$1^{\text{ère}}$ partie Chapitre II	Champ électrostatique dans le vide

I. Définition

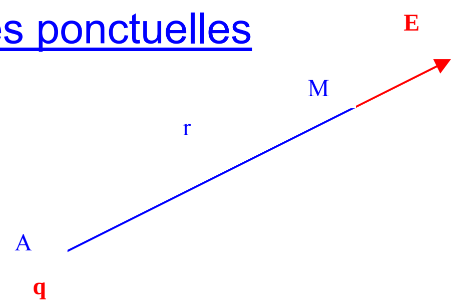
On dit qu'en une région de l'espace existe un champ électrostatique $\vec{E}$ si une charge électrique q placée en un point de cette région est soumise à une force

$$\boxed{\vec{F} = q \times \vec{E} \quad \rightarrow \quad \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}}$$

Si q > 0 $\vec{E}$ et $\vec{F}$ ont même direction et même sens, si q < 0 $\vec{E}$ et $\vec{F}$ ont même direction et de sens opposés.

II. Champ électrostatique crée par des charges ponctuelles

II.1 Champ crée par une charge ponctuelle



Une charge q placé en A crée un champ $\vec{E}$.
Plaçons en M une charge q'. Elle est soumise à une force $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\vec{u} = q'\vec{E}$$

d'où :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}$$

champ crée en M par q

q < 0 $\vec{E}$ dirigé vers q, q > 0 $\vec{E}$ s'éloigne de q

si r → ∞ , $\vec{E}$ → 0, si r → 0, la charge n'est plus considérer ponctuelle.

II.2 Champ crée par plusieurs charges ponctuelles

Chaque charge q_i placée en Ai, crée en M un champ $\vec{E}_i$:

$$\vec{E}_i = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_i}{r_i^2}\vec{u}_i$$

avec $r_i = A_iM$. Le champ résultant en M sera:

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i \rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i^2}\vec{u}_i$$

III. Champ électrostatique crée par une distribution de charges

Pour calculer le champ crée par une distribution de charges, on se ramène au calcul du champ crée par des charges ponctuelles en considérant des charges élémentaires dq.

III.1 Cas d'une distribution de charges linéïque

Un élément de longueur dl en A porte la charge dq = λ.dl assimilable à une charge ponctuelle. dq crée en M un champ :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda.dl}{r^2}\vec{u}$$

Le champ crée en M par toutes les charges du fil sera :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_c \frac{\lambda.dl}{r^2}\vec{u}$$

III.2 Cas d'une distribution de charges surfacique

L'élément de charge dq crée en M un champ :

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\times ds}{r^2}\vec{u}$$

Le champ crée par toutes les charges de la surface sera :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\sigma\times ds}{r^2}\vec{u}$$

III.3 Cas d'une distribution de charges volumique

De même, dans ce cas le champ crée par toutes les charges répartis dans le volume V, sera :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho\times dv}{r^2}\vec{u}$$

Remarque :

- Méthodologie de calcul de $\vec{E}$:
  - décomposer la distribution en éléments de distribution ponctuels".
  - calculer $\overline{dE}$.
  - Calculer $\vec{E} = \int d\vec{E}$

En fait $\vec{E}$ est défini par ses **3 composantes** qu'il faut calculer séparément. plutôt que de calculer les 3 composantes de $\vec{E}$, il peut être plus facile de rechercher **la direction** de $\vec{E}$ puis de calculer simplement son module ; **ceci est possible du fait que le champ $\vec{E}$ "a la symétrie" de la distribution de charge**

IV. Lignes et tube de champ

- Lignes de champ : Une ligne de champ est une courbe tangente au champ électrostatique.

Equation des lignes de champ : si dl est un élément d'une ligne de champ, on a :

$d\vec{l} \,//\, \vec{E} \rightarrow \vec{E} \wedge d\vec{l} = \vec{0}$, cette équation permet d'obtenir les lignes de champ.

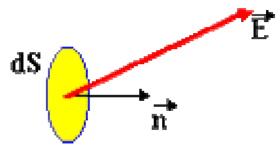
- Tube de champ : La surface formée par l'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur un contour fermé s'appelle tube de champ.

V. Théorème de Gauss

V.1 Flux du champ électrique.

Considérons un élément de surface dS traversé par un champ $\vec{E}$. Par définition le flux élémentaire est donné par :

$$\boxed{d\phi = E.\,dS = E.\,\vec{n}dS}$$



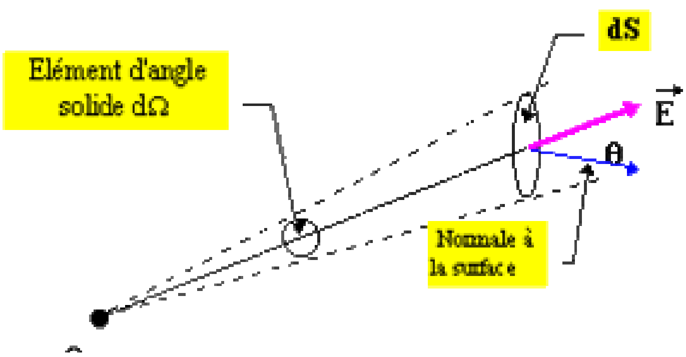
- A travers la surface entière S : $$\boxed{\phi = \iint_S \vec{E}\,.\,d\vec{S}}$$

V.2 Flux du champ E créé par une charge ponctuelle

V.2.1 à travers un élément de surface

$$d\phi = \vec{E}.d\vec{S} = \vec{E}.\vec{n}dS = E \times dS \times \cos\theta$$

$$\boxed{d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{dS \times \cos\theta}{r^2}}$$



Par définition, $\frac{dS \times \cos\theta}{r^2}$ est l'angle solide $d\Omega$ sous lequel, depuis le point O, on voit la surface dS. D'où :

$$\boxed{d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\,d\Omega}$$

Remarque :

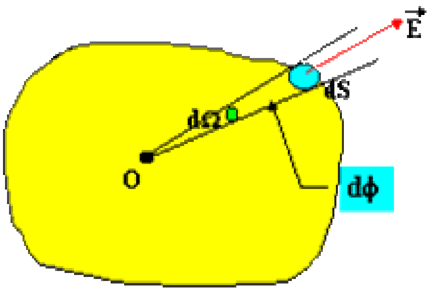
- Si dS appartient à une surface S fermé, $\vec{n}$ est orienté vers l'extérieur de la surface S, le flux de $\vec{E}$ est appelé flux sortant.

- Si $\vec{n}$ est orienté en sens inverse, nous aurions $d\phi = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} d\Omega$

V.2.2 Flux du champ E à travers une surface fermée

- Cas ou la charge q est à l'intérieur à la surface

Comme la surface est fermée, $\vec{n}$ est orienté vers l'extérieur, et le flux de $\vec{E}$ crée par la charge q placé en O est un flux sortant. On a :



$$d\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon 0} d\Omega$$

$$\phi = \iint_S d\phi = \iint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon 0} d\Omega = \frac{q}{4\pi\varepsilon 0} \Omega$$

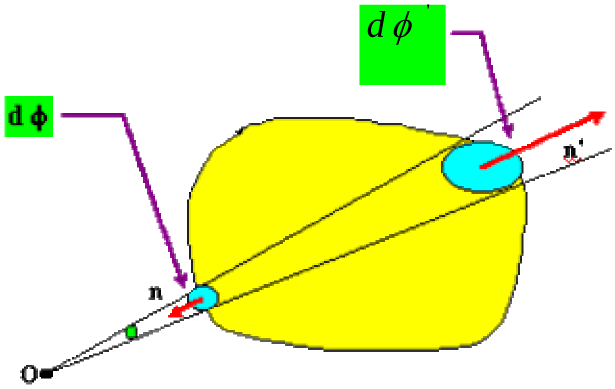
Ω est l'angle solide, sous lequel de O, on voit la surface S. $\Omega = 4\pi$ *stéradians*

d'où :

$$\boxed{\phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}}$$

Cas où la charge q est à l'extérieure de la surface

La charge q est à l'extérieur de la surface fermée S. Le même angle solide $d\Omega$ de sommet O, découpe sur S deux éléments de surface dS et dS' , dont les normales, toutes deux orientées vers l'extérieur de la surface fermée S, sont



D'où : $d\phi = -\frac{q}{4\pi\varepsilon 0}\, d\Omega$ et $d\phi' = \frac{q}{4\pi\varepsilon 0}\, d\Omega$

Le flux total du champ $\vec{E}$ dû à q en O est : dØ + dØ' = O

Pour l'ensemble des couples d'éléments associés (dS, dS') constituant la surface S on a des flux élémentaires qui s'annulent deux à deux. Donc, au total, le flux de $\vec{E}$ à travers S est nul.

Résultat : Enoncé du théorème de Gauss

Considérons un ensemble de charges (ponctuelles ou non) et une surface fermée S. Les charges q_{ext}, situées à l'extérieur de S, créent un champ électrostatique dont le flux à travers S est nul. Les charges q_{int}, à l'intérieur de S, créent un champ dont le flux est égal à $\frac{q_{int}}{\varepsilon_0}$.

D'une manière générale, on écrit :

$$\boxed{\phi = \iint_{S\ fermée} \vec{E}\ .\ d\vec{S} = \frac{\sum q_{int}}{\varepsilon_0}}$$

Application du théorème de Gauss

Le théorème de Gauss permet le calcul du champ $\vec{E}$ plus rapidement que la méthode directe. Pour cela Il faut :
- déterminer la symétrie de la distribution de charge,
- choisir une surface fermée,
- calculer le flux à travers la surface fermée,
- appliquer le théorème de Gauss et en déduire le champ $\vec{E}$.

V.3 Expression locale du théorème de Gauss

Pour une distribution volumique de charge contenue dans un volume V, et ayant une densité volumique ρ le théorème de Gauss devient :

- Flux de $\vec{E}$: $\varphi(\vec{E}) = \oint \vec{E}.d\vec{S} = \iiint div(\vec{E})dv$ d'après le théorème de Green Ostrogradsky,
- Somme des charges : $\Sigma q_{int} = \iiint \rho dv$

$$\varphi(\vec{E}) = \oint \vec{E}.d\vec{S} = \frac{\Sigma q_{int}}{\varepsilon_0} \quad \text{devient} \quad \iiint div(\vec{E})dv = \iiint \frac{\rho}{\varepsilon_0} dv$$

On en déduit : $$\boxed{div(\vec{E}) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

VI. Symétries de distributions de charges : Règles de symétrie

Symétrie plane Une distribution est symétrique par rapport à un plan P, si pour deux points M et M' symétriques par rapport à P, la densité de charge vérifie : $\rho(M) = \rho(M')$.

Dans ce cas le champ électrostatique $\vec{E}$ **est parallèle au plan P.**

Antisymétrie plane Une distribution est antisymétrique par rapport à un plan P, si pour deux points M et M' symétriques par rapport à P, la densité de charge vérifie : $\rho(M) = -\rho(M')$.

Dans ce cas le champ électrostatique $\vec{E}$ **est perpendiculaire au plan P.**

Invariance par translation Si la distribution de charge est invariante dans toute translation parallèle à Oz alors le champ électrostatique $\vec{E}$ ne dépend pas de z (il dépend des autres coordonnées).
Exemples :
- Champ créé par un fil infini d'axe Oz,
- Champ créé par un cylindre infini d'axe Oz

Invariance par rotation Si la distribution de charge est invariante dans toute rotation θ autour de Oz alors le champ $\vec{E}$ ne dépend pas de θ. L'axe Oz est **un axe de symétrie** (axe de révolution).Tout plan contenant cet axe est un plan de symétrie. $\vec{E}$ est porté par l'axe de symétrie.

Symétrie cylindrique Dans une symétrie cylindrique, la distribution de charges est invariante dans toute translation parallèle à Oz et dans toute rotation θ autour de Oz.

En coordonnées cylindriques (ρ,θ,z) le champ électrostatique $\vec{E}$ est parallèle à $\vec{e}_\rho$ ne dépend que de ρ : $\vec{E} = E(\rho)\vec{e}_\rho$

Symétrie sphérique

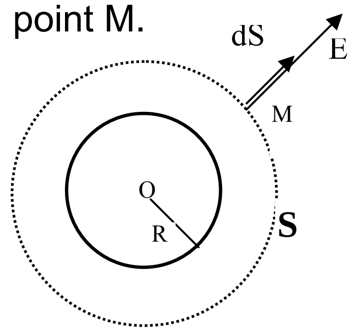
La distribution de charges a symétrie sphérique est invariante par rotation autour de tous les axes passant par un point O de la distribution : O est alors un centre de symétrie.

En coordonnées sphériques (r,θ,φ), le champ électrostatique $\vec{E}$ est radial et ne dépend que de r : $\vec{E} = E(r)\vec{e}_r$

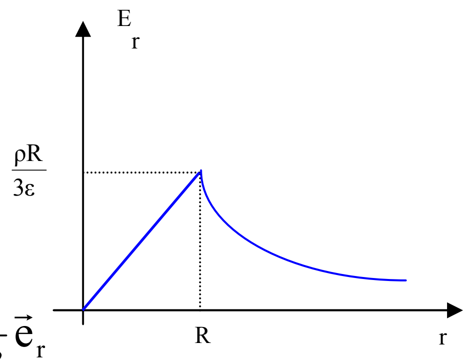
Remarque : Le centre de symétrie O est l'intersection de tous les plans de symétrie : le champ $\vec{E}$ est nul en O.

Exemples d'application du théorème de Gauss

Exemple 1: Calcul de $\vec{E}$ créé par une sphère chargée, en un point M.



- Etude de la symétrie : une sphère chargée uniformément présente une symétrie sphérique, $\vec{E}$ est radial est ne dépend que de r.
- Choix de la surface de Gauss : On choisit la surface d'une sphère de centre O et de rayon $r = \| \vec{OM} \|$.
- Calcul du flux : $\phi(\vec{E}) = \iint_S \vec{E}.d\vec{S} = \iint_S E.dS = E\iint_S dS = E.S = E.4\pi r^2$



- Théorème de Gauss : $\phi(\vec{E}) = E.4\pi r^2 = \dfrac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$

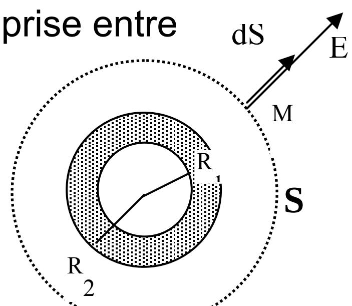
1^{er} cas : r < R $\quad \sum q_i = \rho.\dfrac{4}{3}\pi r^3 \quad \rightarrow \quad \vec{E} = \dfrac{\rho.r}{3\varepsilon_0}\vec{e}_r$

$2^{ème}$ cas : r > R $\quad \sum q_i = \rho.\dfrac{4}{3}\pi R^3 = Q \quad \rightarrow \quad \vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

Remarque : le champ est continu à la traversée de la surface de la sphère chargée en volume : $\vec{E}(r = R^-) = \vec{E}(r = R^+)$.

Exemple 2: Calcul de $\vec{E}$ créé par une couche de charges comprise entre deux sphères concentriques.

- La distribution présente la symétrie sphérique



$\vec{E}$ est radial est ne dépend que de r.

- Surface de Gauss : On choisit la surface S de la sphère de centre O et de rayon $r = \| \vec{OM} \|$.
- Calcul du flux : $\phi(\vec{E}) = \iint_S \vec{E}.d\vec{S} = \iint_S E.dS = E\iint_s dS = E.S = E.4\pi r^2$
- Théorème de Gauss : $\phi(\vec{E}) = E.4\pi r^2 = \dfrac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$

1[er] cas : r < R_1 $\quad \Sigma q_i = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{E} = \vec{0}$

2[ème] cas : r > R_2 $\quad \Sigma q_i = \rho.\dfrac{4}{3}\pi(R_2^{\ 3} \quad R_1^{\ 3}) = Q \;\; \vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r = \dfrac{\rho(R_2^{\ 3} \quad R_1^{\ 3})}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

3[ème] cas : R_1 < r < R_2 $\quad \Sigma q_i = \rho.\dfrac{4}{3}\pi(r^3 \quad R_1^{\ 3}) \rightarrow \vec{E} = \dfrac{\rho(r^3 \quad R_1^{\ 3})}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

en R_1 et en R_2 il y'a continuité du champ $\vec{E}$.

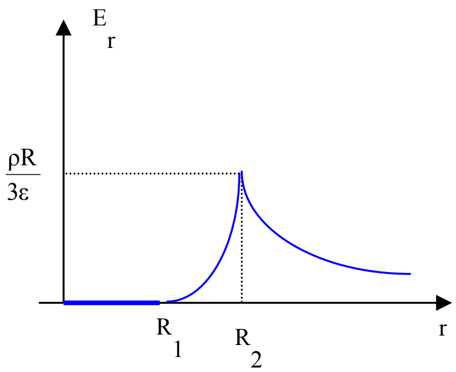
Remarque :

Si on néglige l'épaisseur de la couche de charges, elle devient chargée en surface :

$R_2 \quad R_1 \rightarrow 0, R_2 \approx R_1 = R$

pour $r < R \rightarrow \vec{E} = \vec{0}$, pour $r > R \rightarrow \vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e}_r$

Dans ce cas $\vec{E}$ présente une discontinuité qui vient du fait que l'on néglige l'épaisseur de la couche.



Exemple 3: Calcul de $\vec{E}$ créé par une sphère chargée en surface.
Exemple 4: Calcul de $\vec{E}$ créé par un cylindre infini chargé en volume.
Exemple 5: Calcul de $\vec{E}$ créé par un plan chargé de dimensions infinies.