et des satellites du système solaire). L'équation de la trajectoire se réduit donc à:

$$r(\varphi) = \frac{P}{1 + e\cos\varphi}.$$

1) Recherche de l'équation de la conique par la méthode géométrique.



L'excentricité de la conique est donnée par: $e = \dfrac{MF}{MK}$.

Donc $\quad MK = \dfrac{MF}{e} = \dfrac{r}{e} = h - r\cos\varphi$.

Or $\quad \dfrac{P}{h} = e$ et donc $h = \dfrac{P}{e}$.

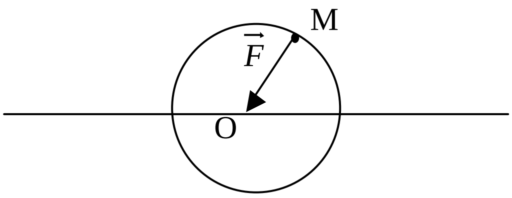
D'où $\quad \dfrac{r}{e} = \dfrac{P}{e} - r\cos\varphi \quad$ ou bien $\quad r = \dfrac{P}{1 + e\cos\varphi}$.

2) Classification de la trajectoire de M en fonction de son excentricité e.

a) e = 0.

r(ö) = P = R, la trajectoire de la particule est un cercle de centre O et de rayon

$$R = P = \frac{mC^2}{k}.$$



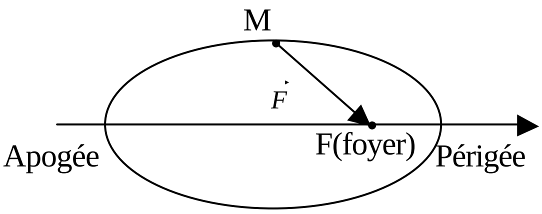
b) 0 < e < 1. La trajectoire de M est une ellipse.

- Dans le cas d'une orbite autour de la terre:

- Le périgée est le point le plus rapproché de la terre. Il correspond à ö = 0 et donc
  $$r_p = \frac{P}{1+e} = r_{\min}.$$
- L'apogée est le point le plus éloigné de la terre. Il est donné pour ö = ð et
  $$r_A = \frac{P}{1-e} = r_{\max}.$$

- Dans le cas d'une orbite autour du soleil:

- le périhélie est le point le plus proche du soleil.
- L'aphélie est le point le plus éloigné du soleil.



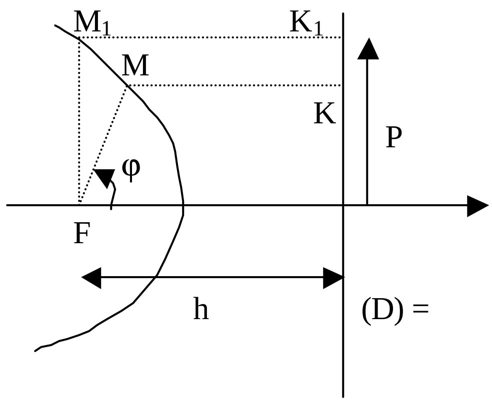
c) e = 1. La trajectoire du point M est une parabole.

$$r = \frac{P}{1+\cos j}$$

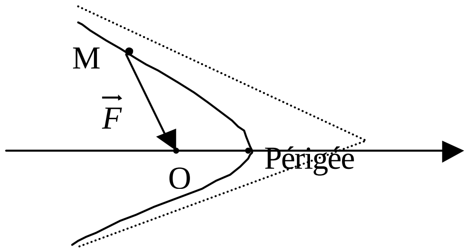
L'angle ö = 0 correspond à $r_p = \frac{P}{2}$,

et $e = \frac{FM}{MK} = 1$.

Pour ö = ð/2, P = r = FM_1.



d) e> 1. La trajectoire de M est une hyperbole. Dans un tel cas, seule une branche de l'hyperbole pourrait être parcourue puisque le mobile ne pourrait pas passer d'une branche à l'autre.



3) Classification de la nature de la trajectoire du point M en fonction de son énergie mécanique.

Soit une particule M, de masse m, soumise de la part de l'origine O d'un référentiel galiléen R_0 à une force attractive:

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r .$$

La force $\vec{F}$ est conservative, elle peut donc s'écrire:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad}\,E_p(M) .$$

Dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$, nous avons:

$$\begin{cases} -\dfrac{k}{r^2} = -\dfrac{\partial E_p(r)}{\partial r} & (1) \\ 0 = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial E_p(r)}{\partial \varphi} & \Rightarrow \quad E_p(r) = ind\acute{e}pendant\ de\ \varphi . \end{cases}$$

L'équation (1) montre que l'énergie potentielle peut s'écrire :

$$E_p(r) = -\frac{k}{r} + cte.$$

La constante est nulle si l'énergie potentielle est nulle à l'infini.
L'énergie cinétique est déduite de la première formule de Binet :

$$E_c(M) = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}mC^2\left[(\frac{du}{d\varphi})^2 + u^2\right]$$

Avec

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1+e\cos\varphi}{P}.$$

L'énergie cinétique est alors,

$$E_c(M) = \frac{1}{2}mC^2\left[\frac{e^2}{P^2}\sin^2\varphi + \frac{(1+e\cos\varphi)^2}{P^2}\right] = \frac{k}{2P}(e^2+1+2e\cos\varphi).$$

Car

$$\frac{mC^2}{P} = k.$$

L'énergie potentielle,

$$E_P = -\frac{k}{r} = -ku = -\frac{k}{P}(1+e\cos\varphi).$$

Finalement, l'énergie mécanique du point M est,

$$E_m = -\frac{k}{2P}(1-e^2).$$

Cette expression montre que E_m est constante et égale à

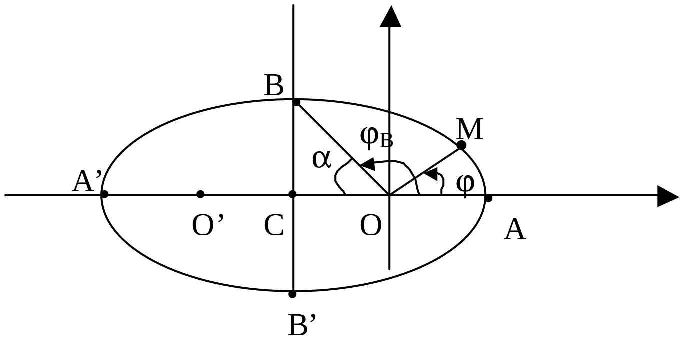
$$E_m = \frac{1}{2}mV_0^2 - \frac{k}{r_0} = Cte.$$

Les conditions initiales $\vec{r}_0$ et $\vec{V}_0$ déterminent E_m et le moment cinétique $\vec{\sigma}_0$ ($\vec{\sigma}_0 = \vec{r}_0 \wedge m\vec{V}_0$).

La nature de la trajectoire de la particule M dépendra donc de la valeur de son énergie mécanique $E_m(M/R_0)$:

- e = 0, $E_m = -k/2P < 0$, la trajectoire de M est un cercle.
- 0 < e < 1, $-k/2P < E_m < 0$, la trajectoire de M est une ellipse.
- e = 1, $E_m = 0$, la trajectoire est une parabole.
- e > 1, $E_m > 0$ la trajectoire de M est une hyperbole.

4) caractéristiques de la trajectoire elliptique.



Soient : a = CA = C'A'.
b = CB = CB'.
c = OC = O'C.

L'équation de la conique est:

$$r = \frac{P}{1+e\cos\varphi}.$$

$$\varphi = 0 \;\Rightarrow\; r_{\min} = \frac{P}{1+e}.$$

$$\varphi = \pi \;\Rightarrow\; r_{\max} = \frac{P}{1-e}.$$

$$r_{\min} + r_{\max} = 2a = \frac{P}{1+e} + \frac{P}{1-e} \Rightarrow \boxed{P = a(1-e^2).}$$

$$r_{\min} - r_{\max} = 2c = \frac{P}{1-e} - \frac{P}{1+e} \Rightarrow \boxed{P = \frac{c}{e}(1-e^2).}$$

D'où

$$\boxed{e = \frac{c}{a}.}$$

Pour,

$$\varphi = \varphi_B \Rightarrow r_B = \frac{P}{1+e\cos\varphi_B} = \frac{P}{1-e\cos\alpha} = \frac{P}{1-\frac{c}{a}\frac{c}{r_B}}.$$

Donc,

$$P = r_B - \frac{c^2}{a} \Rightarrow r_B = a(1-e^2) + ae^2 = a \Rightarrow \quad r_B = a.$$

et

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2.}$$

On en déduit encore que

$$\frac{b^2}{a} = a - \frac{c^2}{a} = a(1 - \frac{c^2}{a^2}) = a(1-e^2) = P.$$

Par conséquent,

$$\boxed{P = \frac{b^2}{a}.}$$

IV) **Troisième loi de Kepler.**

On considère une particule M soumise à une force attractive et dont l'énergie mécanique est telle que:

$$-\frac{k}{2P} < E_m < 0.$$

La trajectoire du point M est alors elliptique.
Avant d'établir la troisième loi de Kepler, nous rappelons ses deux premières lois:

- **1ère loi de Kepler:**

Le mouvement d'un point matériel M est périodique de période T.

- **2ère loi de Kepler**:

Le rayon vecteur dans le cas d'un mouvement à force centrale balaye des aires égales pendant des intervalles de temps égaux:

$$S = \frac{C}{2}t + S_0.$$

La vitesse aréolaire du point M est:

$$A = \frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}C = \frac{\Delta S}{T} = \frac{\pi ab}{T}. \quad (\text{avec } \Delta S = S - S_0)$$

Donc

$$A^2 = (\frac{\pi ab}{T})^2 = \frac{C^2}{4}.$$

a et b sont respectivement le demi-petit et le demi-grand axe de l'ellipse.
En tenant compte de

$$P = \frac{mC^2}{k} \quad ,$$

nous écrivons,

$$A = \frac{P}{4}\frac{k}{m} = \left(\frac{\pi ab}{T}\right)^2.$$

Sachant que,

$$P = \frac{b^2}{a},$$

nous aurons,

$$T^2 = \left(\frac{4mp^2}{k}\right)a^3 .$$

C'est ***la troisième loi de Kepler.***

Donc le carré de la période, T^2, est proportionnelle au cube de demi-grand axe de l'ellipse.

V) <u>Satellites artificiels.</u>

1) <u>Vitesse de libération V_l.</u>

Soit un engin spatial de masse m tel que son énergie mécanique E_m est:

$$E_m = \frac{1}{2}mV_0^2 + (-\frac{GM_T m}{r_0}),$$

où M_T désigne la masse de la terre et r_0 est la distance de la terre à l'engin.
D'autre part , l'énergie mécanique s'écrit,

$$E_m = -\frac{k}{2P}(1-e^2). \qquad \text{Avec } k = GM_T m.$$

Nous rappelons que,

- si Em < 0, la trajectoire de l'engin est circulaire ou elliptique (0 < e < 1).
- si Em > 0, la trajectoire du satellite est hyperbolique (e > 1).
- si Em = 0 (e = 1), la trajectoire du satellite est parabolique. Ce qui correspond à une vitesse initiale V_0 telle que:

$$V_0 = \sqrt{\frac{2GM_T}{r_0}} = V_l .$$

V_l est appelé vitesse de libération du satellite. Cette vitesse dépend de l'altitude du satellite et du rayon de la terre.
Par conséquent,

- si la vitesse initiale de l'engin est supérieure ou égale à sa vitesse de libération, sa trajectoire est parabolique ou hyperbolique et donc celui-ci s'éloigne indéfiniment de la terre.
- si $0 < V_0 < V_l$, la trajectoire du satellite est fermée. Celle-ci est circulaire ou elliptique.

<u>Exemples:</u>

a) Au niveau du sol terrestre: $r_0 \approx 6400km$, donc $V_l \approx 11.2km/s$.

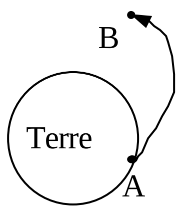
b) Au niveau du sol lunaire: $r_0 \approx 1700km$, ce qui correspond à $V_l \approx 2.4km/s$.

Cette dernière vitesse est comparable à la vitesse de l'agitation thermique des molécules gazeuses, ce qui explique l'absence de l'atmosphère au niveau de la lune.

2) <u>Mise sur orbite d'un satellite.</u>

C'est une opération qui se déroule en deux étapes:

i) Lancement à partir d'une station terrestre A.
En A, le lancement se fait avec une vitesse $0 < V_0 < V_l$ (c'est la phase balistique).



ii) La satellisation (mise sur orbite) se fait en B grâce à une deuxième accélération qui fournira l'accroissement nécessaire de la vitesse.
B est généralement le périgée de l'ellipse.

VI) <u>Satellite géostationnaire.</u>

Un satellite géostationnaire est un satellite qui paraît fixe pour un observateur terrestre.
C'est donc un engin qui a la même vitesse de rotation que celle de la terre.
Le principe fondamental de la dynamique donne:

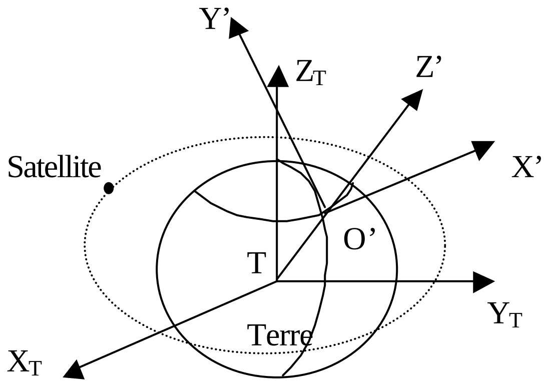
$$F = M\,\tilde{a}(M)$$

Qui se traduit par,

$$m\frac{GM_T}{r_0^2} mg = m\frac{V_0^2}{r_0}$$ (la force de gravitation équilibre la force centrifuge).

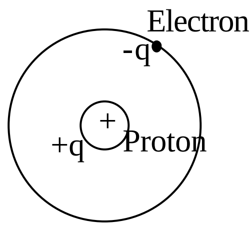
Donc,

$$V = \sqrt{\frac{GM_T}{r_0}} = \frac{V_l}{\sqrt{2}}$$, ce qui correspond bien à $V_0 < V_l$.



VI) <u>Atome d'hydrogène. Modèle de BOHR.</u>

L'atome d'hydrogène est formé d'un électron qui tourne autour d'un proton.
Classiquement, cet électron doit perdre de l'énergie Sous forme de rayonnement électromagnétique et "tombe" sur le proton. Or cette situation ne se Produit pas.



<u>Modèle de Bohr (modèle semi-classique).</u>

Bohr a supposé que l'électron tourne autour du proton sur des orbites circulaires ayant des rayons bien définis, et il postule:
Le moment cinétique de l'électron par rapport au centre du cercle s'écrit.

$$\sigma_O = n\frac{h}{2\pi} = n\bar{h}.$$

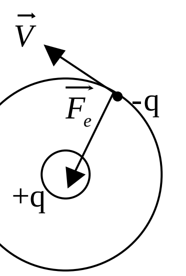
Où n est un entier naturel non nul et $h \approx 6.62\times10^{-34}\ J.s$ est la constante de Planck.

<u>Calcul des rayons des cercles de Bohr:</u>

Nous avons,

$$\sigma_O = n\frac{h}{2\pi} = mVr \quad \Rightarrow \qquad r = \frac{nh}{2\pi}.\frac{1}{mV},$$

d'une part.
D'autre part,
Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'électron est:



$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2} = m\frac{V^2}{r}.$$

Finalement, le rayon de l'orbite de l'électron est:

$$\boxed{r_n = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi q^2 m}.n^2.}$$

Pour 1ère orbite de Bohr: n = 1, $r_1 \approx 0.53\,\overset{o}{A}$. ($1\overset{o}{A} = 10^{-10}\,m$).

Pour n = 2, $r_2 = 4\times r_1$.

<u>Calcul de l'énergie E de l'électron sur les orbites de Bohr:</u>

On a: $E = -\dfrac{k}{2P(1-e^2)}$.

Dans le cas du cercle (e = 0): $E = -\dfrac{k}{2P}$, avec $P = \dfrac{\sigma_0^2}{mk}$,

Donc $E = -\dfrac{mk^2}{2\sigma_0^2}$.

L'électron est soumis de la part du proton à une force électrostatique:

$$\vec{F}_e = \frac{(-q)(+q)}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r^2}\vec{e}_r.$$

$\vec{F}_e$ une force newtonienne avec $k = \dfrac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}$.

D'où, l'énergie de l'électron s'écrit,

$$E = -\frac{mq^4}{16\varepsilon_0^2\pi^2}\cdot\frac{1}{2}\frac{4\pi^2}{n^2h^2} = -\frac{mq^4}{8\varepsilon_0^2\pi^2}\frac{1}{n^2}.$$

Donc l'énergie de la particule dépend de l'entier n et s'écrit,

E = E(n) $\Rightarrow$ $E_n = -Cte.\dfrac{1}{n^2}$.

On pose

$$E_n = -\frac{hRc}{n^2}.$$

<u>Constantes numériques:</u>

$R = \dfrac{mq^4}{8\varepsilon_0^2h^3c} = 1.0973\times10^7\,m^{-1}$. (constante de Rhydberg).

$c = 3\times10^{+8}\,m/s$. (célérité de la lumière.)

$\varepsilon_0 = 8.86\times10^{-12}\,F/m$. (permittivité du vide).

$m = 0.9\times10^{-30}\,kg$. (masse de l'électron).

Pour n = 1: E_1 = - 13.6 eV.

Pou n = 2: $E_2 = \dfrac{E_1}{2} = -\dfrac{13.6}{2}eV$ …

CHAPITRE 5:

OSCILLATEURS HARMONIQUES.

A) Oscillateurs libres.

I) Définition:

Un oscillateur harmonique est tout système mécanique dont la position q(t), la vitesse $\frac{dq(t)}{dt}$ et l'accélération $\frac{d^2q(t)}{dt^2}$ sont des fonctions sinusoïdales du temps.

La variable q(t) obeit à la relation:

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \omega_0^2 q(t) = 0.$$

C'est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants et sans second membre. Son équation caractéristique est:

$$r^2 + \omega_0^2 = 0.$$

La solution de cette équation est de la forme:

$q(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$ ou $q(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$,

où A, ω_0 et φ sont, respectivement, l'amplitude, la pulsation et la phase de l'oscillation.

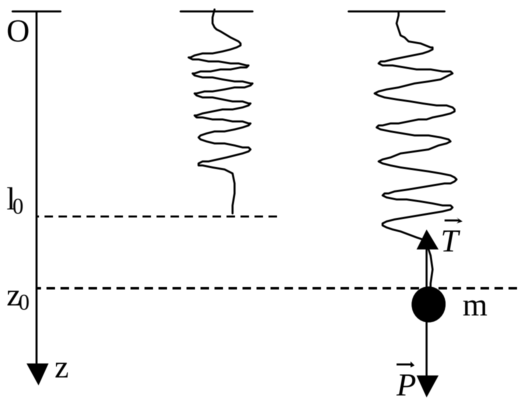
A et φ sont déterminées à partir des conditions initiales.

La période de l'oscillation est définie par: $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, et la fréquence par: $f = \frac{1}{T}$.

II) Système masse-ressort.

a) masse au repos.

Soit un ressort de masse supposée négligeable devant la masse m qui lui est accrochée.



A l'équilibre, le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse m s'écrit:

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}.$$

$\vec{P}$ est le poids de la masse m.

$\vec{T}$ est la force de rappel du ressort.

La projection de l'équation vectorielle ci-dessus sur l'axe $\overrightarrow{Oz}$ donne: mg + T = 0.

T = -K(z_0 – l_0) (loi de Hooke). l_0 est la longueur du ressort à vide est z_0 est la longueur de celui-ci à l'équilibre. K est la constante de raideur (ou d'élasticité) du ressort.

D'où $\boxed{mg = K(z_0 - l_0).}$

b) <u>Masse en mouvement.</u>

Dans ce cas, la masse m sera repérée par rapport à l'axe $\overrightarrow{Oz}$ par z(t). L'équation du mouvement de la masse m est:

$mg - K(z(t) - l_0) = m\ddot{z}(t)$, qui peut encore s'écrie:

$$mg - K(z(t) - z_0 + z_0 - l_0) = mg - K(z_0 - l_0) - K(z(t) - z_0) = m\ddot{z}(t) .$$

Il reste :

$$\ddot{z} + \frac{K}{m}(z - z_0) = 0. \qquad (1)$$

Posons $Z = z - z_0$.

L'équation (1) devient:

$$\boxed{\ddot{Z} + \frac{K}{m} Z = 0 .} \qquad (2)$$

Z désigne l'écart par rapport à la position d'équilibre.

c) <u>Energie mécanique.</u>

Les deux forces $\vec{P}$ et $\vec{T}$ mises eu jeu sont conservatives:

$\vec{P}$ et $\vec{T}$ sont portées par l'axe $\overrightarrow{Oz}$:

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{P} = \overrightarrow{rot}\,\vec{T} = \vec{0} .$$

D'où $\vec{P} = -\vec{\nabla} E_{P_1}$ et $\vec{T} = -\vec{\nabla} E_{P_2}$.

Les énergies potentielles E_{P_1} et E_{P_2} dont dérivent les forces $\vec{P}$ et $\vec{T}$ sont respectivement:

$$E_{P_1} = -mgz + A_1 \qquad \text{et} \qquad E_{P_2} = K\left(\frac{z^2}{2} - l_0 z + A_2\right) = \frac{K}{2}(z - l_0)^2 + A_3 .$$

A_1, A_2 et A_3 sont des constantes d'intégration.

L'énergie potentielle du système est:

$$E_P = E_{P_1} + E_{P_2} = -mgz + \frac{K}{2}(z - l_0)^2 + A_4 . \qquad \text{Avec } A_4 = A_1 + A_3.$$

Pour déterminer la constante A_4, on prendra l'énergie potentielle E_p nulle à l'équilibre :

$E_p(z_0) = 0$ donne :

$$A_4 = mgz_0 - \frac{K}{2}(z_0 - l_0)^2.$$

D'où,

$$E_p = \frac{1}{2}K(z - z_0)^2 = \frac{1}{2}KZ^2 .$$

L'énergie cinétique du système est :

$$E_c = \frac{1}{2}mV^2 = \frac{1}{2}m\dot{Z}^2 .$$

Le système masse-ressort est un système conservatif. Son énergie mécanique reste constante.

Donc :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{Z}^2 + \frac{1}{2}KZ^2 = Cte.$$

D'où

$$\frac{dE_m}{dt} = m\dot{Z}\ddot{Z} + KZ\dot{Z} = 0\ ,$$

et

$$\ddot{Z} + \frac{K}{m}Z = 0\ ,$$

qui peut s'écrire aussi,

$$\ddot{Z} + \omega_0^2 Z = 0\ . \qquad (2)$$

La pulsation de l'oscillateur libre est:

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m}.$$

La solution de l'équation (2) est de la forme : $Z(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$.

Par conséquent, l'énergie mécanique du système masse-ressort s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2}KA^2.$$

Cette énergie est proportionnelle au carré de l'amplitude des oscillations.

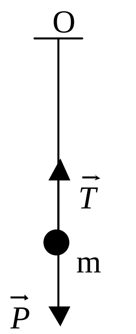
La période des oscillations est indépendante de l'amplitude A et s'écrit :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}.$$

III) <u>Pendule simple.</u>

On considère un fil inextensible de masse négligeable par rapport à m. La masse est accrochée à l'une des extrémités du fil, l'autre extrémité est fixée en un point O.

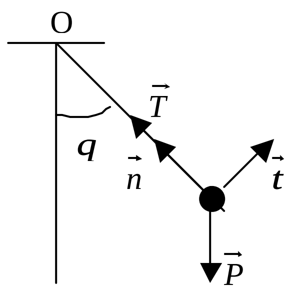
a) <u>Pendule à l'équilibre.</u>



A l'équilibre, la somme vectorielle du poids $\vec{P}$ de la masse m et de la tension $\vec{T}$ du fil est nulle :

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}.$$

b) <u>Pendule hors équilibre.</u>



Le principe fondamental de la dynamique S'écrit :

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{g}.$$

La projection de cette équation vectorielle sur les axes du trièdre de Serret-Frenet donne les deux équations scalaires suivantes.

$$\begin{cases} -mg\sin\theta = m\gamma_t = m\dfrac{dV}{dt} = m\dfrac{d^2s}{dt^2} & (1) \\ T - mg\cos\theta = m\gamma_n = m\dfrac{V^2}{l} & (2) \end{cases}$$

Où S est l'abscisse curviligne du mouvement. L est la longueur du fil = rayon de courbure de la trajectoire de la particule.
Dans le cas des faibles oscillations, sinθ voisin de θ, l'équation (1) donne :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0.$$

Cette équation différentielle a pour solution : $\theta(t) = \sin(\omega_0 t + \varphi)$.
Où

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad et \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

T_0 désigne la période des oscillations.

B) **<u>Oscillateurs amortis par un frottement fluide.</u>**

Dans cette partie, nous tenons compte des forces de frottement de la masse avec le fluide.
Il existe deux types de frottements :

- Frottements solides où la force de frottement est une constante.
- Frottements fluides (ou visqueux) où la force de frottement est proportionnelle au vecteur vitesse de la masse m.

$$\vec{F}_f = -K'\vec{V}.$$

K' est le coefficient de frottement. K' est positif.
Le signe (-) qui apparaît dans l'expression de la force de frottement traduit le fait que cette force s'oppose au mouvement.
Dans le cas unidimensionnel, nous avons

$$\vec{V} = \dot{z}\,\vec{k}.$$

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au système masse-ressort amorti par un frottement fluide est :

$$m\ddot{z} = -KZ - K'\dot{Z} \quad \Rightarrow \quad \ddot{z} + \frac{K'}{m}\dot{Z} + \frac{K}{m}Z = 0.$$

C'est une équation différentielle du second ordre, linéaire, à coefficients constants et sans second membre.
On pose:

$$\frac{K}{m} = \omega_0^2, \qquad \text{avec} \quad \omega_0 = \text{pulsation propre de l'oscillateur,}$$

$$\text{et} \quad \frac{K'}{m} = 2\lambda\omega_0, \quad \text{où } \lambda \text{ est le coefficient d'amortissement.}$$

L'équation différentielle du mouvement du point M devient alors:

$$\ddot{Z} + 2\lambda\omega_0\dot{Z} + \omega_0^2 Z = 0,$$

dont l'équation caractéristique est:

$$r^2 + 2\lambda\omega_0 r + \omega_0^2 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est: $\Delta' = \omega_0^2(\lambda^2 - 1)$.

Nous avons donc trois cas à distinguer:

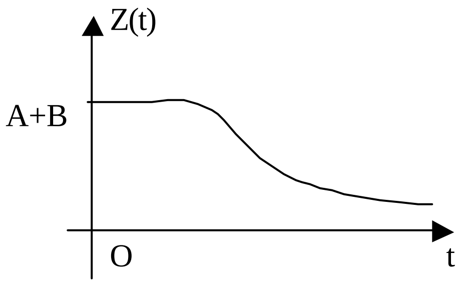
a) Ä' > 0 (ou ë > 1):

Les deux racines de l'équation caractéristique ci-dessus sont:

$$\begin{cases} r_1 = -l w_0 + w_0 \sqrt{l^2 - 1} \ . \\ r_2 = -l w_0 - w_0 \sqrt{l^2 - 1} \ . \end{cases}$$

La solution de l'équation du mouvement du point M est donc,

$$Z(t) = e^{-l w_0 t} \left[A e^{w_0 \sqrt{l^2 - 1} t} + B e^{-w_0 \sqrt{l^2 - 1} t} \right] ,$$



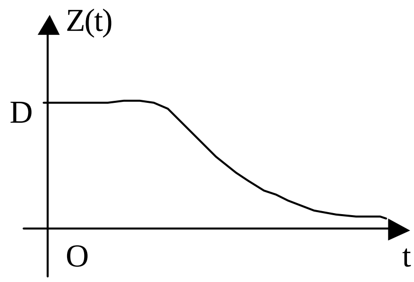
A et B sont des constantes à déterminer à partir des conditions initiales.
Quand $t \to \infty$, $Z(t) \to 0$.
Dans ce cas, il n y a pas d'oscillations autour de la position d'équilibre. Il y a retour à l'équilibre après un temps suffisamment grand.
Le régime est ***apériodique***.

b) Ä' = 0 (ou ë = 1):

$r_1 = r_2 = r = -w_0$.

La solution de l'équation différentielle du mouvement est:

$$Z(t) = e^{-w_0 t} (Ct + D) .$$



Dans ce cas, le retour à l'équilibre se fait De manière plus rapide que dans le régime apériodique.
C'est le régime ***apériodique-critique.***

c) Ä' < 0 (ou 0 < ë < 1):

Les racines de l'équation caractéristique sont:

$$\begin{cases} r_1 = -l w_0 + i w_0 \sqrt{1 - l^2} = - l w_0 + i w. \\ r_2 = -l w_0 - i w_0 \sqrt{1 - l^2} = - l w_0 - i w. \end{cases}$$

Où i est le nombre complexe ($i^2 = -1$) et $w = w_0 \sqrt{1 - l^2}$ désigne la pseudo-période de l'oscillateur étudié.

La solution Z(t) s'écrit alors:

$$Z(t) = e^{-l w_0 t} (C_1 e^{iwt} + C_2 e^{-iwt}) .$$

C_1 et C_2 sont des constantes qu'on déterminera à partir des conditions initiales.

Cette solution peut encore s'écrire sous la forme,

$$Z(t) = e^{-l w_0 t} A_1 \sin(wt + j) .$$

$A_1 e^{-l w_0 t}$ et ö sont respectivement l'amplitude et la phase de l'oscillation.

Le régime est ***pseudo-périodique***.

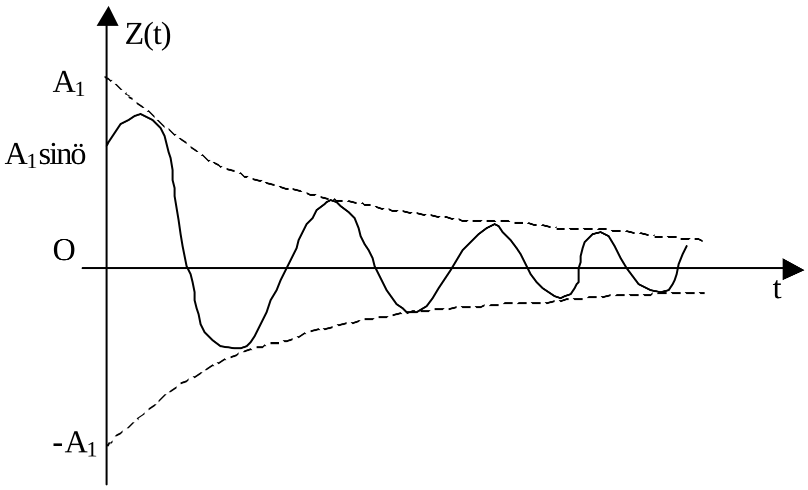
La pseudo-période des oscillations est:

$$T = \frac{2p}{w} = \frac{2p}{w_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - l^2}} \, .$$

Ou bien, $T = \dfrac{T_0}{\sqrt{1 - l^2}}$,

avec $T_0 = \dfrac{2p}{w_0}$. (T_0 est la pulsation propre de l'oscillateur).

La pseudo-période est donc supérieure à la période propre de l'oscillateur ($T > T_0$).



Décrément logarithmique.

Nous avons:

$$Z(t) = e^{-lw_0t} A_1 \sin(wt + j) \, ,$$

et

$$Z(t+T) = e^{-lw_0(t+T)} A_1 \sin(wt + j) \, .$$

On défini le décrément logarithmique ä par le rapport suivant:

$$e^{-d} = \frac{Z(t+T)}{Z(t)} = e^{-lw_0t} \, .$$

Donc,

$$d = lw_0T = \ln\left(\frac{Z(t)}{Z(t+T)}\right) .$$

Le décrément logarithmique caractérise la décroissance des élongations à chaque période.

Remarque:

Le décrément logarithmique peut aussi s'écrire,

$$d = lw_0T = lw_0 \cdot \frac{2p}{w_0} \frac{1}{\sqrt{1 - l^2}} = \frac{2pl}{\sqrt{1 - l^2}} \, .$$

CHAPITRE 6.

CHOCS DE DEUX PARTICULES.

I) Définition.

On appelle choc ou collision entre deux particules, toute interaction qui entraîne une variation brusque et finie des vecteurs vitesses des deux particules pendant un temps très court.

II) Conservation de la quantité de mouvement.

Soient m_1 et m_2 les masses respectives des particules M_1 et M_2 dans un référentiel galiléen R_0. et soient:

- $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ les vitesses respectives de M_1 et M_2 dans le repère R_0 avant le choc.
- $\vec{V'}_1$ et $\vec{V'}_2$ les vitesses respectives de M_1 et M_2 dans le repère R_0 après le choc.
- $\vec{F}_{21}$ et $\vec{F}_{12}$ les forces transitoires appliquées respectivement à M_1 et à M_2 uniquement pendant le choc.

Les forces de réaction $\vec{F}_{21}$ et $\vec{F}_{12}$ qui apparaissent pendant le choc sont très importantes, comparées aux forces extérieures appliquée à M_1 et M_2.

Hypothèse fondamentale:

On admettra que les forces $\vec{F}_{21}$ et $\vec{F}_{12}$ vérifient le principe d'action et de la réaction: $\vec{F}_{21} + \vec{F}_{21} = \vec{0}$.

D'où $\vec{F}_{21} + \vec{F}_{21} = \dfrac{d\vec{P}_1}{dt} + \dfrac{d\vec{P}_2}{dt} = \dfrac{d(\vec{P}_1 + \vec{P}_2)}{dt} = \vec{0}$.

Donc

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P'}_1 + \vec{P'}_2 = \overrightarrow{Cte} \ , \quad (1)$$

avec

$$\vec{P}_1 = m_1\vec{V}_1 , \quad \vec{P}_2 = m_2\vec{V}_2 \ , \quad \vec{P'}_1 = m_1\vec{V'}_1 \ \text{ et } \ \vec{P'}_2 = m_2\vec{V'}_2 .$$

L'équation (1) montre que la quantité de mouvement du système (S), formé de M_1 et de M_2, se conserve (quantité de mouvement du système est la même avant et après le choc).

Remarque:

Au moment de la collision entre les particules M_1 et M_2 , les forces extérieures au système (S) sont généralement négligeables devant les forces intérieures à ce système que sont les forces de contact. (S) peut alors être considéré comme système isolé.

Dans le cas d'un système isolé, le principe fondamental de la dynamique appliqué à celui-ci dans le repère R_0 est comme suit:

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\vec{g}(S) = (m_1 + m_2)\vec{g}(S) = \frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0}.$$

Donc,

$$\vec{P} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P'}_1 + \vec{P'}_2 = \overrightarrow{Cte}.$$

I) Collisions élastiques et inélastiques:

a) Collisions élastiques:

Par définition, la collision entre deux particules M_1 et de M_2 est dite parfaitement élastique si l'énergie cinétique du système(S) des deux particules avant le chocs est égale à l'énergie cinétique totale de ce système après le choc.

Nous avons alors:

$$\frac{1}{2}m_1V_1^2+\frac{1}{2}m_2V_2^2=\frac{1}{2}m_1V'^2_1+\frac{1}{2}m_2V'^2_2 .$$

b) Collision inélastique:

Dans ce cas, il n'y a pas de conservation de l'énergie cinétique du système durant la collision.

Le bilan énergétique s'écrit:

$$\frac{1}{2}m_1V_1^2+\frac{1}{2}m_2V_2^2=\frac{1}{2}m_1V'^2_1+\frac{1}{2}m_2V'^2_2+U ,$$

où

U est la variation de l'énergie cinétique du système(S) avant et après le choc.

Si $U < 0$, le système absorbe de l'énergie (le choc est endoénergétique).

Si $U > 0$, le système cède de l'énergie (le choc est exoénergétique).

c) Choc mou.

- Avant le choc, la particule M_1 a la masse m_1 et la vitesse $\vec{V}_1$ et la particule M_2 a la masse m_2 et la vitesse $\vec{V}_2$.
- Après le choc, les deux masses M_1 et M_2 constituent un seul corps de masse $(m_1 + m_2)$ et de vitesse $\vec{V}$.

La conservation de la quantité de mouvement s'écrit dans ce cas,

$$m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = (m_1 + m_2)\,\vec{V} .$$

Au cours de la collision l'énergie cinétique n'est pas conservée. Les pertes apparaissent sous forme de chaleur, de déformation, …

d) Coefficient de restitution.

Le coefficient de restitution (ou d'élasticité) e est le nombre, compris entre 0 et 1, défini par le rapport des vitesses relatives de la particule M_2 par rapport à la particule M_1 (ou de M_1 par rapport à M_2) après le choc, soit:

$$e=\left|\frac{\vec{V}'_1-\vec{V}'_2}{\vec{V}_1-\vec{V}_2}\right|$$

- Si $e = 0$, le choc est mou.
- Si $e = 1$, le choc est élastique.
- Si $0 < e < 1$, le choc est inélastique (ou intermédiaire).

II) Exemples de choc élastiques.

On considère un système (S) de deux particules M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2, dont les vitesses $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ avant le choc deviennent $\vec{V}'_1$ et $\vec{V}'_2$ après le choc.

La conservation de la quantité de mouvement (équation vectorielle) et la conservation de l'énergie cinétique du système (S) donnent quatre équations scalaires pour les six composantes des vitesses inconnues. Les six inconnues sont en général les six composantes des vitesses $\vec{V}'_1$ et $\vec{V}'_2$. Il faut alors fournir d'autres indications supplémentaires pour avoir autant d'inconnues que d'équations scalaires.

1) **<u>Collision élastique directe de deux particules.</u>**

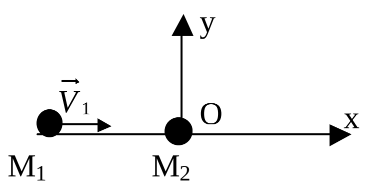
Un choc entre deux particules M_1 et M_2 est appelé "direct", "frontal" ou de "plein fouet" si les vitesses avant et après le choc, $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}'_1$ et $\vec{V}'_2$ sont colinéaires.

Dans ce cas, nous aurons deux équations à deux inconnues:

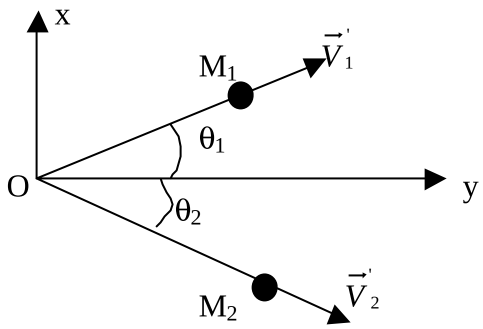
$$\begin{cases} m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 = m_1\vec{V}'_1 + m_2\vec{V}'_2 \\ \dfrac{1}{2}m_1V_1^2 + \dfrac{1}{2}m_2V_2^2 = \dfrac{1}{2}m_1V'^2_1 + \dfrac{1}{2}m_2V'^2_2 \end{cases}$$

2) **<u>Collision de type boules de billard.</u>**

Supposons que la particule M_1 est animée d'une vitesse $\vec{V}_1$ juste avant le choc, dans le repère galiléen R_0, et que la particule M_2 soit immobile. On dit que les particules M_1 et M_2 subissent un choc élastique de type boules de billard, si après le choc, leurs vitesses respectives font des angles θ_1 et θ_2 avec la direction de $\vec{V}_1$.



<u>Avant le choc</u>



<u>Après le choc</u>

- Conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie cinétique du système (S) avant et après le choc:

$$\begin{cases} m_1\vec{V}_1 = m_1\vec{V}'_1 + m_2\vec{V}'_2 \\ m_1V_1^2 = m_1V'^2_1 + mV'^2_2 \end{cases}$$

La projection de l'équation vectorielle ci-dessus sur les trois axes de R_0 donne:

$$\begin{cases} m_1V_1 = m_1V'_1\cos\theta_1 + m_2V'_2\cos\theta_2 \\ 0 = m_1V'_1\sin\theta_1 + m_2V'_2\sin\theta_2 \\ m_1V_1^2 = m_1V'^2_1 + m_2V'^2_2 \end{cases}$$

Nous avons donc trois équations pour quatre inconnues (V'_1, V'_2, θ_1 et θ_2).
Pour avoir le nombre d'équations nécessaires à la recherche des inconnues, nous introduisons le paramètre d'impact P.
Le paramètre P est la distance qui sépare, au moment du choc, le centre de la particule M_1 de l'axe $\overrightarrow{Ox_0}$.
Le paramètre d'impact P est donnée par:

$$P = O_1H = 2r\sin\alpha = 2r\left|\sin\theta\right|.$$

r est le rayon de M_1 et M_2 identiques.
La donnée de P permet de résoudre le problème du nombre d'inconnues.